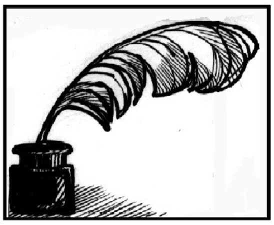


Affiini kombinaatio ja riippuvuus: Affmenin arvoitus

Noora Karvinen

Tämän kirjoituksen tarkoitus on kertoa affiineista kombinaatioista ja riippuvuudesta mielenkiintoisella ja uudella tavalla. Lineaarialgebran perusteet kerrataan, mutta lisätietoja löytyy teoksista [1] ja [3]. Kirjoitus on muokattu kandidaatin tutkielmastani [2].

Olipa kerran pieni, mutta hyvin onnellinen kuningaskunta nimeltä Matikkylä. Kuningasperhe oli hyvin rakastavainen ja oikeamielinen alaisilleen. Kylässä vallitsi rauha.

Eräänä kauniina päivänä koko kuningaskunta joutui suuren murheen valtaan, sillä kaikkien rakastama prinsessa Amanda katosi yllättäen. Huolestunut kuningas pyysi apuun salapoliisi Linunhon, joka saapui linnaan nuori salapoliisiharjoittelija Victor Lininto mukanaan.

- Päivää, arvon kuningas. Voisitteko ystävällisesti kertoa prinsessa Amandan liikkeistä ennen hänen katoamistaan? Linunho aloittaa.

- Voi kyllä. Tämä on vaan niin surullista, kuningas aloittaa melkein itkuun purskahtaen. Hän saa kuitenkin hillittyä itsensä ja jatkaa: - Amanda lähti aamulla kylälle, kuten monesti ennenkin. Hänellä on tapana poiketa tervehtimässä ystäviään keskustan kahvilassa, ja usein matkalla hän pysähtyy juttelemaan muidenkin kylän asukkaiden kanssa. Tällä kertaa hän ei kuitenkaan koskaan palannut takaisin.

- Oletteko huomanneet mitään muuta epätavallista? Linunho kysyy.

Kuningas ei ehdi vastata, kun kuningatar ryntää hysteerisenä itkien huoneeseen. Hän ei pysty puhumaan, mutta ojentaa Linunholle postissa tulleen kirjekuoren. Linunho avaa kuoren ja ottaa siellä olevan paperinpalan hansikkaat käsissään. Siinä lukee epäselvin kirjaimin: ”Kiitos kaunis kaunokaisestanne! Miljoonalla eurolla saatte hänet takaisin. - Affmen”

- Affmen! Aivan kuin affiinit aliavaruudet, Lininto huudahtaa innostuneena.

- Siis mitkä? kuningas kysyy hämmentyneenä.

- Kyse on siis aliavaruuksista, jotka on siirretty pois origosta. Näin ollen ne eivät ole oikeita aliavaruuksia, joten niitä kutsutaan affiineiksi aliavaruuksiksi, Lininto vastaa.

Linunho pyöräyttää silmiään ja kuiskaa kuninkaalle: - Tuo kaveri joutaisi yliopiston tutkimuslaitokselle homehtumaan noiden matemaattisten ongelmiensa kanssa, ja jatkaa sitten suuremmalla äänellä: - Menen toimistolleni ottamaan tästä sormenjälkinäytteet. Lisäksi toivoisin, arvon kuningatar, että tulisitte mukaani antamaan sormenjälkenne, jotta osaamme erottaa tämän kirjoittaneen jäljet teidän jäljistänne. Tuo Affmen yrittää kiristää teitä, hyvä kuningatar. Älkää kuitenkaan vielä maksako tuota huikaisevaa summaa, sillä teemme kaikkemme löytääksemme prinsessan. Lähdetään! Jos menemme kävellen, voimme samalla tervehtiä kyläläisiä ja kysellä heiltä tietoja prisessasta.

Matkalla he tapaavat vanhan rouvan, hullun tiedemiehen, papin, kampaamon rouvan vilkkaat kaksospojat, sairaanhoitajan sekä puusepän. Tiedemies ja pappi kutsuvat heidät kahville, mutta muita he jututtavat vain kadulla. Kaikki heistä olivat nähneet aamulla prinsessan yhtä hyväntuulisena kuin aina ennenkin, mutta eivät osaa sanoa mitään hänen katoamisestaan. He osaavat olla ainoastaan kauhuissaan katoamisesta ja yrittävät lohduttaa kuningatarta.

Ryhmän saavuttua vihdoin toimistolle, Lininto ottaa salaperäisenä lapun taskustaan ja sanoo: - Katsokaa, mitä löysin sen hullun tiedemiehen lattialta teidän keskustellessanne. Lapussa lukee: ”S: 1/-15, E: 1/3”. Voisikohan tämä olla salakirjoitusta?

- Vaikka se mies vähän hullu onkin, niin mukava ja ystävällinen kuitenkin. Voin toki ottaa tuostakin lapusta sormenjäljet, mutta sitä hullua en kyllä ensimmäisenä olisi epäilemässä. Ja salakirjoitusta muka, hah, Linunho vastaa ivallisella äänellä.

Seuraavana aamuna Lininto saapuu Linunhon toimistolle hyvin väsyneenä.

- Missäs bileissä olet oikein ollut, kun tuolta näytät? Ei muuten löytynyt sormenjälkiä siitä paperilapusta, paitsi kuningattaren jäljet, Linunho mumisee sanomalehtensä takaa.

- Tein töitä koko yön, Lininto vastaa ja jatkaa: - Uskoisin prinsessan löytyvän Karulasta.

- Töitä? Karulasta? Linunho kysyy ihmetellen.

- Kyllä. Jos sinulla on muutama tunti aikaa, niin voin selittää kaiken, Lininto sanoo innostuneena.

- No, jos kerran olet varma asiastasi, niin antaa tulla. Karulaan saakka en kyllä pelkän arvailun perusteella lähde tilannetta katsomaan, Linunho myöntyy.

- Okei. Sinäkin olet tainnut aikoinasi opiskella hieman vektoreita ja lineaarialgebraa? Lininto kysäisee. Linunho vastaa tylysti: - Olen kyllä, mutta jos aiot luennoida minulle niistä, lähden tästä kyllä mieluummin kyläläisiä haastattelemaan.

- No hei, meidän paras, tai no oikeastaan ainoa, johtolankamme on prinsessan kaapanneen ryhmän nimi: Affmen. Aluksi ajattelin, että ”Aff” viittaa Afganistaniin, mutta se ajatus ei johtanut mihinkään ratkaisuun. Sitten tajusin: ”Aff” viittaa selvästi affiineihin kombinaatioihin, ”men” miesjoukkoon. Siitä päättelin, että ryhmä koostuu miehistä, jotka käyttävät affiineita kombinaatioita apunaan. Illalla keksin, että luultavasti hullu tiedemies tietää eniten näistä asioista. Niinpä pimeän tullen hiivin salaa hänen pihaansa. Kurkistelin hänen ikkunoistaan ja näin yhdessä huoneessa erikoisen, hieman aseen näköisen laitteen, jonka kyljessä luki: ”Affgun”. Se voisi tarkoittaa affiinia asetta. Tehtyäni sitten muutamia laskelmia, kävin vielä matematiikkanero T. Aigurin luona tarkistamassa, että päätelmäni ovat oikeita, Lininto selittää.

Hieman myötämielisempänä Linunho vastaa: - Kuulostaa aivan hullulta, mutta kerro pois. Aikamoinen sattuma, jos ”Affmenin” ja ”Affgunin” välillä ei ole mitään yhteyttä.

Kertausta

Niinpä Lininto aloittaa:

- Affiinit kombinaatiot ja riippuvuus saattavat aluksi kuulostaa vaikeilta ja kummallisilta asioilta. Sitä ne eivät kuitenkaan ole. Niihin liittyvä teoria pohjautuu vahvasti lineaarikombinaatioihin ja lineaariseen riippuvuuteen, joka sinulle olikin jo tuttua.

- Oli kyllä, mutta en muista siitä kyllä yhtään mitään, Linunho keskeyttää.

- Okei, kerrataan sitten hieman.

Vektori $v \in \mathbb{R}^n$ on vektoreiden v_i, missä $i \in \{1, \ldots, k\}$, *lineaarikombinaatio*, jos se voidaan esittää vektoreiden v_i reaalikertojen summana:

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_kv_k.$$

Vektoreiden v_i, missä $i \in \{1, \ldots, k\}$, *lineaarinen riippuvuus* puolestaan tarkoittaa sitä, että jokin vektoreista voidaan esittää muiden joukon vektoreiden lineaarikombinaationa. Näin ollen vektorit v_i ovat *lineaarisesti riippumattomat*, mikäli yhtälö

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_kv_k = 0$$

pätee ainoastaan, kun jokainen reaaliluku $a_i = 0$.

- Aiemmin mainitsinkin jo jotain aliavaruuksista. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruudella tarkoitetaan sitä avaruutta $U \subset \mathbb{R}^n$, jonka vektoreiden reaalikerrat ja summat ovat nekin tämän avaruuden U vektoreita.

Määritelmä 1. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ epätyhjä osajoukko U on sen aliavaruus, jos seuraavat ehdot pätevät:

1. kaikilla $c \in \mathbb{R}$ ja $u \in U$ myös $cu \in U$ ja

2. kaikilla $u \in U$ ja $v \in U$ myös $u + v \in U$.

Määritelmän 1 ehdot voidaan esittää yhtäpitävästi myös muodossa

$$c_1u_1 + \cdots + c_ku_k \in U$$

kaikilla $c_i \in \mathbb{R}, u_i \in U$ ja $i \in \{1, \ldots, k\}$, missä $k \geq 1$.

Huomautus 2. Aliavaruus sisältää aina nollavektorin. Muutoin määritelmän ehdosta 1. seuraisi ristiriita arvolla $c = 0$.

Koska aliavaruus sisältää aina nollavektorin, siitä seuraa, että suoran tai tason on kuljettava origon kautta, jotta se olisi aliavaruus. Vastaavasti myös useampiulotteisten avaruuksien on sisällettävä origo ollakseen aliavaruuksia.

- Osaatko Linunho sanoa, miten voimme tarkastella niitä tilanteita, joissa esimerkiksi taso ei kuljekaan origon kautta?

- No en kyllä osaa. Mitä väliä sillä on, missä se taso kulkee? Linunho vastaa.

- Jos halutaan suorittaa tasolle joitain operaatioita, emme voi tähän astisen lineaarialgebran tietämyksesi pohjalta tehdä niitä tasolle, joka ei kulje origon kautta. Monesti operaation suorittamisen kannalta helpointa on siirtää taso origoon, suorittaa operaatiot, jotka origossa osataan hyvin tehdä, ja palata sitten takaisin siihen paikkaan, missä taso oli alussa.

- Tuo kuulostaa aivan sekavalta! Miten se siirto oikein menikään? Linunho keskeyttää.

- Yksinkertainen matemaattinen esimerkki siirrosta on xy-tason suora $y = ax + b$, joka on suoran $y = ax$ siirto y-akselin suuntaan luvulla b, Lininto vastaa.

- Aivan! Nyt tajusin tuon, mutta mitä järkeä tuossa kaikessa edestakaisin siirtymisessä on? Linunho ihmettelee.

- Voit verrata sitä kylämme parturiin. Jos haluat eroon tuosta ihastuttavasta hiuspehkostasi, voit joko siirtyä parturimme luo leikkauttamaan hiuksesi ja palata takaisin. Toinen vaihtoehto on pyytää hänet tulemaan tänne hiuksiasi leikkaamaan. Monesti kuitenkin helpointa on, että sinä menet hänen luokseen, koska silloin hänen ei tarvitse roudata kaikkia välineitään tänne. Joissain tilanteissa, esimerkiksi pyörätuolissa olevan isäni tapauksessa, on kuitenkin parturin kotikäynti järkevämpi ratkaisu.

- Tuossa esimerkissä parturin työtila oli siis origo ja hiusten leikkaaminen se operaatio? Linunho varmistaa.

- Juuri niin. Tätä periaatetta tarvitaan nyt, kun siirrymme affiineihin kombinaatioihin. Tästä lähtien ajattelin muuten puhua pisteistä silloin, kun tarkoitan origosta tähän pisteeseen kulkevaa vektoria. Se on jatkon kannalta yksinkertaisempaa.

Affiinit kombinaatiot

Affiinit kombinaatiot ovat erikoistapaus lineaarikombinaatioista. Lineaarikombinaatio on siis affiini kombinaatio, jos seuraavan määritelmän ehto pätee.

Määritelmä 3. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteiden $v_1, v_2, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$ affiini kombinaatio on lineaarikombinaatio

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_pv_p,$$

missä kertoimille $c_1, \dots, c_p \in \mathbb{R}$ pätee

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_p = 1.$$

Piste $y \in \mathbb{R}^n$ on siis pisteiden $v_1, v_2, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$ affiini kombinaatio, jos se on näiden sellainen lineaarikombinaatio, jossa reaalikertoimien c_i summa on 1.

Aliavaruus saatiin määriteltyä lineaarikombinaatioiden avulla ja vastaavasti affiinit aliavaruudet saadaan määriteltyä affiinien kombinaatioiden avulla.

Määritelmä 4. Äärellisen joukon S virittämä affiini aliavaruus on joukko, joka koostuu joukon S alkioiden kaikista affiineista kombinaatioista. Joukon S affiinia aliavaruutta merkitään $[S]$.

- Okei okei, Linunho keskeyttää. - Nyt tulee niin teoreettista juttua, etten enää ymmärrä mitään. Osaatko sanoa, mitä tämä käytännössä tarkoittaa?

- Toki. Jos äärellinen joukko S koostuu yhdestä pisteestä, $[S]$ on tämä piste. Jos äärellinen joukko S koostuu kahdesta pisteestä, $[S]$ on näiden läpi kulkeva suora. Tämä johtuu siitä, että affiiniin aliavaruuteen $[S]$ kuuluvat pisteet ovat joukon S pisteiden affiineita kombinaatioita. Eli jos joukko S koostuu pisteistä v_1 ja v_2, joukon $[S]$ pisteet y ovat muotoa $y = c_1v_1 + c_2v_2$, missä $c_1 + c_2 = 1$. Merkitään nyt asioiden selkeyttämiseksi $c_2 = t$. Tällöin joukon $[S]$ pisteet ovat muotoa

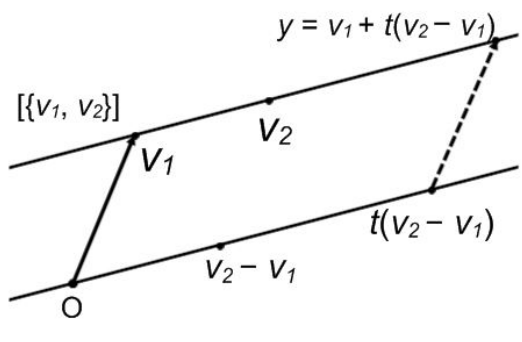
$$y = (1 - t)v_1 + tv_2,$$

missä $t \in \mathbb{R}$. Tämä voidaan muuttaa muotoon

$$y = t(v_2 - v_1) + v_1.$$

Tässä yhtälössä v_1 ja v_2 ovat vakiovektoreita ja t on muuttuja. Tätä avaruudessa $\mathbb{R}^n$ olevaa yhtälöä voi verrata xy-tasossa olevan suoran yhtälöön $y = ax + b$.

- Katsopas sitten, Linunho, tätä kuvaa 1. Se havainnollistaa asiaa geometrisesti ja siitä näkee paremmin sen, miten siirtoa käytettiin hyväksi: piste v_1 siirrettiin origoon ja myös pistettä v_2 siirrettiin vektorilla $-v_1$ eli pisteeseen $v_2 - v_1$.



Kuva 1

- Joo. Tuo kuva selkiyttää kyllä asiaa, Linunho myöntää.

- Hyvä. Tämä kuva antaakin jo viitteitä siitä, että affiinit aliavaruudet ovat siirrettyjä aliavaruuksia. Olen jo hieman tästä asiasta maininnutkin, mutta palaan tähän uudestaan myöhemmin ja perustelen sinulle, miksi niin on.

- Okei. Entä pystytäänkö äskeisen kaltaisia päättelyjä tekemään, jos joukko S koostuu useammasta kuin kahdesta pisteestä?

- Kyllä. Jos äärellinen joukko S koostuu kolmesta pisteestä, jotka eivät ole samalla suoralla, $[S]$ on näiden läpi kulkeva taso. Tämä saadaan pääteltyä vertaamalla aluksi kahta joukon S kolmesta pisteestä. Joukkoon $[S]$ kuuluu jokainen piste, joka on näiden kahden pisteen muodostama affiini kombinaatio, koska kolmannen vektorin kerroin voidaan asettaa nollaksi. Äskeisen päättelyn perusteella joukko $[S]$ sisältää siis kaikki kahden sen pisteen läpi kulkevan suoran pisteet. Kun sitten huomioidaan kolmaskin piste, päästään tältä suoralta poikkeamaan kolmannen pisteen suuntaan. Koska kolmatta pistettä voidaan kertoa millä tahansa reaaliluvulla niin, että kertoimien summa on 1, joukkoon $[S]$ sisältyy kaikki näiden kolmen pisteen kautta kulkevan tason pisteet. Kerron tästä lisää kuitenkin vasta myöhemmin ja perustelen asian silloin.

Jos S koostuu neljästä avaruuden $\mathbb{R}^3$ pisteestä, jotka eivät ole samalla suoralla tai tasolla, voimme vastaavanlaisella päättelyllä osoittaa, että $[S]$ on avaruus $\mathbb{R}^3$. Näiden päätelmien perusteella ymmärrämme seuraavan määritelmän joukon affiiniudelle.

Määritelmä 5. Joukko S on affiini, jos kaikille joukon S pisteille p ja q pätee $(1-t)p+tq \in S$ jokaiselle reaaliluvulle t.

Tämä tarkoittaa siis sitä, että jos joukosta S valitaan mitkä tahansa kaksi pistettä ja niiden läpi kulkeva suora kuuluu edelleen joukkoon S, joukon on oltava affiini. Näin ollen affiini joukko $[S]$ on äärellinen vain, jos joukko S on piste. Joukon affiiniutta voidaan tarkastella paremmin seuraavan lauseen avulla.

Lause 6. *Jos joukko S on affiini, sen kaikkien äärellisten osajoukkojen affiinit kombinaatiot kuuluvat joukkoon S.*

- Todistan tämän lauseen, jotta uskoisit sen olevan totta. Muistatko muuten induktiotodistuksen periaatteen?

- Eikös se ollut se missä piti tehdä joku oletus ja sen pohjalta todistaa joku väite? Linunho varmistaa.

- Hyvin muistettu! Lisäksi pitää aluksi todistaa väite jollekin alkuarvolle, Lininto lisää.

Todistus. Oletetaan, että joukko S on affiini. Merkitään joukon S osajoukon U pisteiden lukumäärää luvulla k.

Kun $k=1$ tai $k=2$, väite on totta määritelmän 5 nojalla.

Induktio-oletus on, että kun U koostuu pisteistä $v_1,\ldots,v_k$, näiden pisteiden affiinit kombinaatiot kuuluvat joukkoon S eli jokainen piste $y=c_1v_1,+\cdots+c_kv_k$, missä $c_1+\cdots+c_k=1$, kuuluu joukkoon S.

Induktioväite on, että tämä pätee myös, kun osajoukossa U on $k+1$ pistettä $v_1,\ldots,v_{k+1}$. Tarkastellaan pistettä $y=c_1v_1,+\cdots+c_kv_k+c_{k+1}v_{k+1}$, missä $c_1+\cdots+c_{k+1}=1$. Koska kertoimien c_i, missä $i\in\{1,\ldots,k+1\}$, summa on 1, vähintään yhden näistä kertoimista on oltava erisuuri kuin 1. Voidaan olettaa, että $c_{k+1}\neq 1$. Jos näin ei muuten ole, indeksoidaan termit v_i ja c_i uudestaan.

Olkoon $t=c_1+\cdots+c_k$. Tällöin $t=1-c_k$, joten $t\neq 0$. Nyt

$$\begin{aligned} y &= c_1v_1+\cdots+c_kv_k+c_{k+1}v_{k+1}\\ &= t(\frac{c_1}{t}v_1+\cdots+\frac{c_k}{t}v_k)+c_{k+1}v_{k+1}\\ &= (1-c_{k+1})(\frac{c_1}{t}v_1+\cdots+\frac{c_k}{t}v_k)+c_{k+1}v_{k+1}. \end{aligned}$$

Induktio-oletuksen mukaan piste $q=\frac{c_1}{t}v_1+\cdots+\frac{c_k}{t}v_k$ kuuluu joukkoon S, koska sen esityksessä kertoimien summa on 1. Näin ollen yllä oleva lauseke on kahden joukon S pisteen affiini kombinaatio, koska $(1-c_{k+1})+c_{k+1}=1$, joten piste $y\in S$. Induktioperiaatteen mukaan affiinin joukon S kaikkien äärellisten osajoukkojen U affiinit kombinaatiot kuuluvat joukkoon S, joten $[U]\subset S$. Induktioväite on siis todistettu. □

- Voi miten upea todistus! Sitä vain ihmettelen, miten nämä kaikki asiat liittyvät prinsessan pelastamiseen, Linunho pohtii hieman jo väsyneen oloisena.

- Jotta saisimme selville prinsessan olinpaikan, meidän on ratkaistava eräs tyypillinen näihin asioihin liittyvä ongelma: meillä on tiedossa joukko pisteitä ja haluamme selvittää, onko jokin piste y näiden affiini kombinaatio.

- Vihdoin asiaa! Tehdäänkö se niin, että selvitämme, mitä y on näiden pisteiden lineaarikombinaationa, ja tarkistamme sitten, onko reaalikertoimien summa 1? Linunho keskeyttää innokkaana.

- Periaatteessa se on yksi keino. Ongelma on kuitenkin se, että y voidaan esittää usealla eri tavalla muiden pisteiden lineaarikombinaationa. Esitys ei siis ole yksikäsitteinen. Jos sattumalta löydät sellaisen lineaarikombinaatioesityksen, jossa kertoimien summa on 1, niin hieno juttu. Silloin olet osannut ilmaista pisteen y

muiden pisteiden affiinina kombinaationa. Jos et kuitenkaan löydä halutunlaista esitystä, se ei kuitenkaan tarkoita sitä, ettei sitä olisi olemassa, Lininto vastaa.

- Argh, kerrankin kun luulin jotain keksineeni. Miten se sitten tehdään? Linunho kysyy hieman turhautuen.

- Meillä on pari erilaista vaihtoehtoa siihen, miten se tehdään, ja esitän niistä nyt ensimmäisen, seuraavan lauseen mukaisen ratkaisutavan.

Lause 7. *Piste $y \in \mathbb{R}^n$ on pisteiden $v_1, v_2, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$ affiini kombinaatio, jos ja vain jos $y - v_i$ on lineaarikombinaatio siirretyistä pisteistä $v_1 - v_i, \dots, v_{i-1} - v_i, v_{i+1} - v_i \dots, v_p - v_i$ kaikille $i \in \{1, \dots, p\}$.*

- Näyttää kyllä hienolta ja matemaattiselta, mutta mistä tiedät, että tämä väite on tosi? Jos prinsessan löytyminen on tästä kiinni, haluan perustelut väitteellesi, Linunho tokaisee.

- Hyvä on, todistan väitteeni:

Todistus. Todistetaan tilanteelle $i = 1$. Muut tilanteet voidaan todistaa vastaavasti.

Jos $y - v_1$ on lineaarikombinaatio pisteistä $v_2 - v_1, \dots, v_p - v_1$, on olemassa sellaiset kertoimet $c_1, \dots, c_p$, että pätee

$$y - v_1 = c_2(v_2 - v_1) + c_3(v_3 - v_1) + \dots + c_p(v_p - v_1). \quad (1)$$

Kertomalla tämä auki saadaan

$$y - v_1 = c_2v_2 - c_2v_1 + c_3v_3 - c_3v_1 + \dots + c_pv_p - c_pv_1.$$

Siirretään v_1 oikealta vasemmalle puolella ja otetaan sille yhteinen tekijä:

$$y = (1 - c_2 - c_3 - \dots - c_p)v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + \dots + c_pv_p. \quad (2)$$

Huomataan, että kertoimien summa on 1, joten y on pisteiden $v_1, v_2, \dots, v_p$ affiini kombinaatio.

Oletetaan sitten päin vastoin, että

$$y = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + \dots + c_pv_p, \quad (3)$$

missä $c_1 + c_2 + \dots + c_p = 1$. Kun siirretään $c_2, \dots, c_p$ oikealle, saadaan $c_1 = 1 - c_2 - c_3 - \dots - c_p$. Sijoitetaan tämä yhtälöön (3), jolloin saadaan yhtälö (2). Tästä saadaan johdettua yhtälö (1), mikä osoittaa, että $y - v_1$ on lineaarikombinaatio pisteistä $v_2 - v_1, \dots, v_p - v_1$. $\square$

- Okei, uskotaan. Mitenkäs tämän avulla voimme sitten löytää prinsessan? Linunho kysyy hieman epäluuloisena.

Lininto vastaa innokkaana: - Uskon, että hullun tiedemiehen luota löytämäni lapun teksti: "S: 1/-15, E: 1/3" tarkoittaa pisteitä $S = (1, -15)$ ja $E = (1, 3)$. Ne ovat yhdessä Matikkylän koordinaattien $33°15'29''$ eteläistä leveyttä (S) ja $115°57'6''$ itäistä pituutta (E) kanssa avain ratkaisuun. Samaistamme eteläisen leveyden koordinaatit pisteisiin $s_1 = (3, 3), s_2 = (1, 5)$ ja $s_3 = (2, 9)$ ja itäisen pituuden koordinaatit pisteisiin $e_1 = (11, 5), e_2 = (5, 7)$ ja $e_3 = (0, 6)$. Nyt ilmoitamme pisteen S pisteiden s_1, s_2 ja s_3 affiinina kombinaationa ja vastaavasti pisteen E pisteiden e_1, e_2 ja e_3 affiinina kombinaationa. Saamme reaalikertoimet, joiden avulla saadaan laskettua prinsessan uuden olinpaikan koordinaatit.

Esimerkki 8. Ilmoita piste $S = (1, -15)$ pisteiden $s_1 = (3, 3)$, $s_2 = (1, 5)$, $s_3 = (2, 9)$ affiinina kombinaationa, jos mahdollista.

Lasketaan aluksi lauseen 4 mukaiset siirretyt pisteet:

$s_2 - s_1 = (-2, 2)$, $s_3 - s_1 = (-1, 6)$ ja $S - s_1 = (-2, -18)$.

Lauseen 4 mukaan halutaan siis löytää sellaiset reaalikertoimet c_2 ja c_3, että

$$S - s_1 = c_2(s_2 - s_1) + c_3(s_3 - s_1) \text{ eli}$$

$$(-2, 18) = c_2(-2, 2) + c_3(-1, 6).$$

Tästä saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} -2c_2 - c_3 = -2 \\ 2c_2 + 6c_3 = -18. \end{cases}$$

Lisätään jälkimmäinen yhtälö ensimmäiseen yhtälöön:

$$\begin{cases} 5c_3 = -20 \\ 2c_2 + 6c_3 = -18. \end{cases}$$

Kerrotaan jälkimmäinen yhtälö luvulla $\frac{1}{2}$ ja ensimmäinen yhtälö luvulla $\frac{1}{5}$:

$$\begin{cases} c_3 = -4 \\ c_2 + 3c_3 = -9. \end{cases}$$

Kerrotaan ylempi yhtälö luvulla -3 ja lisätään se alempaan yhtälöön:

$$\begin{cases} c_3 = -4 \\ c_2 = 3. \end{cases}$$

Sama ratkaisu voidaan esittää niin sanotulla Gaussin ja Jordanin menetelmällä eli käyttäen rivioperaatioita seuraavasti:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & | & -2 \\ 2 & 6 & | & -18 \end{bmatrix} \xrightarrow{A_{21}(1)} \begin{bmatrix} 0 & 5 & | & -20 \\ 2 & 6 & | & -18 \end{bmatrix} \xrightarrow{M_2(\frac{1}{2})}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & | & -20 \\ 1 & 3 & | & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{M_1(\frac{1}{5})} \begin{bmatrix} 0 & 1 & | & -4 \\ 1 & 3 & | & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{A_{12}(-3)}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & | & -4 \\ 1 & 0 & | & 3 \end{bmatrix}.$$

Tästäkin nähdään, että $c_3 = -4$ ja $c_2 = 3$. Ratkaistaan vielä kerroin c_1 näiden avulla:

$$\begin{aligned} S - s_1 &= 3(s_2 - s_1) - 4(s_3 - s_1) \\ S &= 3s_2 - 3s_1 - 4s_3 + 4s_1 + s_1 \\ &= 2s_1 + 3s_2 - 4s_3. \end{aligned}$$

Nyt $c_1 + c_2 + c_3 = 2 + 3 - 4 = 1$, joten kyseessä todella on affiini kombinaatio.

Prinsessan olinpaikan eteläisen leveyden koordinaattien selvittämiseksi kerromme ratkaistuilla vakioilla c_1, c_2 ja c_3 alkuperäiset eteläisen leveyden koordinaatit:

$$2 \cdot 33^\circ \; 3 \cdot 15' \; - 4 \cdot 29'' = 66^\circ \; 45' \; - 116''.$$

Koska koordinaateissa on kyse asteista, minuuteista ja sekunneista, saamme muutettua -116 sekuntia positiiviseksi luvuksi lainaamalla 2 minuuttia:

$$66^\circ \; 45' \; - 116'' = 66^\circ \; 43' \; (120 - 116)'' = 66^\circ 43' 4''.$$

Prinsessan olinpaikan eteläisen leveyden koordinaatit ovat siis $66^\circ 43' 4''$.

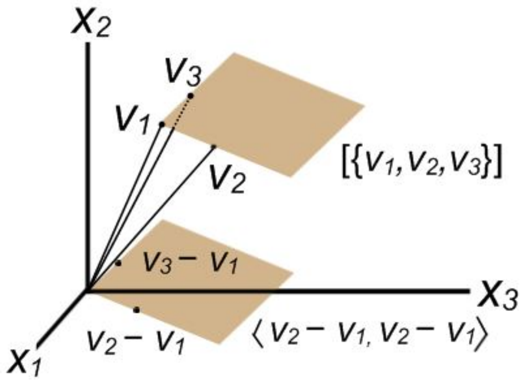
- Nerokasta! Miten tuon keksit? Linunho kysäisee.

- Noh, kyllä sitä muutamat muutkin jutut tuli kokeiltua. Monta tuntiahan siinä vierähti, mutta viimein keksin tämän, Lininto vastaa väsyneenä, mutta tyytyväisenä.

- Taisit sanoa, että prinsessan olinpaikan koordinaattien ratkaisemiseen olisi ollut joku toinenkin ratkaisutapa, Linunho sanoo ja jatkaa: - Onko se yhtään lyhyempi? Jos on, niin lasketaan ne itäisen pituuspiirin koordinaatit sillä tavalla. Tuon laskemisessa kesti nimittäin melko kauan, Linunho esittää toiveikkaana.

- Homogeenisten muotojen avulla olisimme voineet tuon ratkaista myös. Voimme hyvin laskea ne toiset koordinaatit sillä tavalla. Sitä ennen haluan kuitenkin perustella affiinin joukon ja siirretyn aliavaruuden välisen yhteyden, mitä aiemmin jo lupailinkin.

Joukon $S \subset \mathbb{R}^n$ siirto pisteellä p on siirretty joukko $S + p = \{s + p : s \in S\}$. Jos S on lineaarinen aliavaruus, $S + p$ on affiini aliavaruus. Huomaa, ettei tämä päde toisin päin, ja että piste p voi olla myös nolla, sillä aliavaruus on aina myös affiini aliavaruus. Tämä selittyy lauseen 7 ja kuvan 2 avulla: Piste $s_i \in S$ ja $s_i = s_i + p - p = v_i - p$, missä $v_i = s_i + p \in S + p$. Nyt jos $y \in S$ on pisteiden s_i, missä $i \in \{1, \ldots, k\}$, lineaarikombinaatio, piste y on pisteiden $v_i - p$ lineaarikombinaatio, koska $v_i = s_i + p$ eli $s_i = v_i - p$. Piste y voidaan ilmaista muodossa $y = v_{k+1} - p$, jolloin lauseesta 7 seuraa, että v_{k+1} on pisteiden v_i, missä $i \in \{1, \ldots, k\}$, affiini kombinaatio. Jos S on aliavaruus, tämä pätee kaikille joukon S pisteille $s_i = v_i - p$ ja näin ollen myös jokaiselle v_i, joten tällöin $S + p$ on joukon S affiini aliavaruus.



Kuva 2

Lauseiden 6 ja 7 perusteella voidaan myös todistaa, että jos joukko S on affiini, sen on oltava siirretty aliavaruus. Näin ollaan saatu johdettua seuraava tulos.

Lause 9. *Epätyhjä joukko S on affiini, jos ja vain jos se on siirretty aliavaruus.*

Affiineilla joukoilla on paljon yhteyksiä avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruuksiin, jotka voidaan ymmärtää lauseen 9 avulla. Affiinit joukot eli siirretyt aliavaruudet A ja $B \subset \mathbb{R}^n$ ovat yhdensuuntaiset, jos $A = B + p$ tai $B = A + p'$, missä p ja p' ovat joitain $\mathbb{R}^n$:n vektoreita. Toisin sanottuna affiinit joukot ovat yhdensuuntaiset, jos toinen on toisen siirto.

Aliavaruuden dimensiolla tarkoitetaan aliavaruuden ulottuvuutta. Suora avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on 1-ulotteinen siirretty aliavaruus, joten sen dimensio on 1. Jos taas siirretty aliavaruus T on taso, dim $T = 2$ ja niin edelleen. Hypertasoksi kutsutaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ siirrettyä aliavaruutta, jonka dimensio on $n - 1$.

Voidaan sopia, että siirretyn aliavaruuden dimensio on sama kuin vastaavan siirtämättömän aliavaruuden dimensio. Tästä seuraa suoraan se, että myös yhdensuuntaisten siirrettyjen aliavaruuksien dimensiot ovat yhtä suuret. Siirrettyjen aliavaruuksien avulla voidaan myös määritellä joukon S dimensio: joukon S dimensio on yhtä suuri kuin pienimmän siirretyn aliavaruuden dimensio, joka sisältää joukon S.

- Oho, hieman taas innostuin. Mennäänpä nyt niihin homogeenisiin muotoihin, jotta pääsemme pian prinsessaa pelastamaan!

- Vihdoin, Linunho huokaa, mutta niin hiljaa, ettei Lininto kuule.

- Aluksi siis pisteen homogeenisen muodon määritelmä.

Määritelmä 10. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteen v homogeeninen muoto, merkitään $\hat{v}$, on piste $\hat{v} = (v, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

- Homogeenisten muotojen ja seuraavan lauseen avulla pystymme tosiaan selvittämään, onko piste y pisteiden v_i, missä $i \in \{1, \ldots, p\}$, affiini kombinaatio. Todistan myös tämän lauseen mielenrauhasi vuoksi.

Lause 11. *Piste $y \in \mathbb{R}^n$ on pisteiden $v_1, v_2, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$ affiini kombinaatio, jos ja vain jos $\hat{y}$ kuuluu pisteiden $\hat{v}_i$, missä $i \in \{1, \ldots, p\}$, virittämään aliavaruuteen $\langle \hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_p \rangle$. Itse asiassa reaaliluvuille $c_1, \ldots, c_p$ pätee*

$$y = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \cdots + c_p v_p,$$

missä $c_1 + c_2 + \cdots + c_p = 1$, jos ja vain jos

$$\hat{y} = c_1 \hat{v}_1 + c_2 \hat{v}_2 + \cdots + c_p \hat{v}_p.$$

Todistus. Olkoon piste y pisteiden $v_1, v_2, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$ affiini kombinaatio. Osoitetaan, että tällöin $\hat{y} = c_1\hat{v}_1 + c_2\hat{v}_2 + \cdots + c_p\hat{v}_p$:

$$\begin{aligned} &c_1\hat{v}_1 + c_2\hat{v}_2 + \cdots + c_p\hat{v}_p \\ &\quad = c_1(v_1, 1) + c_2(v_2, 1) + \cdots + c_p(v_p, 1) \\ &\quad = (c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_pv_p, c_1 + c_2 + \cdots + c_p) \\ &\quad = (y, 1) = \hat{y}. \end{aligned}$$

Ylläoleva päättely pätee vain, kun y on pisteiden $v_1, v_2, \ldots, v_p$ affiini kombinaatio, joten koko lause on todistettu. □

- Näillä tiedoilla voimmekin sitten ratkaista itäisen pituuspiirin koordinaatit.

Esimerkki 12. Ilmoita piste $E = (1, 3)$ pisteiden $e_1 = (11, 5), e_2 = (5, 7)$ ja $e_3 = (0, 6)$ affiinina kombinaationa, jos mahdollista.

Muodostamme ensin pisteiden homogeeniset muodot: $\hat{e}_1 = (11, 5, 1)$, $\hat{e}_2 = (5, 7, 1)$, $\hat{e}_3 = (0, 6, 1)$ ja $\hat{E} = (1, 3, 1)$, jonka jälkeen ratkaisemme kertoimet c_1, c_2 ja c_3 yhtälölle

$$c_1(11, 5, 1) + c_2(5, 7, 1) + c_3(0, 6, 1) = (1, 3, 1).$$

Yllä olevasta yhtälöstä saamme tehtyä yhtälöryhmän, jonka voimme ratkaista kuten esimerkissä 8. Kertoimiksi saamme $c_1 = 1, c_2 = -2$ ja $c_3 = 2$. Näillä kertoimilla kerromme alkuperäiset itäisen pituuden koordinaatit, jotta saamme uudet selville:

$$1 \cdot 115^\circ \ - 2 \cdot 57' \ 2 \cdot 6'' = 115^\circ \ - 114' \ 12''.$$

Yksi pituusaste jakaantuu 60 minuuttiin, joten lainaamme kaksi astetta minuuteiksi ja saamme:

$$115^\circ \ -114' \ 12'' = 113^\circ \ (120-114)' \ 12'' = 113^\circ \ 6' \ 12''.$$

- Prinsessan sijainnin koordinaatit ovat siis $66°43'4''$ eteläistä leveyttä ja $113°6'12''$ itäistä pituutta. Nämä koordinaatit ovat Karulan koordinaatit, joten eikun menoksi!

- Karulan? Mikäs paikka se olikaan? Linunho kysäisee.

- Sieltä on se jääkiekkojoukkue Karulan Kanuunat! Lininto muistaa.

- Totta! Niiden pelejä on tullutkin joskus seurattua.

Lininto ja Linunho saapuvat vihdoin Karulaan. He suunnistavat paikalle, jossa selvitetyt leveys- ja pituuspiirit leikkaavat toisensa, mutta prinsessaa ei siellä näy! Paikka on keskellä pientä metsää, joten lähistöllä ei näy mitään muutakaan tavallisesta metsästä poikkeavaa. Masentuneina he palaavat Karulan keskustaan ja varaavat hotellihuoneen.

- Olet tainnut antaa ajatustesi laukata vähän liian lujaa, Linunho syyllistää.

- Olen ihan varma, että joko siellä metsässä tai tässä kylässä on joko prinsessa, tai jokin vihje hänen olinpaikastaan, Lininto puolustelee. - Mennään käymään uudestaan siellä metsässä. Ehkä siellä oli jokin johtolanka, jota emme vain huomanneet.

- Mene sinä vain, minä jään nukkumaan, Linunho sanoo haukotellen.

Lininto lähtee takaisin metsään johtolankoja etsimään. Leveys- ja pituuspiirien leikkauskohdassa ei näy jälkeäkään johtolangoista. Lininto meinaa jo luovuttaa, kunnes päättää vielä kokeilla, löytyisikö jotain maasta kaivamalla. Lininto löytää lähettyviltä kepin, jolla hän alkaa sorkkia ja kaivaa maata. Hetken kuluttua keppi kolahtaa johonkin kovaan. Se ei ole kivi. Lininto nostaa kaivamastaan kuopasta pienen rasian. Sen sisältää löytyy lappu, jossa lukee: " 0-1-2, 131, 252, 350". Lininto kopioi tekstin muistikirjaansa ja laittaa lapun takaisin rasiaan, rasian kuoppaan ja peittää kuopan hiekalla.

- Löysin kuin löysinkin jotain, Lininto huudahtaa hotellille palattuaan. - Löysin lapun, jossa on taas jotain numeroita. Taidan tämän yön viettää pohtien näiden merkitystä, Lininto jatkaa.

Linunho vilkaisee muistikirjaan kopioitua tekstiä ja toteaa: - Vai niin. Enpä tiedä onko tuosta mitään hyötyä. Jos olisit ottanut alkuperäisen lapun mukaan, olisin voinut käydä ottamassa siitä sormenjälkinäytteet. Ehkä teen sen sitten huomenna, nyt on unen aika.

Linunhon mentyä nukkumaan Lininto alkaa pohtimaan numeroiden merkitystä: - Pisteitä... Hmm. Salakirjoitusta? Tuskin. Affiineja kombinaatioita? Ei... Riippuvat? Ei, mutta riippumattomat. Riippumattomat. Hmm. Kuulostaa tutulta. Aah. Mihinkäs minä sen kartan laitoinkaan...

Aamuviideltä Linunho herää riemunkiljahdukseen.

- Mitä nyt? Linunho mumisee unenpöpperössä.

- Keksin, missä prinsessa on! Lininto huudahtaa. - Herää ja tule kuuntelemaan, kun paljastan lapun salaisuuden!

Affiini riippuvuus

- Lapun sisällön ymmärtäminen vaatii tietämystä affiinista riippuvuudesta ja riippumattomuudesta. Märittelen siis ensin, mitä ne tarkoittavat.

Määritelmä 13. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteiden joukko $\{v_1,\ldots,v_p\}$ on affiinisti riippuva, jos on olemassa sellaiset reaaliluvut $c_1,\ldots,c_p$, että ainakin yksi niistä on erisuuri kuin 0 ja lisäksi $c_1+\cdots+c_p=0$ ja $c_1v_1+\cdots+c_pv_p=0$. Muulloin joukko on affiinisti riippumaton.

- Väitän, että lapun numerot voidaan tulkita pisteiksi, jotka ovat keskenään affiinisti riippumattomat. Tämän todistamiseen tarvitaan kuitenkin seuraava lause.

Lause 14. *Seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja avaruuden $\mathbb{R}^n$ joukolle $S=\{v_1,\ldots,v_p\}$, missä $p\geq 2$.*

1. *S on affiinisti riippuva.*
2. *Yksi joukon S pisteistä on muiden joukon S pisteiden affiini kombinaatio.*
3. *Joukko $\{v_1-v_i,\ldots,v_{i-1}-v_i,v_{i+1}-v_i,\ldots,v_p-v_i\}\in\mathbb{R}^n$ on lineaarisesti riippuva kaikille $i\in\{1,\ldots,p\}$.*
4. *Homogeenisten muotojen joukko $\{\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_p\}\in\mathbb{R}^{n+1}$ on lineaarisesti riippuva.*

Todistus. Väite saadaan todistettua olettamalla ensin, että kohta (1) pätee, ja että siitä seuraa kohta (2). Sen jälkeen todistetaan, että kohdasta (2) seuraa kohta (3) ja kohdasta (3) seuraa kohta (1). Lopuksi todistetaan vielä, että kohdat (1) ja (4) ovat ekvivalentteja.

Oletetaan, että joukko S on affiinisti riippuva, jolloin kertoimet $c_1,\ldots,c_p$, joista ainakin yksi on erisuuri kuin nolla, toteuttavat määritelmän 13 eli $c_1+\cdots+c_p=0$ ja $c_1v_1+\cdots+c_pv_p=0$. Voidaan olettaa, että $c_1\neq 0$, sillä tarvittaessa pisteet voidaan indeksoida uudelleen. Jaetaan kaksi edellä olevaa yhtälöä termillä c_1, jolloin saadaan $1+\frac{c_2}{c_1}+\cdots+\frac{c_p}{c_1}=0$ ja

$$v_1=\frac{-c_2}{c_1}v_2+\cdots+\frac{-c_p}{c_1}v_p.$$

Jälkimmäisessä esityksessä kertoimien summa on täten 1, joten piste v_1 on muiden joukon S pisteiden affiini kombinaatio, toisin sanottuna väite (2) pätee.

Oletetaan seuraavaksi, että yksi joukon S pisteistä on muiden joukon S pisteiden affiini kombinaatio. Voidaan yksinkertaisuuden vuoksi olettaa, että tämä piste on v_1, sillä tarvittaessa pisteet voidaan indeksoida uudelleen. Nyt siis pätee $v_1=c_2v_2+\cdots+c_pv_p$, missä $c_2+\cdots+c_p=1$. Näistä saadaan

$$(c_2+\cdots+c_p)v_1=c_2v_2+\cdots+c_pv_p$$

ja tästä edelleen kertomalla vasen puoli auki, siirtämällä termit oikealle puolelle ja ottamalla yhteiset tekijät saadaan

$$c_2(v_2-v_1)+\cdots+c_p(v_p-v_1)=0.$$

Kertoimista $c_2,\ldots,c_p$ vähintään yhden on oltava erisuuri kuin nolla, koska niiden summa on 1. Tästä seuraa, että joukko $\{v_1-v_i,\ldots,v_{i-1}-v_i,v_{i+1}-v_i,\ldots,v_p-v_i\}\subset\mathbb{R}^n$ on lineaarisesti riippuva eli väite (3) pätee.

- Hetkonen, Linunho keskeyttää. - Eihän tuo voi pitää ollenkaan paikkaansa. Äsken esittelemäsi määritelmän 13 perusteella myös noiden kertoimien $c_2,\ldots,c_p$ summan olisi pitänyt olla nolla, jotta nuo pisteet voisivat olla riippuvat.

- Nyt sekoitit affiinin ja lineaarisen riippuvuuden. Tuo mitä sanoit on aivan totta affiinille riippuvuudelle, mutta tässä väitettiin pisteiden $v_2-v_1,\ldots,v_p-v_1$ olevan vain lineaarisesti riippuvat. Lineaarisen riippuvuuden kertasimme aivan alussa. Kertoimien summa voi olla siis mikä vain, kunhan jokin niistä on erisuuri kuin nolla, Lininto selittää.

- Jatketaan. Seuraavaksi oletetaan, että väite (3) pätee. Tällöin on olemassa kertoimet $c_2,\ldots,c_p$, joista ainakin yksi on erisuuri kuin nolla ja joille pätee

$$c_2(v_2-v_1)+\cdots+c_p(v_p-v_1)=0.$$

Kertomalla tämä auki saadaan

$$-(c_2+\cdots+c_p)v_1+c_2v_2+\cdots+c_pv_p=0.$$

Huomataan, että myös kertoimien summa on 0, joten määritelmän 13 nojalla joukko S on affiinisti riippuva eli väite (1) pätee.

Lisäksi vielä väitteet (1) ja (4) ovat ekvivalentteja, sillä määritelmän 13 mukaiset ehdot ovat ekvivalentteja seuraavan yhtälön kanssa

$$c_1(v_1,1)+c_2(v_2,1)+\cdots+c_p(v_p,1)=(0,0).$$

Lause on siis todistettu. □

- Seuraavaksi voimmekin sitten osoittaa lapun pisteet affiinisti riippumattomiksi. Lapussa luki siis " 0-1-2, 131, 252, 350", ja uskomukseni mukaan se tarkoittaa pisteitä $v_1=(0,-1,-2)$ ja niin edelleen.

Esimerkki 15. Osoita pisteet $v_1=(0,-1,-2),v_2=(1,3,1),v_3=(2,5,2)$ ja $v_4=(3,5,0)$ affiinisti riippumattomiksi.

Lauseen 14 mukaan riittää osoittaa, että joukko $\{v_2-v_1,v_3-v_1,v_4-v_1\}$ on lineaarisesti riippumaton. Tällöin yhtälön

$$c_2(v_2-v_1)+c_3(v_3-v_1)+c_4(v_4-v_1)=0 \quad (4)$$

on oltava voimassa vain, jos jokainen kertoimista c_2, c_3 tai c_4 on nolla. Lasketaan erotuspisteet: $v_2 - v_1 = (1,4,3)$, $v_3 - v_1 = (2,6,4)$ ja $v_4 - v_1 = (3,6,2)$. Nyt

$$\begin{aligned}
&(0,0,0)\\
&= c_2(v_2 - v_1) + c_3(v_3 - v_1) + c_4(v_4 - v_1)\\
&= c_2(1,4,3) + c_3(2,6,4) + c_4(3,6,2)\\
&= (c_2, 4c_2, 3c_2) + (2c_3, 6c_3, 4c_3) + (3c_4, 6c_4, 2c_4)\\
&= (c_2 + 2c_3 + 3c_4, 4c_2 + 6c_3 + 6c_4, 3c_2 + 4c_3 + 2c_4).
\end{aligned}$$

Tästä saamme muodostettua yhtälöryhmän, josta saamme ratkaistua kertoimiksi $c_2 = c_3 = c_4 = 0$. Kaikkien kertoimien c_2, c_3 ja c_4 on siis oltava nollia, jotta yhtälö (4) olisi voimassa. Näin ollen joukko $\{v_2 - v_1, v_3 - v_1, v_4 - v_1\}$ on lineaarisesti riippumaton.

- Katsohan sitten tätä karttaa. Riippumatontie. Joukko oli riippumaton. Prinsessan on pakko olla siellä! Kello onkin jo kahdeksan, niin voimme käydä hakemassa varmuuden vuoksi paikallisen poliisipartion mukaamme.

Lininto ja Linunho lähtevät yhdessä Karulan poliisiasemalle ja pyytävät sieltä poliisipartion mukaansa. Poliisipartio piirittää talon Lininton ja Linunhon mennessä ovelle. Oven tulee avaamaan hullu tiedemies. Hän ja Linunho meinaavat pyörtyä kilpaa toisensa nähdessään, mutta Lininto pysyy viileänä ja pyytää hullua tiedemiestä luovuttamaan prinsessan. Hullu tiedemies ei ole saada sanaa suustaan.

- P-p-p-prinsessan?

- Kyllä. Tiedämme, että Matikkylän prinsessa Amanda on täällä. Jos et luovuta häntä suosiolla, poliisipartiomme on valmiina toimintaan, Lininto toteaa tyynesti. Samalla poliisipartio alkaa lähestyä taloa aseet valmiudessaan.

- Kädet ylös ja ulos! poliisipartion johtaja huutaa.

Hullulla tiedemiehellä ei ole muuta vaihtoehtoa kuin totella. Masentuneena hän tottelee. Poliisipartio menee taloon, mutta koko talosta löytyy vain pari tiedemiehen kaveria. Prinsessaa ei näy missään.

- No niin, Lininto, taisit vetää vesiperän, Linunho alkaa naljailla.

Lininto ei moisesta masennu vaan lähtee itse kiertämään taloa.

- Riippumatto! Lininto huudahtaa olohuoneesta. - Lapussa olleet pisteet olivat riippumattomia, joten...

Lininto alkaa tutkia seinää, jossa riippumatto on kiinni. Riippumaton vieressä on kirjahylly, jonka takaa Lininto löytää oven. Oven, jonka takaa löytyy prinsessa Amanda. Lininton ja Amandan katseet kohtaavat, ja rakkaus on molemminpuolista ensi silmäyksellä!

- Kuinka tämän teit? Linunho tiedustelee hullulta tiedemieheltä myöhemmin poliisiasemalla.

- Sitä ette saakaan ikinä tietää, tiedemies naureskelee partaansa.

- Ammuitko prinsessan tänne Affgunillasi? Linunho jatkaa.

Hullu tiedemies jää melkein sanattomaksi. - Affgunilla? Kuinka tiedät siitä? No, joo. Affgunilla pystyin muuttamaan hänen sijaintinsa koordinaatit affiineja kombinaatioita hyödyntäen.

- Siis ihan niinkuin Lininto sanoi! Affiini ase! Höyrähtänyt kaveri, mutta aikamoinen nero kuitenkin.

- Täten julistan prinsessa Amandan ja salapoliisi Lininton aviopuolisoiksi, pappi kuuluttaa Matikkylän kirkossa kuukauden kuluttua. Koko kylän väki, lukuunottamatta vankilassa istuvaa hullua tiedemiestä, on kutsuttu hääjuhliin. Riemu on rajaton. Kaikista onnellisimpia ovat kuitenkin morsian ja sulhanen, jotka saivat toisensa.

Lähdeluettelo

[1] Häsä, Oinonen, Rämö: *Johdatus lineaarialgebraan, Osa I.* Helsingin yliopisto, 2013. `http://www.mv.helsinki.fi/home/jramo/lm2_kesa2013/linis_materiaali_osa1.pdf`, luettu 2.12.2013.

[2] Noora Karvinen: *Affiini kombinaatio ja riippuvuus.* LuK-tutkielma, Jyväskylän yliopisto, 2013.

[3] Mikko Saarimäki: *Vektorilaskentaa euklidisissa avaruuksissa.* Luentomoniste 65, matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto, 2012.