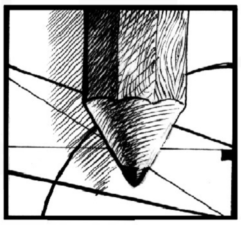


Yksi tehtävä, monta ratkaisua

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Marraskuussa 2012 pidetyn Lukion matematiikkakilpailun avoimen sarjan ensimmäisen kierroksen neljäs tehtävä oli seuraava:

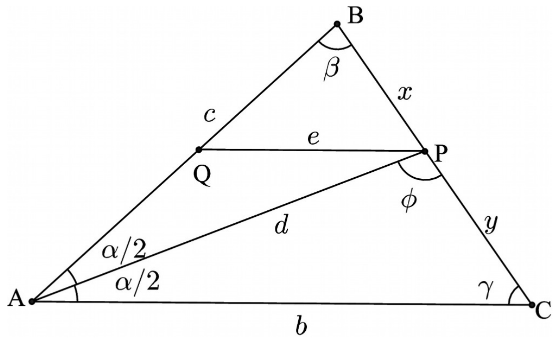
Terävän kulman $\angle A$ puolittajalta valitaan piste P ja toiselta kyljeltä piste B. BP:n jatke leikkaa toisen kyljen pisteessä C. Osoita, että lausekkeen

$$\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|AC|}$$

arvo ei riipu pisteen B valinnasta, kun P pidetään paikallaan.

Kuten odottaa sopi, tehtävä osoittautui varsin vaikeaksi geometrian ja todistamisen melko kaukaa kiertävän opetussuunnitelmamme mukaan opiskelleille kilpailijoille: vain alle 10 % osallistujista osasi kirjoittaa hyväksyttävän ratkaisun. Kilpailutilanteessa ei toisaalta ole liikaa aikaa ja ratkaistavana on muitakin tehtäviä, joten tästä vaatimattomasta tuloksesta ei kannata liian syvällisiä johtopäätöksiä tehdä.

Mutta tämä tehtävä on siitä hauska, että sitä voi lähestyä varsin monesta suunnasta, ja aina pääsee maaliin. Ennen kuin lähdetään kulkemaan näitä polkuja, sovitaan muutamasta merkinnästä; kaikkia ei kuitenkaan tarvita kaikissa ratkaisuissa. Olkoon $\angle BAC=\alpha$, $\angle CBA=\beta$, $\angle ACB=\gamma$, $AB=c$, $AC=b$, $\angle APC=\phi$ ja $AP=d$. Olkoon vielä Q se AB:n piste, jolle AC ja QP ovat yhdensuuntaiset ja $QP=e$. (Emme käytä janan pituuksille itseisarvomerkkejä, niin kuin tehtävän tekstissä tehtiin.)



Kilpailutoimikunta tarjosi malliratkaisuksi seuraavaa yksinkertaista päättelyä, jonka ydin on monesti käyttökelpoinen idea ”laske sama asia kahdella eri tavalla”.

1. ratkaisu. Kolmion ACB kaksinkertainen ala on $bc\sin\alpha$. Tämä ala on myös kolmioiden ACP ja APB kaksinkertaisten alojen $bd\sin\frac{\alpha}{2}$ ja $dc\sin\frac{\alpha}{2}$ summa. Kun yhtälö

$$bd\sin\frac{\alpha}{2}+dc\sin\frac{\alpha}{2}=bc\sin\alpha$$

jaetaan puolittain bc:llä, saadaan

$$\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)d\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha.$$

Koska α ei riipu pisteen B valinnasta, ei myöskään lauseke

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{b}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$$

siitä riipu.

Useimmat tehtävän onnistuneesti ratkaisseet kilpailijat lähestyivät sitä sinilauseen kautta. Polku ratkaisuun voi nyt hiukan vaihdella, mutta se on kaikissa tapauksissa edellistä pinta-aloihin perustuvaa päättelyä mutkallisempi ja tarvitsee joitain trigonometrisia temppuja.

2. ratkaisu. Kolmiosta ACP saadaan

$$\frac{d}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\phi}$$

ja kolmiosta APB

$$\frac{d}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin(180° - \phi)} = \frac{\sin\beta}{\sin\phi}.$$

Näin ollen

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\sin\beta + \sin\gamma}{\sin\phi}.$$

Yhtälön oikealla puolella on kolme B:n sijainnista riippuvaa kulmaa. Yksi hyvä tapa edetä on käyttää trigonometrian kaavastoa ja seuraavaa yksinkertaista algebrallista havaintoa: kahdesta luvusta toinen on lukujen keskiarvo lisättynä lukujen erotuksen puolikkaalla, toinen keskiarvo vähennettynä samalla puolikkaalla. Tämä huomio ja sinin yhteenlaskukaava johtavat (tunnettuun, muttei kovin helposti ulkoa muistettavaan) tulokseen

$$\begin{aligned}\sin\beta + \sin\gamma &= \sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2} + \frac{\beta-\gamma}{2}\right)\\ &\quad + \sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2} - \frac{\beta-\gamma}{2}\right)\\ &= 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}.\end{aligned}$$

Siis

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{d}\cdot\frac{\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\phi}. \tag{1}$$

Suure $\beta + \gamma = 180° - \alpha$ ei riipu B:n sijainnista. Entä $\beta - \gamma$ ja ϕ? Katsotaan vielä kolmioita ACP ja APB. Kolmion kulman vieruskulma on kolmion kahden muun kulman summa, joten $\beta + \dfrac{\alpha}{2} = \phi$ ja $\gamma + \dfrac{\alpha}{2} = 180° - \phi$. Kun nämä yhtälöt vähennetään toisistaan, saadaan $\beta - \gamma = 2\phi - 180°$ ja $\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2} = \cos(\phi - 90°) = \sin\phi$. $\sin\phi$ supistuu pois kaavasta (1), joten väite on todistettu. Mutta on toki mukava laskea tehtävässä kysytyn lausekkeen arvo. Se on

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{d}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Kun lauseketta verrataan kuvaan, havaitaan, että itse asiassa

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{PQ}.$$

Koordinaatisto ja analyyttinen geometria tarjoavat oman keinomaailmansa käsillä olevan tehtävän ratkaisuun. Suora, leikkauspiste ja pisteiden välinen etäisyys ovat analyyttisessä geometriassa yksinkertaisia asioita, mutta suorien välinen kulma, joka tehtävässä ilmenee kulman puolittajan mukana olemisena, saattaa olla hankalasti käsiteltävä. Analyyttistä geometriaa käytettäessä on kuitenkin usein mahdollista yksinkertaistaa asioita järkevillä valinnoilla.

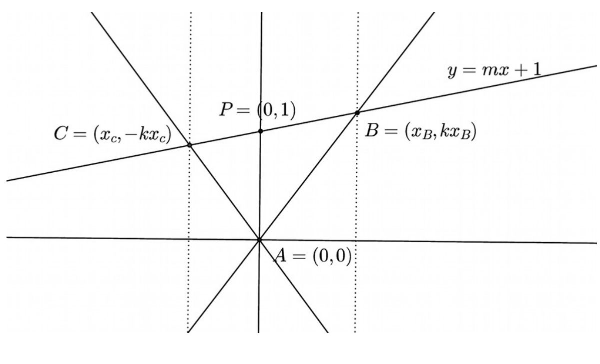
3. ratkaisu. Viisas valinta on ottaa kulman $\angle A$ puolittajaksi koordinaattiakseli, kaikkein edullisimmin y-akselin (jotta vältytään tapauksen $BC \perp AP$ käsittelemisestä erikseen), ja pisteiksi A ja P kiinteät y-akselin pisteet, vaikkapa $A = (0, 0)$ ja $P = (0, 1)$. Kulman $\angle A$ kyljet tulevat nyt olemaan suoria, joiden kulmakertoimet ovat itseisarvoltaan yhtä suuret ja vastakkaismerkkiset. Suoran AB yhtälö voi siis olla $y = kx$ ja suoran AC $y = -kx$, missä k on positiivinen vakio. Suora AB on jokin pisteen $(0, 1)$ kautta kulkeva suora, siis $y = mx + 1$. Koska tämä suora leikkaa kulman $\angle A$ molemmat kyljet, on oltava $|m| < k$. Pisteet B ja C ovat suorien $y = kx$ ja $y = mx + 1$ ja suorien $y = -kx$ ja $y = mx + 1$ leikkauspisteet. Leikkauspisteiden x-koordinaatit ovat

$$x_B = \frac{1}{k-m}, \quad x_C = -\frac{1}{k+m}.$$

Yhdenmuotoisista suorakulmaisista kolmioista nähdään heti, että hypotenuusat AB ja AC ovat verrannollisia kateetteihin x_B ja $|x_C|$. Mutta

$$\frac{1}{x_B} + \frac{1}{|x_C|} = k - m + k + m = 2k.$$

Suure ei riipu m:stä, joten väite on todistettu.



Koordinaattitaso, xy-taso, on rakenteeltaan käytännöllisesti katsoen sama kuin kompleksilukujen $z = x + iy$ muodostama joukko, *kompleksitaso*. Ei ole yllättävää, että samat päättelyt, jotka voi suorittaa xy-tasossa, voi siirtää kompleksiluvuilla tapahtuviksi. Muutamat kompleksilukujen ominaisuudet saattavat toisinaan helpottaakin ratkaisua. Yksi käsillä olevan tehtävän kompleksilukuja hyödyntävä ratkaisu voisi olla seuraava.

4. ratkaisu. Valitaan kulman puolittajaksi reaaliakseli, pisteeksi A kompleksiluku 0 ja pisteeksi P kompleksiluku 1. Jos z on jokin suoran AB kiinteä piste, niin piste B on tz, missä t on jokin reaaliluku. Nyt kompleksiluvun $z = x + iy$ liittoluku $\overline{z} = x - iy$ on z:n kanssa symmetrinen reaaliakselin suhteen. Se on siis suoran AC piste. Piste C on siis $u\overline{z}$, missä u on reaaliluku. t ja u eivät ole mielivaltaisia: niitä sitoo se ehto, että suora BC kulkee P:n kautta. Kompleksiluvuin ilmaistuna tämä on $tz - 1 = k(1 - u\overline{z})$, missä k edelleen on jokin positiivinen reaaliluku. Mutta kompleksiluvut ovat samat, jos ja vain jos niiden liittoluvut ovat samat. Tämä merkitsee sitä, että t ja u toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} zt + k\overline{z}u = k + 1 \\ \overline{z}t + kzu = k + 1. \end{cases}$$

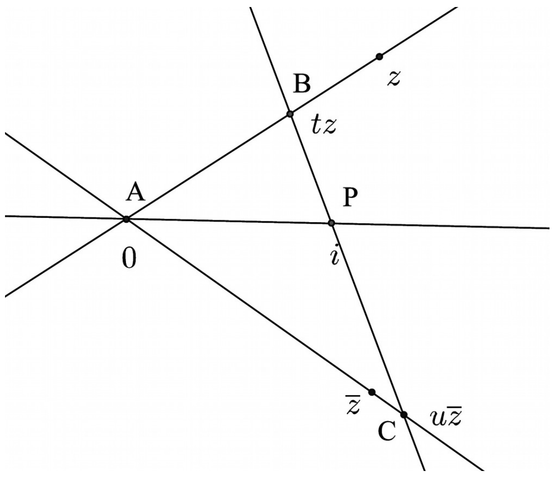
Ratkaistaan tämä: tavalliseen tapaan saadaan

$$t = \frac{(k+1)(z-\overline{z})}{z^2 - \overline{z}^2}, \quad u = \frac{(k+1)(z-\overline{z})}{k(z^2 - \overline{z}^2)}.$$

Mutta nyt saadaankin

$$\begin{aligned} \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} &= \frac{1}{t|z|} + \frac{1}{u|z|} \\ &= \left(\frac{1}{k+1} + \frac{k}{k+1}\right) \frac{z^2 - \overline{z}^2}{|z|(z-\overline{z})} \\ &= \frac{z^2 - \overline{z}^2}{|z|(z-\overline{z})}. \end{aligned}$$

Koska z on kiinteä suoran AB piste, lausekkeen arvo ei riipu B:n valinnasta.



Edellisessä ratkaisussa käytetyt operaatiot, kompleksilukujen yhteenlasku ja kompleksiluvun kertominen reaaliluvulla, ovat olennaisesti samoja kuin tason vektorien vastaavat laskutoimitukset. Ei ole yllättävää, että tehtävä voidaan ratkaista myös tavallisilla vektorilaskennan keinoilla.

5. ratkaisu. Valitaan taas piste A origoksi. Pisteen P paikkavektoriksi voidaan ottaa $\overrightarrow{AP} = \vec{i}$: kulman $\angle A$ puolittaja on siis positiivinen x-akseli. Kulman kyljet tulevat kiinnitetyiksi, kun kummaltakin valitaan x-akselin suhteen symmetrinen piste. Nämä voivat olla B' ja C', niin että $\overrightarrow{AB'} = \vec{i} + k\vec{j}$ ja $\overrightarrow{AC'} = \vec{i} - k\vec{j}$, missä k on jokin positiivinen luku. Huomataan, että $|\overrightarrow{AB'}| = |\overrightarrow{AC'}|$. Suorien AB' ja AC' pisteet B ja C ovat nyt sellaisia, että $\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AB'} = t(\vec{i} + k\vec{j})$ ja $\overrightarrow{AC} = u\overrightarrow{AC'} = u(\vec{i} - k\vec{j})$, missä t ja u ovat positiivisia lukuja. Näitä lukuja sitoo toisiinsa se, että B, P ja C ovat samalla suoralla. Samalla suoralla olemisen (ja sen, että P on B:n ja C:n välissä) ehto on, että $\overrightarrow{PB} = s\overrightarrow{CP}$ jollain positiivisella luvulla s. Mutta $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP} = t(\vec{i} + k\vec{j}) - \vec{i} = (t-1)\vec{i} + tk\vec{j}$ ja $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC} = \vec{i} - u(\vec{i} - k\vec{j}) = (1-u)\vec{i} + ku\vec{j}$. Pisteiden B, P ja C samalla suoralla olemisen ehto sisältyy siis vektoriyhtälöön

$$(t-1)\vec{i} + tk\vec{j} = s(1-u)\vec{i} + sku\vec{j}.$$

Tällainen vektoriyhtälö toteutuu, jos kantavektoreiden $\vec{i}$ ja $\vec{j}$ kertoimet ovat samat yhtälön molemmilla puolilla. On siis oltava voimassa yhtälöpari

$$\begin{cases} t - 1 = s(1-u) \\ tk = sku. \end{cases}$$

Tästä on helppo ratkaista

$$t = \frac{s+1}{2}, \quad u = \frac{s+1}{2s}.$$

Nyt on

$$\frac{1}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{1}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{t|\overrightarrow{AB'}|} + \frac{1}{u|\overrightarrow{AC'}|} = \frac{2(1+s)}{(s+1)|\overrightarrow{AB'}|}.$$

Lausekkeen arvo ei riipu B:n valinnasta eli parametrista t.

Ehkä – kilpailutoimikunnan tarjoaman ratkaisun ohessa – yksinkertaisin ratkaisu perustuu kuitenkin ihan perusgeometriaan.

6. ratkaisu. Olkoon $BP = x$ ja $PC = y$. Tunnetusti kolmion kulman puolittaja jakaa vastakkaisen sivun viereisten sivujen suhteessa. Siis

$$\frac{b}{c} = \frac{y}{x}.$$

Yhdenmuotoisista kolmioista BAC ja BQP nähdään heti, että

$$\frac{x}{x+y} = \frac{e}{b}.$$

Siis

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{y}{xb} = \frac{x+y}{x}\frac{1}{b} = \frac{b}{e}\frac{1}{b} = \frac{1}{e}.$$

Koska $e = AP$ ei riipu B:stä, todistus on valmis (ja tehtävän lausekkeelle saatiin selvä geometrinen merkitys).

Tätä viimeistä ratkaisua ei – niin kuin ei sitä edeltäviä kompleksiluku- tai vektoriratkaisuakaan – kukaan kilpailija ehdottanut.