Kompleksiluvut ja kolmannen asteen yhtälön ratkaisut

Lauri Ajanki
Helsingin yliopisto

Johdanto

Reaalilukua α voidaan graafisesti ajatella x-akselin eli *reaaliakselin* pisteenä $(\alpha, 0)$. Näin saamme samaistuksen reaalilukujen ja reaaliakselin välille. Kompleksiluvut määritellään tason yleisinä pisteinä (a, b). Kompleksiluvuille määritellään yhteen- ja kertolasku kaavoilla

$$\begin{aligned}(a,b)+(c,d)&=(a+c,b+d)\\(a,b)(c,d)&=(ac-bd,ad+bc).\end{aligned}$$

Näin määriteltynä kompleksiluvut muodostavat luonnollisen laajennoksen reaaliluvuille. Esimerkiksi jokainen reaaliluku x on samaistuksen $x = (x, 0)$ kautta myös kompleksiluku. Reaaliluvulla 1 kertominen ei muuta kompleksilukua (a, b), sillä määritelmän nojalla $(1, 0)(a, b) = (1 \cdot a - 0 \cdot b, 1 \cdot b + 0 \cdot a) = (a, b)$. Huomaa myös, että molemmat laskutoimitukset ovat vaihdannaisia eli ne toteuttavat ehdot

$$\begin{aligned}(a,b)+(c,d)&=(c,d)+(a,b)\\(a,b)(c,d)&=(c,d)(a,b).\end{aligned}$$

Luvulla $(0, 1)$ on ominaisuus $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$. Tätä lukua sanotaan *imaginaariyksiköksi* ja merkitään lyhyemmin merkinnällä i. Lyhyemmin merkittynä saamme siis tuloksen $\mathrm{i}^2 = -1$. Imaginaariyksikön avulla jokainen kompleksiluku voidaan esittää muodossa

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(0,1)(b,0)=a+\mathrm{i}b,$$

joka on usein kätevämpi esitysmuoto. Tarkemmin kompleksilukuja on Solmussa käsitellyt Matti Lehtinen, katso [3].

Kompleksiluvuilla on paljon reaaliluvuista poikkeavia ominaisuuksia: edellä jo havaittiin, että yhtälöllä $x^2 + 1 = 0$ on kompleksinen ratkaisu $x = \mathrm{i}$. Voidaankin osoittaa, että polynomiyhtälöillä on aina kompleksiratkaisuja: *algebran peruslauseen* mukaan jokaisella n-asteisella polynomiyhtälöllä on tasan n kappaletta kompleksiratkaisuja kun ne lasketaan kertalukuineen, ks. [2]. Mikä on yhtälön $x^2 + 1 = 0$ toinen ratkaisu? Tarkastellaan tässä erästä lähtökohdiltaan reaalista ilmiötä, jonka tutkimiseen tarvitsemme kompleksilukuja.

Kuutiojuuria ja de Moivren kaava

1500-luvun matematiikan historian suuria kehitysvaiheita oli kolmannen ja neljännen asteen yhtälöiden ratkaisukaavojen löytyminen. Italialainen Gerolamo Cardano julkaisi vuonna 1545 nimeään kantavan ratkaisukaavan muotoa $x^3 = mx + n$ oleville yhtälöille. Kaavan mukaan

$$x=\sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{n}{2}-\sqrt{\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}}}.$$

Kaavan alkuperäisestä keksijästä käytiin aikanaan kiivas julkinen sananvaihto useamman matematiikon välillä. Suositeltavana taustalukemisena kolmannen ja neljännen asteen yhtälöiden ratkaisukaavojen löytymisestä sekä alkuperäiseen keksijään liittyvästä kiistasta mainittakoon Mario Livion suomennettu teos Yhtälö, jota ei voinut ratkaista [4].

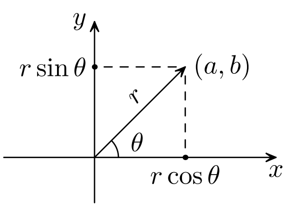
Ratkaisukaava ei kuitenkaan ole aivan niin yksinkertainen kuin päällisin puolin näyttää ja sen oikeellisuus herättikin aikanaan ihmetystä. Viitteitä tästä antaa yhtälö $x^3 = 6x + 4$. Kyseinen yhtälö voidaan toki ratkaista ilman kaavaakin: kokeilemalla havaitaan, että vakiotermin tekijöistä $x = -2$ on eräs ratkaisu. Muut ratkaisut löydettäisiin tekijöihinjaolla. Tässä kirjoituksessa on kuitenkin tarkoitus tutkia, miten ratkaisukaava käyttäytyy mainitun yhtälön tapauksessa. Lähteenä on käytetty vastaavaa esitystä teoksessa [1].

Koska funktio $f(x) = x^3 - 6x - 4$ on jatkuva ja vaihtaa merkkiään väleillä $[-3, -\frac{3}{2}]$, $[-1, 0]$ sekä $[1, 3]$, on näillä väleillä oltava nollakohdat. Monotonisuuden nojalla kullakin välillä on tasan yksi nollakohta. Suora sijoitus kaavaan antaa

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{216}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{216}{27}}} \\ &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-4}} \\ &= \sqrt[3]{2 + 2\mathrm{i}} + \sqrt[3]{2 - 2\mathrm{i}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Päädymme siis kahden kompleksisen kuutiojuuren summaan. Ratkaisuja tiedetään kuitenkin olevan kolme kappaletta ja niiden kaikkien pitäisi olla reaalisia – jotain näyttäisi olevan pielessä. Cardanon kaava on kuitenkin oikein, kaavassa (1) itse asiassa esiintyy kolme reaalilukua. Tämän näkemiseksi tarvitsemme hieman trigonometriaa.

Kun ajattelemme kompleksilukua tason pisteenä (a, b), saadaan sen etäisyys origosta Pythagoraan mukaan kaavalla $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Origosta poikkeavan kompleksiluvun *vaihekulma* on kulma, joka jää positiivisen x-akselin sekä origon ja pisteen (a, b) määräämän janan väliin. Origolle ei määritellä vaihekulmaa. Vaihekulma on kätevintä määrittää kuvan avulla: esimerkiksi ensimmäisessä neljänneksessä sijaitsevan pisteen vaihekulma θ toteuttaa ehdon $\tan\theta = \frac{b}{a}$.



Vaihekulma ei ole yksikäsitteinen: jos θ on eräs pisteen (a, b) vaihekulma, myös $\theta + 2\pi n$ kelpaa vaihekulmaksi millä tahansa kokonaisluvulla n. Usein vaihekulma rajoitetaankin jollekin 2π-mittaiselle puoliavoimelle välille. Nyt suorakulmaisille koordinaateille a ja b saadaan esitysmuodot $a = r\cos\theta, b = r\sin\theta$ ja kompleksiluku voidaan esittää muodossa $z = a + \mathrm{i}b = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$. Tätä esitystä kutsutaan napakoordinaattiesitykseksi.

Napakoordinaattien perustuloksia on *de Moivren kaava*, jonka mukaan kokonaisluvulla n pätee

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta.$$

Kaavan todistus tapahtuu induktiolla. Palataan nyt selvittämään, mitä ovat kuutiojuuret kaavassa (1). Käsitellään ensin juurta $\sqrt[3]{2 + 2\mathrm{i}}$. Kuutiojuuren määritelmän nojalla $\sqrt[3]{z}$ tarkoittaa sitä lukua w, joka toteuttaa ehdon $w^3 = z$. Tehtävänä on siis määrittää luku, jonka kolmas potenssi on $2 + 2\mathrm{i}$. Tämä onnistuu de Moivren kaavan avulla. Luvun $2 + 2\mathrm{i}$ napakoordinaattiesitykseksi saadaan $\sqrt{8}(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4})$. Merkitään $w = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ ja muodostetaan yhtälö

$$\begin{aligned} &(r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta))^3 = \sqrt{8}(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}) \\ \Leftrightarrow\quad &r^3(\cos 3\theta + \mathrm{i}\sin 3\theta) = \sqrt{8}(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}). \end{aligned}$$

Vertaamalla yhtälön molempia puolia havaitaan, että täytyy olla

$$\begin{aligned} &r^3 = \sqrt{8} \text{ ja } 3\theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ \Leftrightarrow\quad &r = \sqrt[3]{\sqrt{8}} \text{ ja } 3\theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ \Leftrightarrow\quad &r = \sqrt{2} \text{ ja } \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} = \frac{\pi(1 + 8n)}{12}, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ratkaisuja on siis useita. Havaitaan kuitenkin, että arvolla $n = 3$ saadaan $\theta = \frac{25\pi}{12} = \frac{\pi}{12} + 2\pi$, josta sini ja kosini ovat samat kuin kulmasta $\theta = \frac{\pi}{12}$. Siis arvosta $n = 3$ alkaen saadut ratkaisut alkavat "kiertämään kehää". On siis kolme eri lukua, joiden kuutio on $2 + 2\mathrm{i}$ – napakoordinaateissa ne ovat $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12})$, $\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4})$ sekä $\sqrt{2}(\cos\frac{17\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{12})$.

Vastaavasti luku $2 - 2\mathrm{i}$ on napakoordinaateissa $\sqrt{8}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{4})) = \sqrt{8}(\cos\frac{\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4})$, joten de Moivren kaava antaa

$$\begin{aligned} &(r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta))^3 = \sqrt{8}(\cos\frac{\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}) \\ \Leftrightarrow\quad &r^3(\cos 3\theta + \mathrm{i}\sin 3\theta) = \sqrt{8}(\cos\frac{\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}) \\ \Leftrightarrow\quad &r = \sqrt{2} \text{ ja } 3\theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ \Leftrightarrow\quad &r = \sqrt{2} \text{ ja } \theta = \frac{\pi(1 + 8n)}{12}, \quad n = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Eli juuren $\sqrt[3]{2 - 2\mathrm{i}}$ arvot ovat $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12})$, $\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4})$ sekä $\sqrt{2}(\cos\frac{17\pi}{12} - \mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{12})$.

Sijoitetaan saadut luvut kaavaan (1). Jos lukua n vastaa ratkaisu z_n, niin saadaan

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right)+\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right)\\
&= 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})\\
&= \frac{1}{2}(2\sqrt{3}+2) = 1+\sqrt{3}\\
z_1 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)\\
&= 2\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4} = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2\\
z_2 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{12}\right)\\
&\quad+\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}-\mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{12}\right)\\
&= 2\sqrt{2}\cos\frac{17\pi}{12} = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right)\\
&= -\frac{1}{2}(2\sqrt{3}-2) = -(\sqrt{3}-1) = 1-\sqrt{3}
\end{aligned}$$

eli kolme reaalilukua. Sijoittamalla saadut luvut takaisin yhtälöön $x^3 = 6x+4$ nähdään, että ne todella ovat yhtälön ratkaisut.

Kirjoittaja opiskelee matematiikan opettajaksi.

Viitteet

[1] William Dunham: Euler – The Master of Us All, The Mathematical Association of America, 1999.

[2] Tuomas Hytönen: Algebran peruslause lukiolaisille, Solmu 3/2011.

[3] Matti Lehtinen: Kaikki tarpeellinen kompleksiluvuista, Solmu 1/2006.

[4] Mario Livio: Yhtälö, jota ei voinut ratkaista – Miten matematiikka paljasti symmetrian kielen, Terra Cognita, 2005.

Diplomitehtävien oheislukemistoa

Osoitteessa `http://solmu.math.helsinki.fi/diplomi.html` on diplomitehtäville oheislukemistoa, joka varmasti kiinnostaa muitakin kuin diplomien tekijöitä:

Lukujärjestelmistä

Desimaaliluvut, mitä ne oikeastaan ovat?

Murtolukujen laskutoimituksia

Negatiivisista luvuista

Hiukan osittelulaista

Lausekkeet, kaavat ja yhtälöt

Äärettömistä joukoista

Erkki Luoma-aho: Matematiikan peruskäsitteiden historia

Gaussin jalanjäljissä

K. Väisälä: Algebra

Yläkoulun geometriaa

Geometrisen todistamisen harjoitus

K. Väisälä: Geometria

Lukuteorian diplomitehtävät