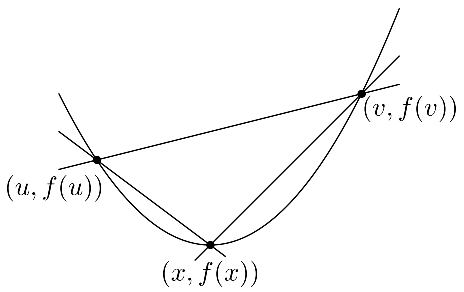
Karamatan epäyhtälö

Markku Halmetoja
Mäntän lukio

Kirjoituksessa [2] perehdyttiin funktion konveksisuuteen ja tätä teemaa jatketaan nyt tutustumalla *Karamatan*[1] *epäyhtälöön* ja sen sovelluksiin. Lukijan mukavuutta ajatellen kertaamme aluksi konveksien funktioiden ominaisuuksia. Välillä I määritelty funktio f on konveksi, jos kaikilla $x, y \in I$ ja $\lambda \in]0,1[$

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \qquad (1)$$

Funktio f on aidosti konveksi, jos epäyhtälössä (1) yhtäsuuruus toteutuu ainoastaan silloin kun $x = y$. Konveksin funktion kuvaaja on alaspäin kupera. Voidaan todistaa, että funktio f on konveksi, jos ja vain jos



kaikilla $u, x, v \in I$, $u < x < v$, kuvioon piirrettyjen sekanttien kulmakertoimet toteuttavat kaksoisepäyhtälön

$$\frac{f(x)-f(u)}{x-u} \leq \frac{f(v)-f(u)}{v-u} \leq \frac{f(v)-f(x)}{v-x}. \qquad (2)$$

Jos ja vain jos yhtäsuuruudet eivät ole voimassa tässä epäyhtälöketjussa, niin f on aidosti konveksi. Toisen derivaatan positiivisuus on välttämätön ja riittävä ehto kahdesti derivoituvan funktion aidolle konveksisuudelle.

Karamatan epäyhtälö on kirjoituksessa [2] nähdyn Jensenin[2] epäyhtälön tavoin yleisepäyhtälö, jonka avulla voidaan todistaa monia muita epäyhtälöitä. Jensenin ja Karamatan epäyhtälöitä soveltaen lukiolainenkin voi periaatteessa johtaa uusia epäyhtälöitä tai löytää uusia todistuksia tunnetuille epäyhtälöille: on vain löydettävä konveksi funktio, jota kukaan ei ole ennen tullut ajatelleeksi näiden epäyhtälöiden yhteydessä. Karamatan epäyhtälön todistamiseksi tarvitsemme majoroinniksi kutsuttua $\mathbb{R}^n$:n vektorien välistä relaatiota. Vektoreista ei tarvitse tietää muuta kuin se, mitä ne ovat. Jos kuitenkin $\mathbb{R}^n$ tuntuu vieraalta, niin lukija voi silmäillä kirjoitusta [1]. Perehdymme aluksi majorointiin, minkä jälkeen todistamme Karamatan epäyhtälön ja lopuksi sovellamme sitä muutamissa esimerkkitapauksissa.

Majoroinnista

Olkoon $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $x_{[\imath]}$ tämän vektorin $\imath$:nneksi suurin koordinaatti. Siis

$$x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq \ldots \geq x_{[n-1]} \geq x_{[n]}.$$

[1] Jovan Karamata (1902–1967), serbialainen matemaatikko.
[2] Johan Jensen (1859–1925), tanskalainen matemaatikko.

Sanomme, että vektori $\boldsymbol{x}$ *majoroi* vektoria $\boldsymbol{y}$, jos

$$\begin{aligned}x_{[1]} &\geq y_{[1]},\\ x_{[1]}+x_{[2]} &\geq y_{[1]}+y_{[2]},\\ &\vdots\\ x_{[1]}+\ldots+x_{[n-1]} &\geq y_{[1]}+\ldots+y_{[n-1]},\\ x_{[1]}+\ldots+x_{[n]} &= y_{[1]}+\ldots+y_{[n]}.\end{aligned}$$

Jos $\boldsymbol{x}$ majoroi $\boldsymbol{y}$:n, niin merkitsemme $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$ tai $\boldsymbol{y} \prec \boldsymbol{x}$. Selvästi

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{x},\\ &\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{x} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y},\\ &\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{z} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{z}\end{aligned}$$

kaikilla $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$. Jos $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$ ja $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, niin $\boldsymbol{x}$ *majoroi aidosti* $\boldsymbol{y}$:n.

Esim. 1 Jos $\boldsymbol{x} = (0,3,0)$, $\boldsymbol{y} = (1,0,2)$ ja $\boldsymbol{z} = (1,1,1)$, niin $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{z}$, sillä

$$3 \geq 2, \quad 3+0 \geq 2+1 \quad \text{ja} \quad 3+0+0 = 2+1+0$$

ja

$$2 \geq 1, \quad 2+1 \geq 1+1 \quad \text{ja} \quad 2+1+0 = 1+1+1.$$

Esim. 2 Jos n on positiivinen kokonaisluku, niin

$$\begin{aligned}(1,0,\ldots,0) &\succ (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0,0,\ldots,0)\\ &\succ (\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},0,\ldots,0)\\ &\succ \vdots\\ &\succ (\tfrac{1}{n},\tfrac{1}{n},\ldots,\tfrac{1}{n}).\end{aligned}$$

Esim. 3 Jos $\bar{x}$ on vektorin $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ koordinaattien aritmeettinen keskiarvo, niin

$$\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n) \succ (\bar{x},\bar{x},\ldots,\bar{x}) = \bar{\boldsymbol{x}}.$$

Karamatan epäyhtälö

Seuraavassa lauseessa muotoillaan ja todistetaan Karamatan epäyhtälö. Todistus seuraa lähteessä [3, s. 33-34] annettua.

Lause 1 (Karamatan epäyhtälö) Olkoot $\boldsymbol{a} = (a_\imath)_{\imath=1}^n$ ja $\boldsymbol{b} = (b_\imath)_{\imath=1}^n$, missä $a_\imath, b_\imath \in \,]\alpha,\beta[$ kaikilla $\imath = 1,2,\ldots,n$. Olkoon $f\colon]\alpha,\beta[\mapsto \mathbb{R}$ konveksi funktio. Jos $\boldsymbol{a} \succ \boldsymbol{b}$, niin

$$\sum_{\imath=1}^n f(a_\imath) \geq \sum_{\imath=1}^n f(b_\imath). \tag{3}$$

Jos f on aidosti konveksi, niin yhtäsuuruus voimassa, jos ja vain jos $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

Todistus Epäyhtälö on selvästi voimassa, jos $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. Jos jollakin $\imath$:n arvolla $a_\imath = b_\imath$, voidaan termit $f(a_\imath)$ ja $f(b_\imath)$ jättää huomioimatta. Voimme siis olettaa, että $a_\imath \neq b_\imath$ kaikilla $\imath$:n arvoilla. Edelleen, koska epäyhtälö (3) on riippumaton vektorien $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ koordinaattien järjestyksestä, voimme rajoituksetta olettaa, että $a_1 \geq \ldots \geq a_n$ ja $b_1 \geq \ldots \geq b_n$. Koska f on konveksi, on erotusosamääristä

$$\frac{f(a_\imath)-f(b_\imath)}{a_\imath - b_\imath} = c_\imath$$

muodostuva jono $(c_\imath)_{\imath=1}^n$ kaksoisepäyhtälön (2) perusteella vähenevä. Aktiivinen lukija selvittänee tämän väitteen yksityiskohtaisesti. Merkitään

$$A_k = \sum_{\imath=1}^k a_\imath \quad \text{ja} \quad B_k = \sum_{\imath=1}^k b_\imath$$

kaikilla $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, ja sovitaan, että

$$A_0 = B_0 = 0.$$

Koska $\boldsymbol{a} \succ \boldsymbol{b}$, on $A_n = B_n$ ja $A_\imath \geq B_\imath$ kaikilla $\imath \in \{1,\ldots,n\}$. Saamme

$$\begin{aligned}\sum_{\imath=1}^n f(a_\imath) - \sum_{\imath=1}^n f(b_\imath) &= \sum_{\imath=1}^n (f(a_\imath)-f(b_\imath))\\ &= \sum_{\imath=1}^n c_\imath(a_\imath - b_\imath)\\ &= \sum_{\imath=1}^n c_\imath(A_\imath - A_{\imath-1} - B_\imath + B_{\imath-1})\\ &= \sum_{\imath=1}^n c_\imath(A_\imath - B_\imath) - \sum_{\imath=1}^n c_\imath(A_{\imath-1} - B_{\imath-1})\\ &= \sum_{\imath=1}^{n-1} c_\imath(A_\imath - B_\imath) - \sum_{\imath=0}^{n-1} c_{\imath+1}(A_\imath - B_\imath)\\ &= \sum_{\imath=1}^{n-1} c_\imath(A_\imath - B_\imath) - \sum_{\imath=1}^{n-1} c_{\imath+1}(A_\imath - B_\imath)\\ &= \sum_{\imath=1}^{n-1} (c_\imath - c_{\imath+1})(A_\imath - B_\imath) \geq 0,\end{aligned} \tag{4}$$

mistä (3) seuraa. Koska $a_\imath \neq b_\imath$ kaikilla $\imath \in \{1,\ldots,n\}$, on $A_\imath > B_\imath$ vähintään yhdellä $\imath$:n arvolla, ja jos f on aidosti konveksi, niin jono $(c_\imath)_{\imath=1}^n$ on aidosti vähenevä. Summassa (4) on tällöin vähintään yksi positiivinen termi, joten tämä summa on positiivinen, koska kaikki termit ovat ei-negatiivisia. Yhtäsuuruusehto seuraa tästä.

Huomautus Jos konveksi funktio f on kasvava, niin lauseen ehto $\boldsymbol{a} \succ \boldsymbol{b}$ voidaan lieventää muotoon

$$\sum_{\imath=1}^k a_\imath \geq \sum_{\imath=1}^k b_\imath \quad \text{kaikilla} \quad k = 1,2,\ldots,n,$$

sillä erotusosamäärät $c_\imath$, erityisesti c_n, ovat ei-negatiivisia (ks. todistuksen yhtälöketju). Yhtäsuuruusehto säilyy samana.

Sovelluksia

Aloitamme sovellukset näyttämällä, miten Karamatan epäyhtälön avulla voi laatia tehtäviä. Näimme edellä (esim. 2), että jos $n \in \mathbb{Z}_+$, niin

$$(1, 0, 0, \ldots, 0) \succ (\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}, \ldots, \tfrac{1}{n}),$$

ja tiedämme, että jos $a > 1$, niin eksponenttifunktio $f(x) = a^x$ on aidosti konveksi. Karamatan epäyhtälön premissit ovat siis voimassa. Saamme

$$a^1 + a^0 + \ldots + a^0 \geq a^{\frac{1}{n}} + a^{\frac{1}{n}} + \ldots + a^{\frac{1}{n}},$$

mikä sievenee muotoon

$$a - 1 \geq n\bigl(a^{\frac{1}{n}} - 1\bigr). \tag{5}$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $n = 1$. Sijoittamalla a:n paikalle luvut 2, e ja $1 + \frac{1}{n}$, saadaan sopivasti sievennellen tehtävä:

Osoita, että jos $n \in \mathbb{Z}$ ja $n \geq 2$, niin

a) $\displaystyle\Bigl(1 + \frac{1}{n}\Bigr)^n > 2,$

b) $\displaystyle\frac{\mathrm{e} - 1}{n} > \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1,$

c) $\displaystyle n + \frac{1}{n} > n\Bigl(1 + \frac{1}{n}\Bigr)^{\frac{1}{n}}.$

Väitteet **a)** ja **c)** todistuvat lukiomatematiikalla, sillä ne seuraavat triviaalisti binomiteoreemasta. Väite **b)** seuraa helposti e-kantaisen eksponenttifunktion sarjakehitelmästä, joka tosin ei kuulu lukion oppimäärään mutta lienee tuttu monelle matematiikkaa harrastavalle lukiolaiselle.

Kadelburg [4] kirjoittaa matematiikkaolympialaisten epäyhtälötehtävistä, että niiden laatijat luultavasti käyttävät mm. Karamatan epäyhtälöä tehtäviä konstruoidessaan ja keksivät elementaariset, puhtaasti koulumatematiikkaan perustuvat ratkaisut myöhemmin. On selvää, että tehtävää ei voi käyttää kilpailussa, ellei alkeismatematiikkaan perustuvaa ratkaisua ole näköpiirissä. Alkeellisen ratkaisun löytäminen edellyttää usein huomattavaa nokkeluutta ja rajoitettu ratkaisuaika lisää vielä suorituksen vaativuutta. Luultavasti ainakin joidenkin matematiikkaolympialaisiin osallistuvien maiden kansallisissa valmennustiimeissä opitaan myös Karamatan epäyhtälö tavanomaisempien menetelmien lisäksi, sillä sitä voi luonnollisesti käyttää myös ratkaisemiseen. Seuraavana esimerkkinä on Jugoslavian olympiajoukkueen karsintatehtävä [3, s. 41-42] vuodelta 1969.

Esim. 4 Todista: Jos reaaliluvuille $a_\imath$ ja $b_\imath$ on

$$\begin{aligned}
&a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n > 0,\\
&b_1 \geq a_1,\\
&b_1 b_2 \geq a_1 a_2,\\
&\vdots\\
&b_1 b_2 \ldots b_n \geq a_1 a_2 \ldots a_n,
\end{aligned}$$

niin

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n \geq a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Lukujen logaritmit toteuttavat ehdon

$$\sum_{\imath=1}^{k} \ln a_\imath \leq \sum_{\imath=1}^{k} \ln b_\imath$$

kaikilla $k = 1, 2, \ldots, n$, joten väite seuraa välittömästi siitä, että funktio $f(x) = \mathrm{e}^x$ on konveksi ja kasvava.

Esim. 5 [3, s. 35] Todista: Jos $a, b, c > 0$, niin

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

ja

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \geq \sqrt{2a} + \sqrt{2b} + \sqrt{2c}.$$

Molemmissa epäyhtälöissä vallitsee yhtäsuuruus, jos ja vain jos $a = b = c$.

Epäyhtälöt ovat symmetrisiä muuttujien suhteen, joten voimme rajoituksetta olettaa, että $a \geq b \geq c$. Tällöin

$$(a+b, b+c, c+a) \prec (2a, 2b, 2c).$$

Väitökset seuraavat Karamatan epäyhtälöstä soveltamalla sitä aidosti konvekseihin funktioihin $f(x) = x^{-1}$, $x > 0$, ja $g(x) = -\sqrt{x}$. Aktiivinen lukija voi miettiä, miten nämä epäyhtälöt yleistyvät mielivaltaiselle määrälle positiivisia lukuja.

Esim. 6 Karamatan epäyhtälön avulla saadaan yksinkertainen todistus aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon väliselle epäyhtälölle eli $\mathcal{AG}$-epäyhtälölle. Olkoon $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ ja $\mathcal{A}$ niiden aritmeettinen keskiarvo. Tällöin

$$(\mathcal{A}, \mathcal{A}, \ldots, \mathcal{A}) \prec (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Funktio $g(t) = -\ln t$, $t > 0$, on aidosti konveksi, sillä $g''(t) = t^{-2} > 0$. Karamatan epäyhtälöä soveltaen saadaan

$$-\ln\mathcal{A} - \ln\mathcal{A} - \ldots - \ln\mathcal{A} \leq -\ln x_1 - \ln x_2 - \ldots - \ln x_n,$$

mikä sievenee muotoon

$$n \ln\mathcal{A} \geq \ln\,(x_1 x_2 \ldots x_n),$$

ja edelleen

$$\ln \mathcal{A} \geq \tfrac{1}{n} \ln (x_1 x_2 \ldots x_n) = \ln \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = \ln \mathcal{G},$$

mistä väite seuraa. Yhtäsuuruusehto seuraa funktion g aidosta konveksisuudesta.

Esim. 7 [3, s. 42] Todistettava: Jos $a, b, c > 0$, niin

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc. \qquad (6)$$

Epäyhtälö on symmetrinen muuttujien suhteen, joten voimme rajoituksetta olettaa, että $a \geq b \geq c > 0$. Tällöin epäyhtälön (6) vasemman puolen tekijöiden suuruusjärjestys on

$$a+b-c \geq a+c-b \geq b+c-a,$$

ja ainoastaan pienin näistä luvuista voi olla ei-positiivinen. Jos $b+c-a \leq 0$, niin (6) on voimassa koska $abc > 0$. Voimme siis olettaa, että $b+c-a > 0$. Selvästi

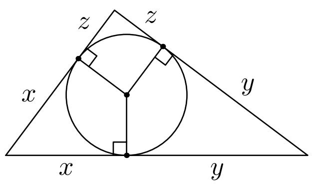
$$\begin{aligned} a+b-c &\geq a \\ (a+b-c)+(a+c-b) &\geq a+b \\ (a+b-c)+(a+c-b)+(b+c-a) &= a+b+c \end{aligned}$$

eli $(a+b-c, a+c-b, b+c-a) \succ (a,b,c)$. Funktio $g(x) = -\ln x$ on aidosti konveksi, joten Karamatan epäyhtälöä soveltaen saadaan

$$\begin{aligned} -\ln(a+b-c) - \ln(b+c-a) - \ln(c+b-a) \geq \\ -\ln a - \ln b - \ln c, \end{aligned}$$

mistä väite seuraa. (Epäyhtälö (6) on voimassa myös ehdolla $a, b, c \geq 0$, sillä jos esimerkiksi $c = 0$, niin sen vasen puoli pelkistyy muotoon $-(a+b)(a-b)^2$ ja oikea puoli on 0.)

Epäyhtälöllä (6) on mielenkiintoinen sovellus kolmioihin. Kolmion sisään piirretty ympyrä sivutkoon kolmion sivuja a, b, c pisteissä, jotka jakavat ne kuvion



osoittamalla tavalla osiin

$$a = x+y, \quad b = y+z \quad \text{ja} \quad c = z+x.$$

Näistä yhtälöistä seuraa

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(a+c-b)\,(>0), \\ y &= \frac{1}{2}(a+b-c)\,(>0), \\ z &= \frac{1}{2}(b+c-a)\,(>0). \end{aligned}$$

Kertomalla keskenään $\mathcal{AG}$-epäyhtälöt

$$2\sqrt{xy} \leq x+y, \quad 2\sqrt{yz} \leq y+z, \quad 2\sqrt{zx} \leq z+x$$

saadaan

$$8xyz \leq (x+y)(y+z)(z+x),$$

mikä on sama kuin esimerkissä 7 yleisemmillä edellytyksillä todistamamme epäyhtälö (6). Heronin kaavan mukaan kolmion pinta-alan Δ neliö

$$\Delta^2 = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

missä $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, ja koska (6) on voimassa, on

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= \frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \\ &\leq \frac{1}{16} abc(a+b+c). \qquad (7) \end{aligned}$$

Saatu arvio on tarkempi kuin näissä yhteyksissä yleensä esitetty

$$\Delta^2 \leq \frac{p^4}{27} = \frac{(a+b+c)^4}{432}, \qquad (8)$$

sillä $\mathcal{AG}$-epäyhtälön perusteella

$$abc \leq \frac{1}{27}(a+b+c)^3,$$

joten

$$\frac{1}{16} abc(a+b+c) \leq \frac{1}{16 \cdot 27}(a+b+c)^4 = \frac{1}{432}(a+b+c)^4.$$

Arvio (8) perustuu pelkästään kolmion piirin pituuteen, kun taas arviossa (7) tarvitaan piirin lisäksi tieto kolmion sivujen pituuksien tulosta. Molemmissa arvioissa yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos kolmio on tasasivuinen.

Karamatan epäyhtälön avulla voidaan relaatiota

$$(a+b-c, a+c-b, b+c-a) \succ (a,b,c)$$

hyödyntäen todistaa äärettömän monta kolmion sivujen välistä epäyhtälöä. Jos näet f on aidosti konveksi funktio, niin

$$f(a+b-c) + f(a+c-b) + f(b+c-a) \geq f(a) + f(b) + f(c).$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $a = b = c$. Esimerkiksi, jos $n\,(\geq 2)$ on kokonaisluku, niin positiivisille luvuille määritelty funktio $f(x) = x^{-n}$ ja ei-negatiivisille luvuille määritelty funktio $g(x) = -\sqrt[n]{x}$ ovat aidosti konvekseja, joten

$$(a+b-c)^{-n} + (a+c-b)^{-n} + (b+c-a)^{-n} \geq a^{-n} + b^{-n} + c^{-n}$$

ja

$$\sqrt[n]{a+b-c} + \sqrt[n]{a+c-b} + \sqrt[n]{b+c-a} \leq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}.$$

Lähteessä [4, s. 101] mainitaan, että vuonna 1996 Aasian ja Tyynenmeren alueen olympialaisissa oli tehtävänä todistaa tämä g-funktiosta saatava epäyhtälö tapauksessa $n = 2$, mikä siis Karamatan epäyhtälön avulla todistuu vaivatta. Elementaarinen todistus on työläämpi.

Esim. 8 [3, s. 44] Vuoden 2000 matematiikkaolympialaisissa oli tehtävänä todistaa epäyhtälö

$$\Big(x-1+\frac{1}{y}\Big)\Big(y-1+\frac{1}{z}\Big)\Big(z-1+\frac{1}{x}\Big) \le 1, \qquad (9)$$

kun $x, y, z > 0$ ja $xyz = 1$. Annetuista ehdoista seuraa, että on olemassa positiiviset luvut a, b, c siten, että

$$x = \frac{a}{b}, \quad y = \frac{b}{c}, \quad z = \frac{c}{a}.$$

Sijoittamalla nämä epäyhtälöön (9) saadaan yhtäpitävästi

$$\Big(\frac{a}{b}-1+\frac{c}{b}\Big)\Big(\frac{b}{c}-1+\frac{a}{c}\Big)\Big(\frac{c}{a}-1+\frac{b}{a}\Big) \le 1,$$

mikä positiivisella luvulla abc kertoen pelkistyy esimerkissä 7 olevaksi epäyhtälöksi.

Myös seuraava Jensenin epäyhtälön erikoistapaus todistuu helposti.

Esim. 9 Olkoon f välillä I määritelty konveksi funktio ja $x_1, \ldots, x_n \in I$. Olkoon edelleen $\bar{x}$ lukujen $x_\imath$ aritmeettinen keskiarvo. Koska

$$(\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x}) \prec (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

seuraa Karamatan epäyhtälöstä

$$f(\bar{x}) + f(\bar{x}) + \ldots + f(\bar{x}) \le f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n),$$

mikä voidaan kirjoittaa muotoon

$$f(\bar{x}) = f\Big(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\Big) \le \frac{1}{n}f(x_1) + \ldots + \frac{1}{n}f(x_n).$$

Viimeisenä esimerkkinä todistamme *Petrovićin*[3] *epäyhtälön.* Kadelburg [3, s. 36–37] todistaa se suoraan konveksisuuden määritelmän avulla, mutta Karamatan epäyhtälöä käyttäen saadaan lyhyempi todistus ja pieni täydennyskin.

Lause 2 (Petrovićin epäyhtälö) Jos $x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0$ ja $f\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$ on konveksi funktio, niin

$$f(x_1) + \ldots + f(x_n) \le f(x_1 + \ldots + x_n) + (n-1)f(0).$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos f on enintään astetta 1 oleva polynomifunktio.

Todistus Koska luvut $x_\imath$ ovat ei-negatiivisia, on voimassa

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1 \text{ kpl}}) \succ (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Karamatan epäyhtälöstä seuraa

$$f(x_1+\ldots+x_n) + \underbrace{f(0) + \ldots + f(0)}_{n-1 \text{ kpl}} \ge f(x_1) + \ldots + f(x_n),$$

mikä sievenee todistettavaksi epäyhtälöksi. Yhtäsuuruusehto on ilmeinen.

Karamatan epäyhtälön tai esimerkissä 9 olevan epäyhtälön avulla saadaan summalle

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$$

myös alaraja. Jos $\bar{x}$ on lukujen $x_1, \ldots, x_n$ aritmeettinen keskiarvo, niin $(\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x}) \prec (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, joten

$$f(\bar{x}) + f(\bar{x}) + \ldots + f(\bar{x}) \le f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n).$$

Jos siis $x_1, \ldots, x_n \ge 0$ ja $f\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$ on konveksi, niin

$$nf(\bar{x}) \le \sum_{\imath=1}^{n} f(x_\imath) \le f(x_1 + \ldots + x_n) + (n-1)f(0).$$

Tapauksessa $f(x) = -\sqrt{x}$ saadaan epäyhtälöt

$$\sqrt{n}\sqrt{\frac{n+1}{2}} < \sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n} < n\sqrt{\frac{n+1}{2}}.$$

Tämä arvio on kuitenkin hyödytön, sillä triviaalissa arviossa

$$n < \sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n} < n\sqrt{n}$$

rajat ovat paremmat.

Kiitän emeritusprofessori Jorma Merikoskea kirjoitustani täsmentäneistä kommenteista.

Viitteet

[1] M. Halmetoja, Epäyhtälöistä, osa 1, Solmu 2/2010. `http://solmu.math.helsinki.fi/2010/2/epayhtaloista_osa1.pdf`

[2] M. Halmetoja, Epäyhtälöistä, osa 2, Solmu 3/2010. `http://solmu.math.helsinki.fi/2010/3/epayhtaloista_osa2.pdf`

[3] Z. Kadelburg, D. Đusić, M. Lukić, I. Matić, Inequalities of Karamata, Schur and Muirhead and some applications, *Teaching Math.* 8 (2005), 31–45.

[4] Z. Kadelburg, Some classical inequalities and their applications to olympiad problems, *Teaching Math.* 14 (2011), 97–106.

[3] Mihailo Petrović (1868–1943), serbialainen matemaatikko.