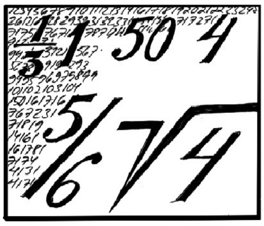

Supremum

Tuomas Korppi

Johdanto

Lukijan mielestä rationaali- ja reaalilukujoukot tuntuvat ehkä samanlaisilta. Rationaali- ja reaaliluvuilla lasketaan suunnilleen samalla tavalla. Kummastakin löytyy mielivaltaisen suuria lukuja ja mielivaltaisen pieniä positiivisia lukuja sekä tietysti vastaavat negatiiviset luvut. On kuitenkin eräs ominaisuus, joka tekee reaaliluvuista rationaalilukuja paremman systeemin jatkuvan muutoksen kuvailemiseen ja moneen muuhunkin tarkoitukseen. Tämä ominaisuus voidaan ilmaista niin, että jokaisella epätyhjällä, ylhäältä rajoitetulla joukolla reaalilukuja on pienin yläraja. Ilmaus voi tässä vaiheessa tuntua lukijasta kryptiseltä, ja tutustummekin tähän ominaisuuteen tässä kirjoitelmassa. Käytän huomattavasti mukaillen erästä keskustelussa [1] esitettyä lähestymistapaa.

Opettavainen satu

Olipa kerran poika nimeltä Pekka, joka ei tuntenut muita lukuja kuin rationaaliluvut. Lukijan muistin virkistämiseksi mainittakoon, että rationaaliluvut ovat niitä lukuja, jotka saadaan kahden kokonaisluvun osamääränä, eli muun muassa $\frac{1}{5}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{-2}{3}$ ja $\frac{0}{1}$ ovat rationaalilukuja.

Eräänä päivänä Pekka lähti kävelemään poispäin kotitalostaan. Kutsumme sitä hetkeä, jona Pekka lähti kävelemään, hetkeksi 0, ja Pekka kiihdytti kävelyään niin, että Pekan etäisyys kotitalosta saadaan kaavalla

$$\text{Etäisyys} = \text{Aika}^2.$$

Hetkellä 1,5 Pekka havaitsi, että hän on etäisyydellä $1{,}5^2 = 2{,}25$ kotitalostaan. Pekka päätteli, että on ollut hetki h_0, jona hän on ollut etäisyydellä 2 kotitalostaan. Nyt h_0 toteuttaa yhtälön

$$h_0^2 = 2.$$

Kuitenkin Pekka tiesi, että tällä yhtälöllä ei ole ratkaisuja rationaalilukujen joukossa. Koska Pekka tunsi vain rationaaliluvut, hän oli ymmällään.

Eräänä toisena päivänä Pekka teki kävelyn, jossa hän lähti kotitalostaan, käveli aikansa ja palasi kotitaloonsa. Kutsumme edelleen sitä hetkeä, jona Pekka lähti kävelemään, hetkeksi 0. Tällä kertaa Pekka käveli niin, että hänen etäisyytensä kotitalosta saadaan kaavalla

$$\text{Etäisyys} = \text{Aika} - \text{Aika}^3.$$

Hetkellä 0 hän oli kotitalossaan, ja hetkellä 1 hän oli palannut kotitaloonsa. Pekka päätteli, että näiden hetkien välillä on hetki h_1, jona hän oli ollut kauimpana kotitalostaan. Pekka oli opiskellut matematiikkaa, ja hän tiesi, että h_1 on funktion

$$f(x) = x - x^3$$

derivaatan nollakohta. Nyt

$$f'(x) = 1 - 3x^2,$$

joten

$$h_1^2 = \frac{1}{3}.$$

Pekka tiesi, että tälläkään yhtälöllä ei ole ratkaisuja rationaalilukujen joukossa, joten Pekka oli taas ymmällään. Sen pituinen se.

Ongelman muotoilu

Kuten useissa saduissa, myös tässä sadussa on opetus: rationaaliluvut ovat hyvin puutteellinen lukujärjestelmä jatkuvan liikkeen kuvailuun. Lukija lienee törmännyt sellaisiin reaalilukuihin, jotka olisivat auttaneet Pekan hämmennykseen: $h_0 = \sqrt{2}$ ja $h_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}$. Nämä eivät olekaan rationaalilukuja. Lukija lienee törmännyt myös muihin reaalilukuihin, jotka eivät ole rationaalilukuja. Esimerkkejä tällaisista ovat e ja π.

Edellä olemme esimerkinomaisesti maininneet joitakin reaalilukuja. Nyt kysymys, joka meitä kiinnostaa, kuuluu

> Mitä kaikkia lukuja meidän on hyväksyttävä reaaliluvuiksi, jotta saisimme reaaliluvuista hyvän (mm.) jatkuvaa liikettä kuvailevan systeemin?

Rationaaliluvut ovat myös reaalilukuja, mutta ne eivät yksin riitä. Mitä muuta tarvitaan? Luettelon antaminen kaikista reaaliluvuista vaikuttaa toivottomalta projektilta[1], joten tahdomme jonkun yleisen periaatteen, jolla voidaan tuottaa kaikki reaaliluvut.

Palaamme tähän kysymykseen hetken päästä, mutta ensin tutkimme motivoivana esimerkkinä hiukan $\sqrt{2}$:ta.

$\sqrt{2}$:sta

Tutkimme sitä aukkoa, jonka $\sqrt{2}$:n puute rationaalilukujen systeemiin jättää.

Osoitamme ensin, että ei ole olemassa rationaalilukua r, jolle $r^2 = 2$. Tästä seuraa, että $\sqrt{2}$ ei ole rationaaliluku.

Todistus: Teemme vastaoletuksen, että on olemassa rationaaliluku r, jolle $r^2 = 2$. Nyt r voidaan esittää muodossa $\frac{a}{b}$, missä a ja b ovat kokonaislukuja. Voimme lisäksi olettaa, että edellämainittua esitystä on sievennetty niin paljon, että a:lla ja b:llä ei ole yhteisiä tekijöitä. Koska $(\frac{a}{b})^2 = 2$, pätee $a^2 = 2b^2$. Siis a^2 on jaollinen kahdella, joten a on jaollinen kahdella, ja koska esitys oli sievennetty, b ei ole jaollinen kahdella. Siis a^2 on jaollinen neljällä. Mutta koska b ei ole jaollinen kahdella, $2b^2$ ei ole jaollinen neljällä, ristiriita. Siis vastaoletus on väärä, ja rationaalilukua r, jolle $r^2 = 2$, ei ole olemassa. $\square$

Tutkitaan sitten sellaisia rationaalilukuja $\frac{a}{b} > 0$, joille $(\frac{a}{b})^2 < 2$. Koska neliöjuurifunktio on kasvava, tällaisille luvuille pätee myös $\frac{a}{b} < \sqrt{2}$. Valitaan nyt niin suuri $n \in \mathbb{N}$, että $\frac{1}{10^n} < \sqrt{2} - \frac{a}{b}$, eli $\frac{a}{b} + \frac{1}{10^n} < \sqrt{2}$. Tästä seuraa $(\frac{a}{b} + \frac{1}{10^n})^2 < 2$. Vedämme seuraavan johtopäätöksen: Jos $\frac{a}{b}$ on mikä tahansa positiivinen rationaaliluku, jolle $(\frac{a}{b})^2 < 2$, on olemassa toinen, suurempi rationaaliluku $\frac{a}{b} + \frac{1}{10^n}$, jolle $(\frac{a}{b} + \frac{1}{10^n})^2 < 2$.

Vastaavalla päättelyllä voidaan näyttää seuraava: Jos $\frac{a}{b}$ on mikä tahansa positiivinen rationaaliluku, jolle $(\frac{a}{b})^2 > 2$, on olemassa toinen, pienempi rationaaliluku $\frac{a}{b} - \frac{1}{10^n}$, jolle $(\frac{a}{b} - \frac{1}{10^n})^2 > 2$.

Siis niiden positiivisten rationaalilukujen $\frac{a}{b}$ joukossa A, joille $(\frac{a}{b})^2 < 2$, ei ole suurinta alkiota, ja niiden positiivisten rationaalilukujen $\frac{a}{b}$ joukossa B, joille $(\frac{a}{b})^2 > 2$, ei ole pienintä alkiota.

Edellisestä vedämme seuraavan, jatkon kannalta olennaisen johtopäätöksen: Ei ole olemassa pienintä rationaalilukua $\frac{a}{b}$, joka olisi vähintään niin suuri kuin kaikki A:n alkiot, eikä ole olemassa suurinta rationaalilukua $\frac{a}{b}$, joka olisi korkeintaan niin pieni kuin kaikki B:n alkiot.

Joukkojen A ja B välissä on siis aukko, johon $\sqrt{2}$ kuuluisi. Seuraavassa luvussa esitämme periaatteen, jolla kaikki tällaiset aukot voidaan tilkitä.

Kuinka reaaliluvut saadaan aikaan?

Tässä luvussa esitämme vihdoin sen periaatteen, joka tuottaa kaikki reaaliluvut. Aloitamme kuitenkin parilla määritelmällä.

Olkoon A epätyhjä joukko rationaalilukuja. Sanomme, että A on ylhäältä rajoitettu rationaalilukujen joukossa, jos on olemassa rationaaliluku q, jolle $a \leq q$ kaikilla joukon A alkioilla a.

Olkoon A epätyhjä joukko rationaalilukuja. Sanomme, että reaaliluku r on joukon A yläraja, jos kaikilla joukon A alkioilla a pätee $a \leq r$. Sanomme, että reaaliluku r' on joukon A pienin yläraja eli *supremum*, jos seuraavat kaksi ehtoa pätevät

- r' on joukon A yläraja.
- Jos reaaliluku r'' on joukon A yläraja, niin $r' \leq r''$.

Nyt kaikki reaaliluvut saadaan tuotettua seuraavalla periaatteella:

[1] Ja sitä se onkin; tämä voidaan jopa todistaa.

Periaate 1. *Jos A on epätyhjä joukko rationaalilukuja, joka on ylhäältä rajoitettu rationaalilukujen joukossa, niin on olemassa reaaliluku r, joka on joukon A pienin yläraja.*

Tutkitaan vielä Pekan tilannetta. Hän siis tarvitsee reaaliluvut $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{\frac{1}{3}}$. Määritellään joukko A_0 niin, että se on niiden positiivisten rationaalilukujen a joukko, joille $a^2 < 2$. Nyt $\sqrt{2}$ saadaan joukon A_0 pienimpänä ylärajana. Vastaavasti, jos A_1 on niiden positiivisten rationaalilukujen a joukko, joille $a^2 < \frac{1}{3}$, niin $\sqrt{\frac{1}{3}}$ saadaan joukon A_1 pienimpänä ylärajana.

Toivon, että tässä vaiheessa lukijasta ei tunnu siltä, että ammumme tykillä kärpästä. Olemme kunnolla perustelleet ainoastaan kahden reaaliluvun $\sqrt{2}$:n ja $\sqrt{\frac{1}{3}}$:n tarpeen, mutta Periaate 1 tuottaa reaalilukuja vaikka millä mitalla. Kuitenkin kaikki näin syntyvät reaaliluvut tarvitaan, jotta saadaan kehitettyä kunnollinen jatkuvaa muutosta kuvaava teoria.

Desimaalikehitelmät

Lukija on saattanut törmätä reaalilukujen luonnehdintaan desimaalikehitelminä, jotka mahdollisesti ovat päättymättömiä. Tässä luvussa selitämme, miksi tämä reaalilukujen luonnehdinta tuottaa saman tuloksen kuin Periaate 1. Käsittelemme vain ei-negatiivisia lukuja. Negatiiviset luvut voidaan käsitellä samantapaisella menetelmällä.

Olkoon $a{,}a_1a_2a_3\ldots$ desimaalikehitelmä, missä a on kokonaisosa ja $a_1, a_2, a_3, \ldots$ desimaalit. Muodostetaan rationaalilukujoukko A, jonka jäsenet ovat seuraavat rationaaliluvut, joita on mahdollisesti äärettömän monta

$$a{,}a_1$$
$$a{,}a_1a_2$$
$$a{,}a_1a_2a_3$$
$$\vdots$$

Nyt joukko A nähdään helposti ylhäältä rajoitetuksi, ja sen pienin yläraja on juuri reaaliluku, jonka desimaalikehitelmä on $a{,}a_1a_2a_3\ldots$.

Kääntäen, olkoon x reaaliluku, joka on rationaalilukujoukon A pienin yläraja. Muodostetaan rationaalilukujoukko A' siten, että $a \in A'$, jos on olemassa $b \in A$, jolle $b \geq a$. Nyt x on joukon A' pienin yläraja. Olkoon a suurin kokonaisluku, joka kuuluu joukkoon A'. Olkoon $a{,}a_1$ suurin yksidesimaalinen desimaalikehitelmä, joka kuuluu joukkoon A'. Olkoon $a{,}a_1a_2$ suurin kaksidesimaalinen desimaalikehitelmä, joka kuuluu joukkoon A'. Tässä siis tosiaan luku a on sama kuin luvun $a{,}a_1$ kokonaisosa, ja luvun $a{,}a_1a_2$ kokonaisosa ja ensimmäinen desimaali ovat samat kuin luvulla $a{,}a_1$. Jatkamalla prosessia saadaan aikaan kaikki x:n desimaalit.

Reaalilukujen ominaisuuksia

Olkoon A joukko reaalilukuja. Määritellään A:n yläraja ja pienin yläraja (eli *supremum*), samoin ylhäältä rajoitettuus samoin kuin teimme sen rationaalilukujoukoille. Sen avulla, että Periaate 1 tuottaa kaikki reaaliluvut, voidaan todistaa seuraava teoreema:

Teoreema 2. *Olkoon A epätyhjä, ylhäältä rajoitettu joukko reaalilukuja. Tällöin on olemassa reaaliluku r, joka on joukon A pienin yläraja.*

Tämän teoreeman todistus jätetään harjoitustehtäväksi. Todistusstrategia on selitetty luvussa Pähkinöitä.

Periaatteella 1 tuotetut reaaliluvut auttavat myös Pekan pälkähästä sekä moniin muihin samankaltaisiin tilanteisiin. Voidaan nimittäin todistaa seuraavaksi esitettävät teoreemat. Annamme teoreemoille perustelut, jotka kenties saavat ne tuntumaan uskottavilta. Jos perustelut aiheuttavat lukijalle hahmotusvaikeuksia, kuvien piirtäminen auttaa. Lukijan kannattaa huomata, että perustelumme eivät ole matemaattisia todistuksia.

Teoreema 3. *Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Olkoon $a < b$ kaksi reaalilukua ja c reaaliluku, joka on lukujen $f(a)$ ja $f(b)$ välissä. Tällöin on olemassa reaaliluku y, $a \leq y \leq b$, jolle $f(y) = c$.*

Perustelu: Oletetaan $f(a) \leq f(b)$. Olkoon A niiden reaalilukujen z joukko, jotka ovat vähintään yhtäsuuria kuin a ja korkeintaan yhtäsuuria kuin b, ja joille $f(z) \leq c$. Nyt luku y saadaan joukon A pienimpänä ylärajana.

Jos $f(a) > f(b)$, muodostetaan $g(x) = -f(x), c' = -c$ ja sovelletaan edellisen kappaleen tulosta olioille g, c', a, b.

Teoreema 4. *Olkoon $a < b$ reaalilukuja ja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Tällöin on olemassa $x \in [a,b]$ siten, että funktio f saa pisteessä x suurimman arvonsa.*

Perustelu: Olkoon c funktion f kuvajoukon supremum. Tässä vaiheessa emme vielä tiedä, että kuvajoukko on ylhäältä rajoitettu. Asetetaan ylhäältä rajoittamattoman osajoukon supremumiksi ∞, eli jos kuvajoukko on rajoittamaton, $c = \infty$.

Valitaan $a_0 = a$ ja $b_0 = b$.

Olkoon x_0 välin $[a_0, b_0]$ keskipiste. Tutkitaan välejä $[a_0, x_0]$ ja $[x_0, b_0]$. Vähintään toisen näistä väleistä kuvajoukon supremum on c. Valitaan a_1:ksi ja b_1:ksi tämän välin päätepisteet, $a_1 < b_1$. (Jos edellä kummankin välin kuvajoukon supremum on c, valitaan vain toinen näistä väleistä.)

Olkoon x_1 välin $[a_1, b_1]$ keskipiste. Tutkitaan välejä $[a_1, x_1]$ ja $[x_1, b_1]$. Vähintään toisen näistä väleistä kuvajoukon supremum on c. Valitaan a_2:ksi ja b_2:ksi tämän välin päätepisteet, $a_2 < b_2$. (Jos edellä kummankin välin kuvajoukon supremum on c, valitaan vain toinen näistä väleistä.)

Jatkamalla prosessia äärettömiin, saadaan ääretön kasvava jono $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ja ääretön vähenevä jono $b_0, b_1, b_2, \ldots$. Lisäksi välin $[a_i, b_i]$ pituus lähenee nollaa, kun $i \to \infty$. Valitaan x:ksi joukon $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ supremum, joka sijaitsee jokaisella välillä $[a_i, b_i]$, $i \in \mathbb{N}$. Nyt $f(x) = c$, ja koska f saa arvon c, $c \neq \infty$.

Tarkat todistukset käydään yleensä läpi ensimmäisillä yliopiston matematiikan kursseilla.

Pähkinöitä

Kaikissa pähkinöissä saat käyttää vapaasti kaikkia tässä kirjoitelmassa mainittuja tuloksia sekä muita tuntemiasi matematiikan tuloksia.

1. Olkoon A neliö, jonka sivun pituus on 1. Laske A:n lävistäjän pituus ja totea, että rationaaliluvut eivät ole riittäviä edes yksinkertaisen geometrian tekemiseen.
2. Osoita, että $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ei ole rationaaliluku.
3. Olkoon A joukko reaalilukuja. Sanomme, että $x \in \mathbb{R}$ on joukon A alaraja, jos $x \leq a$ kaikilla $a \in A$. Sanomme, että A on alhaalta rajoitettu, jos sillä on alaraja. Olkoon A epätyhjä, alhaalta rajoitettu joukko reaalilukuja. Osoita, että joukolla A on suurin alaraja.
4. Luvussa Desimaalikehitelmät konstruoitiin joukko A'. Osoita, että seuraava pätee: Jos $a \in A'$, ja r on mikä tahansa rationaaliluku, jolle $r < a$, niin $r \in A'$.
5. Kappaleessa Desimaalikehitelmät konstruoitiin desimaalikehitelmä joukon A ylärajalle. Konstruktiossa oletettiin perustelematta seuraava: Jos a on n ensimmäistä desimaalia sisältävä konstruktion vaihe ja b on $n+1$ ensimmäistä desimaalia sisältävä konstruktion vaihe, niin b:n n ensimmäistä desimaalia ovat samat kuin a:n n ensimmäistä desimaalia. Todista kyseinen väite.
6. Olkoon q rationaaliluku ja A niiden rationaalilukujen joukko, jotka ovat korkeintaan yhtäsuuria kuin q. Osoita, että q on joukon A pienin yläraja.
7. Todista Teoreema 2. Sinun kannattaa seurata seuraavaa strategiaa:
   (a) Todista, että jos r_0, r_1 ovat reaalilukuja, $r_0 < r_1$, niin on olemassa rationaaliluku q, jolle $r_0 < q \leq r_1$. Tässä kannattaa käyttää hyväksi sitä, että Periaate 1 tuottaa *kaikki* reaaliluvut.
   (b) Todista, että jos A on ylhäältä rajoitettu joukko reaalilukuja, on olemassa rationaaliluku q, joka on joukon A yläraja. Tässä voit käyttää hyväksi sitä, että Periaate 1 tuottaa *kaikki* reaaliluvut.
   (c) Olkoon A ylhäältä rajoitettu joukko reaalilukuja. Muodosta niiden rationaalilukujen q joukko B, joille on olemassa $a \in A$, jolle $q \leq a$. Päättele käyttäen edellistä pykälää, että B:llä on yläraja, joka on rationaaliluku.
   (d) Olkoon A ja B kuten edellisessä pykälässä. Olkoon q joukon B yläraja. Osoita, että q on joukon A yläraja. Käytä hyväksi pykälää a.
   (e) Olkoon A ja B kuten edellisessä pykälässä. Olkoon q joukon B pienin yläraja (tällainen on olemassa pykälän c ja Periaatteen 1 nojalla). Osoita, että q on joukon A pienin yläraja.
8. Tämä tehtävä koostuu kolmesta kohdasta.
   (a) Olkoon A niiden rationaalilukujen joukko, jotka ovat pienempiä kuin 1, ja x joukon A pienin yläraja. Sovella luvussa Desimaalikehitelmät mainittua menetelmää ja konstruoi luvulle x desimaalikehitelmä.
   (b) Olkoon B niiden rationaalilukujen joukko, jotka ovat korkeintaan yhtäsuuria kuin 1, ja y joukon B pienin yläraja. Sovella luvussa Desimaalikehitelmät mainittua menetelmää ja konstruoi luvulle y desimaalikehitelmä.
   (c) Osoita, että edellä $x = y$. Strategia: Tee vastaoletus $x \neq y$ ja päättele $x < y$. Osoita, että lukujen x ja y keskiarvolle k (joka on reaaliluku, voit olettaa tämän tunnetuksi) pätee $x < k < y$. Käytä edellisen tehtävän pykälää a ja päättele, että on olemassa rationaaliluku q, jolle $x < q \leq k$, ja johda tästä ristiriita.

Viitteet

[1] Täydellisyysaksiooma, `http://solmu.math.helsinki.fi/cgi-bin/yabb2/YaBB.pl?num=1209209108/0#0`