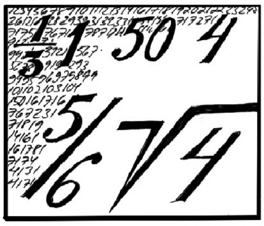

$2{,}107299476\ldots^{-2{,}107299476\ldots+i2{,}107299476\ldots} = i \cdot i^i$

Markku Sointu
FM, matematiikan lehtori, Soppeenharjun koulu

Antti Kanto
FT, talousmatematiikan professori, Tampereen yliopisto

Aluksi

Dosentti Matti Lehtinen kirjoitti Tehtävä maassa -kirjan[1] arvostelussa seuraavasti:

"...mutta ehkä kirjoittajat jättävät Inspiratiuksen, Fractalian ja Hackerian suomalaiseen lukioonsa kirjan jatko-osaa odottamaan. Tehtävä maassa tuskin muodostuu myyntimenestykseksi. Se on tietysti vahinko, sillä tietoromaani on kuitenkin ideana hauska ja kirjoittajilla on yhtä ja toista sanottavaa, rivien välissäkin. Matematian suurmestarit esimerkiksi näyttävät olevan aika tasaisesti kumpaakin sukupuolta."

Kirjan ensimmäisessä osassa imaginaariyksikkö esiintyi tärkeässä sivuroolissa. Seuraavassa artikkelissa esitellään näytteitä jatko-osasta. Samalla paljastetaan jotain siitä, mitä ensimmäisessä osassa oli rivien välissä. Siellä esiteltiin muun muassa luku 2,107299476 . . .. Nyt on aika pohtia, miksi tätä lukua voidaan pitää vähintäänkin mielenkiintoisena.

Ensimmäinen luku

Seuraava teksti on osa Tehtävä maassa -kirjan julkaisemattomasta toisesta osasta. Juuso on suomalainen koululainen, jota matematiikan planeetalta lähetetyt nuoret auttavat.

Juuso oli aivan myyty. Hän ei ollut enää varma siitä, mikä häneen oli iskenyt. Aikaisemmin hän oli vaatinut, että kaikesta, mihin hän ryhtyisi, piti olla selkeää käytännön hyötyä. Nyt numerot kiehtoivat häntä omina itsenään. Juuso oli kaivanut Elisan papereista tältä salaa esiin kielletyn luvun – mystisen Absurdicuksen luvun. Tästä luvusta hän oli jutellut ohimennen matematiikan planeetan ihmenuorten kanssa, mutta nämä Maan asukkaita valistamaan singotut ihmelapset eivät olleet innostuneet asiasta.

Juuson tyttöystävä Elisa oli lähes jäätävä, ihmepoika Into taas välinpitämätön. Jopa aina kultainen ja herttainen Fanni oli innostamisen sijasta toppuutellut ja vain todennut, että Lambertin funktiosta oli hyötyä. Ikivanha totuus oli kuitenkin se, että kiellot lisäsivät kiinnostusta. Alakoululainenkin tiesi, että nimittäjässä ei saanut olla lukua nolla. Kielto ja kiinnostus.

Nimittäjä ei saa olla nolla. Entäpä, jos se on hyvin lähellä nollaa oleva luku: sadasosa, miljoonasosa, miljardisosa ja niin edelleen? Tämän keksimällä ihminen oli päässyt matematiikassa syvemmälle ja ymmärtänyt paremmin todellisuutta. Elisa oli luvannut, että Juusosta

[1] Kanto A., Kanto A. & Sointu M. 2010. *Tehtävä maassa.* Helsinki: Gummerus. Markku Sointu sai idean kirjaan lukiessaan dosentti Matti Lehtisen kirjoitusta Matematiikan historia.

kuultaisiin vielä. Siis toimeen...

Kaikki oli saanut alkunsa, kun Juuso oli pohtinut seuraavaa: Onko alkeisfunktioiden joukossa toista funktiota, joka olisi yhtä immuuni derivoinnille kuin e-kantainen eksponenttifunktio. Pelkkä kantaluku e oli jo itsessään mielenkiintoinen – olihan sen käänteisluku tärkeällä sijalla vaikkapa tyttöystävän valinnassa.

Aluksi Juuso selvitti reaaliarvoiset funktiot, joilla on ominaisuus

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = k, \tag{1}$$

jossa k on vakio. Niinpä hän merkitsi

$$g(x) = \ln|f(x)|,$$

jonka derivaatta on

$$g'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = k.$$

Tästä seuraa $g(x) = kx + c$ ja edelleen $f(x) = e^{kx+c}$.

Merkitsemällä $e^c = b$ Juuso sai selville, että kaikki reaaliarvoiset funktiot, joilla on ominaisuus (1), voidaan esittää muodossa

$$f(x) = be^{kx}.$$

Juuso alkoi pohtia, olisiko toista derivoinnille yhtä immuunia funktiota. Hän muisti, että kosinin ja sinin derivaatat ovat

$$\mathrm{D} \sin x = \cos x$$

ja

$$\mathrm{D} \cos x = -\sin x,$$

joista seuraa

$$\mathrm{D}(\cos x + \sin x) = -\sin x + \cos x = \cos x - \sin x.$$

Kosini säilyi, mutta sini vaihtoi etumerkkiä. Juuso tunsi olevansa lupaavan lähellä. Hän yksinkertaisti yhtälön (1) ratkaisua ja kirjoitti

$$u(x) = \mathrm{e}^{ax}$$

sekä tämän derivaatan

$$u'(x) = a\,\mathrm{e}^{ax} = au(x).$$

Lisäksi u toteuttaa ehdot $u(0) = 1$ ja $u'(0) = a$.

Seuraavaksi Juuso pyrki rakentamaan kosinin ja sinin summasta funktion, jolla olisi tietty ominaisuus: funktion derivaatta saataisiin kertomalla funktio vakiolla a. Vakio a piti siis sijoittaa summaan $\cos x + \sin x$. Koska termi $\cos x$ säilyi derivoinnissa, kannatti vakio liittää termiin $\sin x$. Juuso keskitti huomionsa funktioon

$$v(x) = \cos x + a \sin x$$

ja sen derivaattaan

$$v'(x) = a \cos x - \sin x.$$

Tämä funktio toteuttaa samat ehdot kuin funktio u, $v(0) = 1$ ja $v'(0) = a$. Kertomalla vakiolla a Juuso sai

$$av(x) = a \cos x + a^2 \sin x.$$

Juuson oli selvitettävä, millä vakion a arvolla funktio v toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$v' = av$$

eli

$$a \cos x - \sin x = a \cos x + a^2 \sin x.$$

Yhtälö toteutuu kaikilla $x \in \mathbb{R}$, mikäli $a^2 = -1$, eli jos a on imaginaariyksikkö. Näin ollen funktiot

$$u(x) = \mathrm{e}^{ix}$$

ja

$$v(x) = \cos x + i \sin x$$

ovat differentiaaliyhtälön $y' = iy$ ratkaisuja samoilla alkuehdoilla, joten nämä funktiot ovat samat. Toisin sanoen

$$\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x. \tag{2}$$

Juuso halusi todentaa tämän vielä toisella tavalla, joten hän tutki taulukkokirjasta löytämiään Taylor-sarjoja

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \end{aligned}$$

ja

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \cdots.$$

Tekemällä viimeiseen sarjaan sijoituksen $x = ix$ ja muistamalla ominaisuuden $i^2 = -1$ Juuso sai muodostettua sarjojen välille yhteyden:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{ix} &= 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\ &= (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots) + i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots) \\ &= \cos x + i \sin x. \end{aligned}$$

Juuso sai näin todennettua kaavan (2).

$i^2 = -1$ tuntui Juusosta aluksi vaikealta ymmärtää, mutta koska luvun i avulla aidosti monotoninen funktio muuttui jaksolliseksi, i tuntuikin todella käyttökelpoiselta.

Kaavaa (2) käyttäen Juuso totesi

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

koska $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$.

Juuson suosikki oli kuitenkin yhtäsuuruus

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}. \tag{3}$$

Tämän yhtäsuuruuden Juuso sai seuraavasti: hän sijoitti $x = \frac{\pi}{2}$ kaavaan (2), ja sai

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2},$$

josta seurasi

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$$

Korotettuaan potenssiin i Juuso näki yhtäsuuruuden (3):

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0{,}2078795764\ldots.$$

Tämä näytti mielenkiintoiselta. Kun Juuso tarkasteli funktiota ($x > 0$)

$$f(x) = x^x = e^{x\ln x},$$

hän huomasi, että

$$f'(x) = e^{x\ln x}(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x).$$

$f'(x) = 0$, kun $x = \frac{1}{e}$. Tarkasteltavan reaaliarvoisen funktion minimi oli

$$f(\frac{1}{e}) = (\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}} = 0{,}6922006276\ldots,$$

eli i^i oli reaaliluku, joka oli pienempi kuin funktion x^x minimi, kun $x > 0$.

Seuraavaksi Juuso alkoi pohtia yhtälöä

$$s^{-s} = i^i = e^{-\frac{\pi}{2}},$$

jossa $s \in \mathbb{R}_+$.

Tämä voitiin kirjoittaa

$$s^s = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Juuso halusi ratkaista tästä yhtälöstä tuntemattoman s, joten hän kirjoitti (ottamalla puolittain luonnollisen logaritmin)

$$s\ln s = \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Koska yhtälön vasemmalla puolella olevan funktion $f(s) = s\ln s$ derivaatta $f'(s) = \ln s + 1$ oli negatiivinen, kun $s < \frac{1}{e}$, ja positiivinen, kun $s > \frac{1}{e}$, oli $f(s)$:llä kaksi monotonista haaraa. Näillä haaroilla täytyi siis olla käänteisfunktiot. Mikäli Juuso onnistuisi ratkaisemaan käänteisfunktion...

Erilaisten kokeilujen jälkeen Juuso huomasi, että hän ei onnistuisi löytämään käänteisfunktiota algebrallisin menetelmin. Tämä oli mielenkiintoista. Jos funktio oli aidosti monotoninen, sillä oli käänteisfunktio. Juuso ei olisi päässyt eteenpäin, ellei olisi muistanut avainsanoja – Lambertin funktio. Se määritellään funktion

$$f(x) = x\,e^x$$

käänteisfunktiona eli $f^{-1}(x) = W(x)$, jossa $W(x)$ on Lambertin funktio. Nyt Juuso palasi yhtälöön (4). Asettamalla $s = e^{\ln s}$ hän sai

$$e^{\ln s}\ln s = \frac{\pi}{2}.$$

Käyttämällä Lambertin funktiota Juuso kirjoitti

$$\ln s = W(\frac{\pi}{2}),$$

josta seurasi

$$s = e^{W(\frac{\pi}{2})}.$$

Juuso oli aina ollut innokas tietokoneen käyttäjä. WolframAlphalla (`http://www.wolframalpha.com/`) oli helppo laskea $s = 2{,}107299476\ldots$. Juuso oli niin innoissaan, että haki kreikan kielen aakkosista symbolin luvulle s. Hän merkitsi sitä nyt symbolilla ς ja listasi sen ominaisuuksia:

$$\varsigma^{-\varsigma} = i^i,$$
$$2\varsigma\ln\varsigma = \pi,$$
$$\varsigma^{\frac{2\varsigma}{\pi}} = e.$$

Tutustuessaan paljon puhuttuun Riemann-hypoteesiin Juuso oli törmännyt kaavaan

$$\prod_{p \text{ on alkuluku}} \frac{p^s}{p^s - 1} = \sum \frac{1}{n^s}.$$

Sijoittamalla vasemman puolen tuloon alkulukuja ja muuttujan s paikalle kokonaislukuja saattoi taulukkolaskentaohjelmallakin havaita, että kaava näytti pitävän paikkansa. Riemann oli kuitenkin asettanut $s = a + ib$. Siksi Juuso ryhtyi tarkastelemaan sellaisia kompleksilukuja, jotka syntyvät, kun reaaliluku korotetaan kompleksiluvun osoittamaan potenssiin.

Juuso merkitsi

$$z_{(x)} = x^{-x+ix}.$$

Kaavan (2) avulla hän laski

$$z_{(2)} = 2^{-2+i2} = 2^{-2}e^{2i\ln 2} = \frac{1}{4}(\cos(2\ln 2) + i\sin(2\ln 2))$$

$$z_{(3)} = 3^{-3+i3} = \frac{1}{27}(\cos(3\ln 3) + i\sin(3\ln 3))$$

Erityisesti Juuso ilahtui havaitessaan

$$z_{(\varsigma)} = \varsigma^{-\varsigma+i\varsigma} = i^i \, \mathrm{e}^{is \ln s} = i^i i = i^{i+1}.$$

Juuso innostui tästä niin, että määritteli kompleksiluvun z imaginaariyksikölliseksi, jos se voitiin esittää muodossa

$$z = i^{i+m},$$

jossa $m \in \mathbb{Z}$. Esimerkiksi jos $m = 0$, niin kompleksiluvun z imaginaariosa oli 0 ja, kun $m = 1$, reaaliosa oli 0.

Perin kauniilta näytti yhtäsuuruus

$$2{,}107299476\ldots^{-2{,}107299476\ldots+i2{,}107299476\ldots} = i \cdot i^i.$$

Oli hienoa nähdä, kuinka epämääräisen näköinen vasen puoli pelkistyi oikean puolen muotoon. Mutta pienikin muutos lukuun ς hävittäisi tämän ominaisuuden ja vastaukseksi tulisi kompleksiluku, jonka reaali- ja imaginaariosat olisivat nollasta eroavia.

Luettavaa

Bernhard Riemann: ”Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse”

John Derbyshire: ”Prime Obsession”

Matti Lehtinen: ”Matematiikan historia”

Solmun matematiikkadiplomit

Peruskoululaisille tarkoitetut Solmun matematiikkadiplomit I–IX tehtävineen ovat tulostettavissa osoitteessa

`http://solmu.math.helsinki.fi/diplomi.html`

Opettajalle lähetetään pyynnöstä vastaukset koulun sähköpostiin. Pyynnön voi lähettää osoitteella

marjatta.naatanen(at)helsinki.fi

Ym. osoitteessa on diplomitehtäville oheislukemistoa, joka varmasti kiinnostaa muitakin kuin diplomien tekijöitä:

Lukujärjestelmistä
Desimaaliluvut, mitä ne oikeastaan ovat?
Murtolukujen laskutoimituksia
Negatiivisista luvuista
Hiukan osittelulaista
Lausekkeet, kaavat ja yhtälöt
Äärettömistä joukoista
Erkki Luoma-aho: Matematiikan peruskäsitteiden historia
Gaussin jalanjäljissä
K. Väisälä: Algebra
Yläkoulun geometriaa
Geometrisen todistamisen harjoitus
K. Väisälä: Geometria
Lukuteorian diplomitehtävät