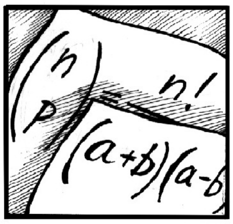

Binomikaava

Pekka Alestalo
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu

Tässä kirjoituksessa vertaillaan kahta tapaa lähestyä binomikaavaa (2). Niistä ensimmäinen perustuu lukumäärien laskemiseen, jota kutsutaan kombinatoriikaksi. Toinen tapa viittaa puolestaan analyysiin, jolla matematiikassa yleensä tarkoitetaan jotakin derivaattaan tai integraaliin liittyvää.

Kombinatorinen binomikaava

Kertoma $n! = n(n-1)(n-2)\dots 3\cdot 2\cdot 1$ on eräs tärkeimmistä lukumäärän laskemiseen liittyvistä lausekkeista. Se antaa vastauksen esimerkiksi kysymykseen, kuinka monella eri tavalla n ihmistä voidaan asettaa jonoon. Monien eri syiden vuoksi on luontevaa määritellä $0! = 1$; esimerkiksi tyhjä joukko on sopimuksen mukaan kaikkien joukkojen osajoukko. Lisäksi on syytä muistaa, että joukossa alkioiden järjestyksellä ei ole merkitystä; järjestetyn joukon oikea matemaattinen nimitys on nimenomaan jono.

Kertomalausekkeiden sieventämisessä tarvitaan usein seuraavaa tulosta. Esimerkiksi

$$\frac{5!}{3!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2} = 5\cdot 4,$$

ja samalla periaatteella saadaan yleinen kaava

$$n(n-1)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!},$$

kun $0 \le m \le n$.

Olkoot $0 \le k \le n$ luonnollisia lukuja (nolla mukana). Kombinatorinen määritelmä binomikertoimelle $\binom{n}{k}$ on lukumäärä sille, kuinka monella eri tavalla n:n alkion joukosta voidaan valita k:n alkion osajoukko. Lauseke $\binom{n}{k}$ luetaan ”n yli k”; englanniksi ”n over k” tai ”n choose k”, joista jälkimmäinen viittaa suoraan näiden lukujen kombinatoriseen taustaan. Esimerkiksi viiden hengen ryhmästä saadaan $\binom{5}{2}$ erilaista sulkapallon kaksinpeliä.

Monet binomikerrointen ominaisuudet on helppo päätellä ilman eksplisiittistä kaavaa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{1}$$

joka johdettaneen kaikissa lukiokirjoissa vertaamalla k:n alkion jonojen lukumäärää vastaavien k:n alkion osajoukkojen lukumäärään.

Tehtävä 1. Päättele binomikerrointen

$$\binom{n}{0},\ \binom{n}{n},\ \binom{n}{1} \text{ ja } \binom{n}{n-1}$$

arvot kombinatorisesti. Tarkista tulokset kaavan (1) avulla.

Tehtävä 2. Esitä kombinatorinen perustelu kaavalle

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Binomikerrointen nimi ei kuitenkaan viittaa kombinatoriseen määritelmään, vaan binomikaavaan

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \\ &= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots \\ &\quad + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n \\ &= a^n + na^{n-1}b + \dots + nab^{n-1} + b^n, \qquad (2)\end{aligned}$$

kun n on luonnollinen luku ja a, b ovat reaalilukuja.

Huomatus: Summamerkin käyttöön liittyy yleensä sopimus, jonka mukaan $0^0 = 1$. Muuten esimerkiksi binomikaavan ensimmäinen termi a^n (indeksillä $k = 0$) pitäisi kirjoittaa muusta summasta erilleen siltä varalta, että $b = 0$.

Binomikaava todistetaan yleensä ns. matemaattisen induktion avulla, mutta kombinatorinen päättely on hyvin suoraviivainen. Kun lauseke

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b)$$

kerrotaan auki, niin $a^{n-k}b^k$-tyyppisiä termejä saadaan täsmälleen silloin, kun tulon n:stä tekijästä valitaan täsmälleen k kappaletta b-termejä, jolloin kaikki loput $n-k$ kappaletta ovat a-termejä. Termien järjestyksellä ei tulossa ole väliä, joten $a^{n-k}b^k$-termejä saadaan yhteensä $\binom{n}{k}$ kappaletta.

Yllä oleva päättely miellyttää kombinatoriseen ajatteluun tottuneita, ja tälle ihmistyypille myös binomikerrointen ominaisuus

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \qquad (3)$$

on helppo ilman lausekkeiden sieventämistä, kun kysytään: Monellako eri tavalla voidaan $n+1$ alkion joukosta valita k kappaletta? Vastaus löytyy esimerkiksi seuraavalla tavalla. Ajatellaan alkiot palloina, joista yksi on musta ja loput n valkoisia (mutta keskenään erilaisia). Erilaiset k:n alkion valinnat jakaantuvat silloin kahteen ryhmään; niihin, joissa ei ole mustaa palloa (A-ryhmä), ja kaikkiin muihin, joissa on musta pallo ja $k-1$ valkoista (B-ryhmä). Tällöin A-ryhmän valintoja on $\binom{n}{k}$ kappaletta, koska musta pallo on pelkkää ilmaa A-ryhmälle. B-ryhmän valintoja on taas $\binom{n}{k-1}$ kappaletta, sillä mustan pallon lisäksi valitaan vain $k-1$ valkoista palloa n:stä mahdollisesta. Ryhmät A ja B ovat täysin erilliset, joten niiden lukumäärien summana saadaan kaikkien valintojen lukumäärä. Huomaa myös, ettei pallojen värittämiseen liity niiden järjestämistä.

Tehtävä 3. Piirrä kuvio edellisen päättelyn tilanteesta ja tutki välivaiheet huolellisesti. Tarvittaessa voit kokeilla asiaa pienillä luvuilla n ja k.

Tehtävä 4. Todista kaava (3) kirjoittamalla binomikertoimet kertomien avulla ja sieventämällä lausekkeet.

Tehtävä 5. Kertaa, miten kaavan (3) avulla saadaan Pascalin kolmion muodostussääntö, kun n on rivinumero ja $k = 0, 1, \dots, n$ on kolmion sivun suuntaisten sarakkeiden järjestysnumero.

Tehtävä 6. Neperin luku e määritellään (yleensä) raja-arvona

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

a) Osoita binomikaavan avulla, että $e \geq 2$. b) Osoita binomikaavan avulla, että $e > 2$.

Analyyttinen binomikaava

Osa ihmisistä hahmottaa raa'an kaavoilla laskemisen kombinatorista päättelyä helpommin. Binomikaava voidaan todistaa myös tällä tavalla.

Tavallisin todistus etenee ns. matemaattisen induktion avulla potenssin n suhteen. Siinä tarvitaan ym. kaavaa (3) ja melko mutkikasta summalausekkeiden sieventelyä. Koska se on mielestäni hankalampi kuin seuraava päättely, niin sivuutan sen kokonaan.

Todetaan aluksi, että yleinen binomikaava (2) seuraa yksinkertaisemmasta kaavasta

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \qquad (4)$$

sijoittamalla tähän $x = b/a$, kertomalla tulos puolittain lausekkeella a^n ja tekemällä tarvittavat potenssien sievennykset.

Kaavaa (4) kannattaa tarkastella kahden n-asteisen polynomin yhtäsuuruutena: siinä väitetään, että polynomit $P(x) = (1+x)^n$ ja $Q(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ ovat samat.

Tehtävä 7. Todista seuraava tulos: Jos n-asteisille polynomeille

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

ja

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

on voimassa $p(0) = q(0)$ ja lisäksi

$$p^{(m)}(0) = q^{(m)}(0) \text{ kaikilla } 1 \leq m \leq n,$$

niin $a_m = b_m$ kaikilla m ja polynomit ovat samat. Tässä siis $p^{(m)}(0)$ tarkoittaa polynomin $p(x)$ kertaluvun m derivaattaa kohdassa $x = 0$.

Kaavan (4) todistamiseksi riittää siis tarkistaa tehtävän 7 ehdot. Selvästi $P(0) = (1+0)^n = 1$ ja

$$Q(0) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}0^k = 1,$$

koska $0^0 = 1$.

Lisäksi arvoilla $1 \leq m \leq n$ on voimassa

$$\begin{aligned}
P'(x) &= n(1+x)^{n-1}, \\
P''(x) &= n(n-1)(1+x)^{n-2}, \\
&\vdots \\
P^{(m)}(x) &= n(n-1)\ldots(n-m+1)(1+x)^{n-m},
\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned}
P^{(m)}(0) &= n(n-1)\ldots(n-m+1)(1+0)^{n-m} \\
&= n(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}
\end{aligned}$$

käyttämällä alussa esitettyä kertoman ominaisuutta. Toisaalta

$$\begin{aligned}
Q'(x) &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} kx^{k-1}, \\
Q''(x) &= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)x^{k-2}, \\
&\vdots \\
Q^{(m)}(x) &= \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)\ldots(k-(m-1))x^{k-m} \\
&= \binom{n}{m} m! + \sum_{k=m+1}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)\ldots \\
&\qquad (k-(m-1))x^{k-m},
\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned}
Q^{(m)}(0) &= \binom{n}{m} m! = \frac{n!}{m!(n-m)!} m! \\
&= \frac{n!}{(n-m)!} = P^{(m)}(0).
\end{aligned}$$

Väite on siis todistettu, ja kaava (4) on tosi.

Lisätietoja esimerkiksi englanninkielisen Wikipedian sivulla `http://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_coefficient`

Matematiikan hämmästyttävä tehokkuus luonnontieteissä

Nobelin fysiikan palkinnon saaja E. P. Wigner kirjoitti artikkelissa, jonka otsikko on Matematiikan hämmästyttävä tehokkuus luonnontieteissä:

> ”Matematiikan kielen ihmeellinen sopivuus fysiikan lakien formulointiin on suurenmoinen lahja, jota emme ymmärrä emmekä ansaitse, meidän tulisi olla kiitollisia siitä ja toivoa, että se pysyy voimassa myös tulevaisuudessa ja että sitä voidaan laajentaa monille muillekin tieteen aloille, seurasi siitä sitten mielihyvää tai hämmennystä.”

N. Bourbakin artikkelissa ”Matematiikan arkkitehtuuri” sanotaan:

> ”Nykyfysiikan viimeiset keksinnöt näyttävät vahvistavan, mitä odottamattomimmalla tavalla, kokeellisesti havaittavien ilmiöiden ja matemaattisten struktuurien välisen läheisen yhteyden. Kuitenkaan emme tiedä yhtään mitään tämän tosiasian perusteista ja ehkä emme koskaan tule tietämäänkään.”