Solmu

Matematiikkalehti
1/2014

http://solmu.math.helsinki.fi

Solmu 1/2014

ISSN-L 1458-8048
ISSN 1459-0395 (Painettu)
ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)
00014 Helsingin yliopisto

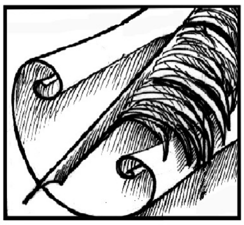
http://solmu.math.helsinki.fi

Numeroon 3/2014 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 1.9.2014 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.

Sisällys



Vähemmän on vähemmän

Pääkirjoitus

Uusimpien PISA-tulosten tultua julki on keskustelu koulumatematiikan tilasta jälleen kiihtynyt. Suomalaisten matematiikassa saavuttama tulos oli pudonnut viimekertaisesta noin puolen vuoden koulunkäyntiä vastaavalla pistemäärällä. Päässälaskutaidon ja jopa lukujen suuruusluokan arvioinnin pettäessä ei ole todennäköistä, että taidot jatko-opintojen edellyttämässä algebrassa ja geometriassa olisivat parantuneet. Todellisen matematiikan osaamisen kannalta tilanne on siis entistä huolestuttavampi. Ruotsin putoaminen vielä syvemmälle, jopa OECD-maiden keskiarvon alapuolelle, ei juuri lohduta. On selvää, että matematiikan opetusta on uudistettava. Ministerit ovat jo ehtineet puhua jopa vaatimustason nostamisesta, mikä kuulostaa lupaavalta. Toisaalta, Ylen A-studion PISA-keskustelussa 5.12. kuullun perusteella opetusministeri Kiurua tuntuisi enemmän huolettavan oppilaiden väliset erot kuin yleisen osaamisen heikkeneminen. Korjaavia toimia mietittäessä päällimmäiseksi keinoksi nousseekin viihde-elektroniikan tuominen matematiikan tunneille sekä sellaisen tehtäväaineksen löytäminen, mistä kaikki selviävät. Mainitussa studiokeskustelussa nähty PISA-kysymys lienee malliesimerkki tulevasta. Kysyttiin paljonko ruokaöljyä tarvitaan valmistettaessa 150 millilitraa salaatinkastiketta, kun sataan millilitraan kastiketta tarvitaan 60 millilitraa öljyä. Varmaankin älykkäimmät oppilaat kokivat testin pelleilyksi kuten studiokeskustelussa mukana ollut vuoden luokanopettajaksi valittu Kai-Ari Lundell, joka kieltäytyi vastaamasta mokomaan. Todellakin, miksi kymmeniä tuhansia oppilaita ympäri maailmaa organisoidaan koetilanteeseen vastaamaan kysymyksiin, joita 50 vuotta sitten miltei kuka tahansa kuusi luokkaa suomalaista kansakoulua käynyt olisi ratkaissut siltä seisomalta päässälaskuina? Kun vielä testi useimmissa korkean teknologian maissa meni ennakko-odotusten mukaisesti tunnetulla tavalla, herää kysymys, onko PISA-testaajien varsinaisena tavoitteena todentaa empiirisesti Oswald Spenglerin sata vuotta sitten teoksessaan [1] esittämä ajatus länsimaisen kulttuurin rappeutumisesta!

PISA-tulosten paraneminenkaan ei poista matematiikan oppimisen perimmäisiä ongelmia kouluistamme. Todellisiin tuloksiin pääseminen edellyttäisi monessa eri yhteydessä esitettyä ”matematiikan palauttamista matematiikan opetussuunnitelmiin”. Yläkoulussa se merkitsisi matematiikan opetuksen eriyttämistä. Näinä aikoina yläkouluun tulee yhä enemmän oppilaita, jotka ovat alaluokilla suorittaneet suuren suosion saavuttaneita Solmun matematiikkadiplomeja. Eriyttäminen tapahtuu luontevasti opastamalla nämä matematiikasta kiinnostuneet nuoret suorittamaan yläluokille laadittuja diplomitehtäviä sekä perehtymään niihin liittyviin oheiskirjoituksiin. Oppimateriaali on vapaasti ladattavissa Solmun nettisivulta [2]. Diplomitehtävien hyödyntäminen rajoittaisi myös kaupallisten valmennusfirmojen toimintaa ja antaisi vähävaraisemmankin perheen lahjakkaalle lapselle mahdollisuuden kehittää kykyjään toisen asteen opintoja ja myöhemmin korkeakouluopintoja paremmin vastaaviksi. Tässä järjestelyssä kaikki voittaisivat, sillä opettaja voisi nyt paremmalla omallatunnolla keskittyä myös heikompien tukemiseen.

Lukion osalta elämme ratkaisevia hetkiä. Tätä kirjoitettaessa (11.12.2013) ei tuntijakotyöryhmä, jonka työn piti olla valmis 2.12.2013 mennessä, ole vielä julkaissut esitystään. Jos työryhmä on ottanut huomioon matematiikan opetuksen asiantuntijoiden (MAOL, Aalto-yliopisto, Solmun toimituskunta) esittämät argumentit, niin jako pitkään ja lyhyeen matematiikkaan tulee säilymään ja kummankin opetussuunnitelmaa päästään kehittämään nykyistä paremmaksi. Jos sen sijaan työryhmä taipuu muualta tulleiden vaatimusten edessä ja yhdistää lukion matematiikan alkupään kaikille yhteiseksi, niin olemme jatkossa todistamassa matematiikan osaamisen romahtamista entisestään. Myös julkisuudessa esiintynyt reaaliaineiden korimalli heikentäisi fysiikan ja kemian opiskelua lukiossa, mikä heijastuisi myöhempiin korkeakouluopintoihin. MAOL on ottanut kantaa tähänkin heikennykseen, ks. [3].

Julkisuudessa on voimakkaasti tuotu esiin, että tietotekniikka, netti ja jopa kännykät olisi tuotava kiinteäksi osaksi matematiikan opetusta. Taulutietokoneista ja oppimispeleistä saattaa olla hyötyä aritmetiikan harjoittelussa ja lukiolainenkin voi ilmaiseksi hakea itselleen tukiopetusta esimerkiksi Khan akatemian [4] sivuilta, mutta matematiikan oppimista ei millään kouluasteella ole järkevää rakentaa kokonaan netin ja laskimien varaan. Asiantuntijat varoittavat. Kasvatustieteen professori Jari Lavonen toteaa Ylen välittämässä uutisessa [5], että ”maissa, joissa panostetaan oppilaiden ongelmanratkaisutaitoihin tai tutkimuksellisuuteen, ei saada yhtä hyviä PISA-tuloksia”, ja edelleen, ”kylmien numeroiden varassa näyttää siltä, että tietokoneet ja tällainen tutkiva oppiminen korreloivat negatiivisesti osaamisen kanssa.” Opettajien koulutuksessa työskentelevä Timo Tossavainen toteaa laajasti perustellen samoja asioita Helsingin Sanomissa julkaistussa vieraskynäkirjoituksessaan [6]: ”Tietokoneohjelmien liian vahva painottaminen oppimisessa johtaa pahimmillaan perustaitojen surkastumiseen.” Myös ylioppilastutkintolautakunnan kannattaisi vielä pohtia, onko järkevää teettää matematiikan, fysiikan ja kemian ylioppilaskokeet tietokoneilla. Onko nykyisessä järjestelmässä näiden aineiden osalta jotakin niin pahasti vialla, että uudistus katsotaan välttämättömäksi? Eivätkö sentään kynä, harppi, viivoitin ja paperi edelleen ole helpoimmat ja luonnollisimmat välineet matemaattisten ajatusten jäsentämiseksi lausekkeiksi, yhtälöiksi ja kuvioiksi? Kosmologi Syksy Räsänen nimeää Kotilieden [7] haastattelussa rakkaimmaksi esineekseen lyijytäytekynän, sillä ”pääosa fysiikan töistä tehdään edelleen kynällä ja paperilla.” Älykännykän näpelöinti sen sijaan ei kehitä edes käsien hienomotoriikkaa muuten kuin ehkä peukaloiden osalta. Toisaalta, jos pahimmat visiot matematiikan kouluopetuksessa toteutuvat, niin työpaikkojen karatessa muualle kotimaisen osaamattomuuden seurauksena peukaloiden pyörittely jäänee monelle tärkeimmäksi päivittäiseksi aktiviteetiksi.

Markku Halmetoja

Viitteet

[1] O. Spengler, Länsimaiden perikato: Maailmanhistorian morfologian ääriviivoja, Tammen klassikkopokkarit, 2002.

[2] http://solmu.math.helsinki.fi/diplomi.html

[3] http://www.luma.fi/artikkelit/2570/koriajattelu-uhka-yhteiskunnallemme

[4] https://www.khanacademy.org/

[5] http://yle.fi/uutiset/tietotekniikan_lisaaminen_kouluissa_saattaisi_vain_heikentaa_oppimistuloksia/6974545

[6] http://www.hs.fi/paakirjoitukset/Tietotekniikka+ei+ratkaise+peruskoulun+ongelmia/a1386143670498

[7] Kotiliesi 25/2013, s. 88.

Lukujärjestelmistä

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Mitä ovat lukujärjestelmät ja miksi?

Aika suuri osa matematiikkaa – vaikkei toki lähimainkaan kaikki – liittyy jollain tavalla laskemiseen ja lukuihin. Lukujakin on monenlaisia, mutta kaikki luvut perustuvat jollain tavalla niihin lukuihin, joilla ilmoitetaan lukumääriä: ihmisellä on kaksi silmää, koiralla neljä ja tuhatjalkaisella (ehkä?) tuhat jalkaa. Rahapussissa voi olla kymmenen euroa ja viikossa seitsemän päivää. Lukumäärää ilmaisevia lukuja on ruvettu kutsumaan *luonnollisiksi luvuiksi*.

Kun lukumääristä puhutaan, tarvitaan sanoja. Eri lukumäärille on kielissä sanoja: *yksi, kaksi, kolme, ...*; *ett, två, tre, ...*; *one, two, three, ...* jne. Lukumäärien ilmaisemiselle tulee kuitenkin periaatteellinen ongelma. Erilaisia lukumääriä on loputtomasti. Kaikille ei oikein mitenkään voi riittää erilaisia sanoja. Kieliin on muodostunut tapoja, joilla tätä vaikeutta voidaan kiertää. Annetaan oma sana jollekin lukumäärälle (kuten vaikka 'kymmenen', 'tusina' tai 'sata') ja isompia lukumääriä tarkoittavia rakennelmia kootaan niin, että ilmoitetaan isompia lukumääriä käyttämällä pienempiä lukumäärän nimiä ja tätä isomman lukumäärän nimitystä. Voidaan sanoa 'kolme tusinaa' tai 'viisisataa kaksikymmentä seitsemän'.

On aika luonnollista, että ihmisen mukana kulkevat lukumäärät ovat antaneet aiheen nimetä näitä oman sanansa saaneita lukumääriä. Meillä on kummassakin kädessä viisi sormea ja kummassakin jalassa viisi varvasta. Tuskin muuta syytä tarvitsee miettiä sille, että kymmenestä tuli suosittu peruslukumäärä; kun varpaat peittävät jalkineet lienevät ihmiskunnan historiassa uudehko keksintö, niin kaksikymmentäkin on ollut luonnollinen peruslukumäärä. Siitä on jäänteitä kielissä: suomessakin lukujen muodostus kahteenkymmeneen asti on erilainen kuin kahdestakymmenestä eteenpäin ja ranskassa vaikkapa lukusana kahdeksankymmentä muodostetaan sanomalla *quatre-vingt* eli 'neljä kahtakymmentä'.

Lukumäärien merkitseminen muistiin on ollut tärkeää ainakin yhtä kauan kuin kirjoitettua kieltä on käytetty. Sama periaate kuin lukusanojen muodostamisessa on vaikuttanut lukujen merkitsemisessä. Egyptin hieroglyfikirjoituksessa on oma merkkinsä 'yhdelle', 'kymmenelle', 'sadalle' jne., ja lukujen merkinnöissä on niin monta ykkösen, kymmenen, sadan jne. merkkiä kuin luvussa on ykkösiä, kymmeniä, satoja jne. Samaa periaatetta esiintyy muissa kielissä: tutuhkot roomalaiset numerot noudattavat periaatteessa tätä tapaa, hiukan muunneltuna: roomalaisissa numeroissa on oma merkkinsä viidelle, viidellekymmenelle ja viidellesadalle, ja merkkien järjestys on otettava huomioon.

Nuolenpääkirjoitusta parina ajanlaskumme alkua edeltäneenä vuosituhantena käyttäneet Mesopotamian eli suunnilleen nykyisen Irakin asukkaat, sumerilaiset, babylonialaiset ynnä muut, menettelivät pienten lukujen merkinnässä samoin kuin egyptiläiset, mutta he väistivät erään egyptiläiseen järjestelmään sisältyvän loogisen ongelman nerokkaalla tavalla. Jos toimitaan egyptiläisten tapaan, tarvitaan lopulta hyvin monta erilaista merkkiä. Jatkuuhan jono yksi, kymmenen, sata, tuhat jne. loputtomiin. Nuolenpääkirjoitukseen kehittyi ensimmäisenä niin sanottu paikkajärjestelmä. Numeromerkin arvon määrittää paitsi sen muoto, myös sen paikka merkkien jonossa. Mesopotamialaisten lukujärjestelmässä erityisasemassa oli luku kuusikymmentä. (Meille asti tämä on säilynyt tunnin tai kulma-asteen jaossa minuutteihin ja sekunteihin.) Sama kirjoitusmerkki tarkoitti lukuja yksi, kuusikymmentä tai kolmetuhatta kuusisataa ja toinen kirjoitusmerkki lukuja kaksi, satakaksikymmentä tai seitsemäntuhatta kaksisataa jne. Se, mistä oli kysymys, riippui siitä, kuinka monentena merkkinä lukumerkkien jonossa kyseinen merkki esiintyi. Mesopotamialaisessa järjestelmässä oli myös mahdollista merkitä murtolukuja: yhtä tai kuuttakymmentä tarkoittava merkki saattoi myös tarkoittaa yhtä kuudeskymmesosaa tai yhtä kolmastuhanneskuudessadasosaa.

Kun mesopotamialaiseen järjestelmään vielä liittyi lukumerkkien vähentäminen kymmeneen, ollaankin nykyajan lukujärjestelmässä, *kymmenjärjestelmässä*. Sen syntymäajaksi ja -paikaksi muodostui varhaiskeskiaika ja Intia. Tarvitsemme lukujen merkitsemiseen vain kymmenen merkkiä, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ja 0, desimaalierottimen, joka Suomessa on pilkku, mutta moniaalla piste, ja sopimuksen, jonka mukaan näistä merkeistä muodostettu jono tarkoittaa lukua, jonka suuruuden päättelemiseksi on ensin katsottava, kuinka monta merkkiä jonossa on, ja sitten tiedettävä, että esimerkiksi 4321 tarkoittaa yhteenlaskun 'neljä kertaa tuhat + 3 kertaa sata + 2 kertaa kymmenen + yksi' tulosta.

Olemme niin tottuneet kymmenjärjestelmään, että pidämme sitä jotenkin itsestään selvänä. Kun vähän ajattelee, huomaa, että yleisessä käytössä on muunkinlaisia tapoja ilmaista suuria lukuja niin, että ne on ikään kuin ryhmitelty pienemmiksi kokonaisuuksiksi. Vuodessa on 31 536 000 sekuntia. Kun kirjoitan tätä, vuoden alusta on kulunut noin 7 895 400 sekuntia. Voin kuitenkin sanoa tämän paljon havainnollisemmin kertomalla, että nyt on 2. huhtikuuta ja kello on 9.10. Ajan ilmauksissa minuutti on 60 sekuntia, tunti 60 minuuttia, vuorokausi 24 tuntia ja kuukausi vaihtelevasti 28, 29, 30 tai 31 vuorokautta. Aika mutkikasta, mutta tähänkin olemme tottuneet, samoin kuin anglosaksit tuumiin, jalkoihin, jaardeihin ja maileihin.

Kymmenjärjestelmän olennainen piirre on se, että suuremmissa kokonaisuuksissa on aina kymmenen kertaa niin monta yksilöä kuin lähinnä pienemmässä. Sata on kymmenen kertaa kymmenen ja tuhat on kymmenen kertaa sata eli kymmenen kertaa kymmenen kertaa kymmenen. Matematiikan merkintätapoihin on vakiintunut potenssimerkintä k^n osoittamaan sellaista kertolaskua, jossa sama luku k on tekijänä n kertaa. (Ja on havaittu käytännölliseksi sopia, että $k^0 = 1$.) Tätä merkintää käyttäen sata on 10^2 ja tuhat 10^3. Merkintä 6789 on itse asiassa lyhennys laskutoimitukselle

$$6 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0.$$

Sanomme, että lukujärjestelmämme *kantaluku* on kymmenen.

Lukujärjestelmän merkitys ei rajoitu pelkkään lukujen esittämiseen. Aritmetiikka onnistuu käytännössä siksi, että osaamme ulkoa yhteenlaskutaulun ja kertotaulun eli kaikki sellaiset summat $a+b$ ja tulot $a \cdot b$, missä a ja b ovat lukujen $0, 1, 2, \ldots, 9$ joukossa. Kahden luvun yhteenlaskussa käytämme itse asiassa hyväksi vaihdanta- ja osittelulakia. Kun esimerkiksi lasketaan (vaikkapa "allekkain") 537 + 261 tehdään (vaikkei sitä yleensä tiedosteta) näin:

$$\begin{aligned}(5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 7) &+ (2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 1)\\ &= (5+2) \cdot 10^2 + (3+6) \cdot 10 + (7+1)\\ &= 7 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 8 = 798\end{aligned}$$

ja kun kerrotaan $25 \cdot 36$, lasketaan itse asiassa

$$\begin{aligned}&(2 \cdot 10 + 5) \cdot (3 \cdot 10 + 6)\\ &\quad= 5 \cdot (3 \cdot 10 + 6) + 2 \cdot 10 \cdot (3 \cdot 10 + 6)\\ &\quad= (10+5) \cdot 10 + 3 \cdot 10 + 6 \cdot 10^2 + (10+2) \cdot 10\\ &\quad= 10^2 + (5+3+2) \cdot 10 + 6 \cdot 10^2 + 10^2\\ &\quad= 9 \cdot 10^2 = 900.\end{aligned}$$

Se, että tällaiset laskut perustuvat laskusääntöihin, voidaan käytännössä unohtaa, koska säännöt on rakennettu sisään alakoulussa opittuihin laskutapoihin.

Se, että lukuja merkitään juuri näin, on oikeastaan evoluution aiheuttama sattuma. Jos ihmisen sormien lukumäärä olisi esimerkiksi kuusi kummassakin kädessä (laivakissalla eli suokissalla sanotaan olevan kuusi varvasta joka tassussa) olisimme saattaneet johtua puhumaan ja merkitsemään lukuja niin, että peruslukumääriä olisivat 12, 144, 1728 jne. Se ei olisi varmaankaan juuri hankalampaa kuin tämä tapa, johon olemme tottuneet.

Mutta oikeastikin on tilanteita, joissa 10 ei ole luontevin lukujärjestelmän kantaluku. Elektronisissa laitteissa tiedon esitys perustuu usein johonkin osaseen, jolla on kaksi vaihtoehtoista tilaa, esimerkiksi "korkeampi jännite" ja "matalampi jännite". Usean tällaisen komponentin avulla voidaan esittää lukuja järjestelmässä, jonka kantaluku on kaksi. Tällaista lukujärjestelmää kutsutaan *binäärijärjestelmäksi*. Binäärijärjestelmän "usean kappaleen" lukumäärät ovat kaksi, neljä, kahdeksan, kuusitoista jne. eli $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$ Jokaisesta tällaisesta lukumäärästä on tarpeen tietää vain, onko se mukana vai ei. Tarvitaan siis vain kaksi numeromerkkiä, jotka voivat olla 0 ja 1. Kun binäärijärjestelmään yhdistetään paikkajärjestelmä ja kymmenjärjestelmästä tuttu järjestys, huomataan, että kaikki positiiviset kokonaisluvut voidaan muodostaa ykkösien ja nollien jonoina. Esimerkiksi 101 on

$$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 5$$

ja 11111011101 on

$$2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 1 = 2013.$$

Binäärijärjestelmä on kaikista lukujärjestelmistä yksinkertaisin. Yhteenlasku- ja kertotaulut ovat äärimmäisen pelkistettyjä: $0+0=0$, $1+0=0+1=1$, $1+1=10$; $0\cdot 0 = 0\cdot 1 = 1\cdot 0 = 0$, $1\cdot 1 = 1$. Tämä on hyvä asia, kun suunnitellaan elektronisia laskimia. Binäärijärjestelmän haittapuoli on se, että varsinkin isomman luvun esitykseen tarvitaan monta merkkiä. Kun kaikki alle 10 miljardin luvut voidaan kirjoittaa kymmenellä tavallisella numeromerkillä, tarvitaan lähellä lukua 10^{10} olevien lukujen kirjoittamiseen 34 binäärimerkin jonoja. Binäärijärjestelmän ohella ovatkin tulleet käyttöön kantalukuun 8 perustuva *oktaalijärjestelmä* ja kantalukuun 16 perustuva *heksadesimaalijärjestelmä*.

Oktaali- niin kuin binäärijärjestelmässäkin selvitään tutuilla numeromerkeillä. Oktaalijärjestelmän numerot ovat 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ja 7, lukua 8 merkitään 10 (siis $1\cdot 8^1 + 0\cdot 8^0$) ja

$$144_8 = 8^2 + 4\cdot 8 + 4 = 64 + 32 + 4 = 100.$$

Tässä on tarpeen käyttää lukujärjestelmän ilmaisevaa alaindeksiä. Heksadesimaalijärjestelmässä tarvitaan 16 numeromerkkiä. Sen sijaan, että olisi keksitty aivan uusia kuvioita, on otettu numeroiksi "10", "11", "12", "13", "14" ja "15" kirjaimet A, B, C, D, E ja F. Esimerkiksi $7DD_{16} = 7\cdot 16^2 + 13\cdot 16 + 13 = 2013$.

Lukujärjestelmän matematiikkaa

Kymmenjärjestelmän, binäärijärjestelmän, oktaalijärjestelmän ja heksadesimaalijärjestelmän yhteinen ominaisuus on se, että mitä tahansa luonnollista lukua x merkitään jonolla, jonka jäsenet ovat tosiasiassa yhtälössä

$$x = a_n q^n + a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2} + \cdots + a_1 q + a_0 \quad (1)$$

esiintyvät kertoimet $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$. Lisäksi q on jokin luvuista 10, 2, 8 tai 16, $a_n \neq 0$ ja jokainen luku a_k on jokin luvuista $0, 1, \ldots, q-1$. Yhtälö (1) lisäehtoineen on aivan yhtä mielekäs kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla $q > 1$.

Olemme niin tottuneet kymmenjärjestelmäämme, että mielessämme helposti samastamme luvun ja sen, miten tämän luvun kymmenjärjestelmässä ilmaisemme. Oikeasti kuitenkin luvut ovat jotain sellaista, joka on olemassa aivan riippumatta siitä, millä tavoin niitä nimitämme tai kirjoitamme. Siispä on ihan järkevää kysyä, onko jokaisella luonnollisella luvulla kymmenjärjestelmäesitys ja vain yksi sellainen. Mutta tähän kysymykseen saadaan vastaus, jos kysytään yleisemmin, onko jokaisella luonnollisella luvulla yksi ja vain yksi esitys q-järjestelmässä, kun q on mikä tahansa ykköstä suurempi kokonaisluku.

Tällaisiin kysymyksiin vastaaminen edellyttää eräänlaista tikapuuperiaatetta. Matematiikassa sitä kutsutaan *induktioksi*. Osoittaaksemme, että jokaisella luonnollisella luvulla x on kaavan (1) mukainen esitys, emme voi käydä yksitellen läpi kaikkia luonnollisia lukuja x, koska niitä on äärettömän paljon. Sen sijaan menettelemme tavalla, joka takaa sen, että väitteemme pätee kaikilla x. Lähdemme siitä, että väite pätee, kun $0 \le x \le q-1$: silloin ainoa tapa saada yhtälö (1) ehtoineen pätemään on valita $n = 0$ ja $a_0 = x$. Seuraavaksi oletamme, että väitteemme pätee kaikille niille luvuille x, joille on voimassa $0 \le x \le q^{n+1} - 1$. (Emme tästä ole vielä varmoja, mutta oletamme.) Jos nyt y on luku, joka on $\ge q^{n+1}$, mutta $< q^{n+2} - 1$, niin $y - q^{n+1}$ on luku, joka on pienempi kuin

$$q^{n+2} - 1 - q^{n+1} = (q-1)q^{n+1} - 1.$$

Mutta silloin on olemassa tasan yksi sellainen p, $0 \le p < q-1$, että

$$p\cdot q^{n+1} \le y - q^{n+1} < (p+1)\cdot q^{n+1}$$

eli

$$0 \le y - (p+1)q^{n+1} \le q^{n+1} - 1.$$

Jos edellä tehty oletus on oikea, niin luvulla $y - (p+1)q^{n+1}$ on esitys q-järjestelmässä. Mutta silloinhan myös luvulla y on tällainen esitys.

Mutta onko oletus oikea? Tässä tulevat ne tikapuut. Oletus on varmasti oikea, kun $n = 0$, senhän aluksi huomasimme. Siispä esittämämme väite on oikea, kun $n = 1$. Koska se on oikea, kun $n = 1$, se on oikea, kun $n = 2$. Näin voidaan jatkaa loputta. Väite on siis kaikkiaan oikea: jokaisella luonnollisella luvulla on esitys q-järjestelmässä, oli q mikä tahansa ykköstä suurempi luonnollinen luku.

Mutta voiko kahdella eri luvulla olla sama esitys? Onneksi ei. Tämän voimme todistaa epäsuorasti, osoittamalla, että jos kaksi eri esitystä olisi, syntyisi ristiriita. Ja sellaista ei matematiikka salli.

Mutta oletetaanpa, että jollakin luvulla x olisi kaksi eri esitystä q-järjestelmässä:

$$\begin{aligned} x &= a_n q^n + a_{n-1}q^{n-1} + \cdots + a_1 q + a_0 \\ &= b_m q^m + b_{m-1}q^{m-1} + \cdots + b_1 q + b_0. \end{aligned}$$

Jos $n \neq m$, voidaan toiseen esitykseen lisätä alkuun kertoimia, jotka ovat nollia, ja täten päästä tilanteeseen, jossa $m = n$. Olkoon sitten k suurin niistä luvuista i, joille $a_i \neq b_i$. Voidaan olettaa, että $a_k > b_k$. Tarkastellaan lukua

$$\begin{aligned} 0 = c - c = (a_k - b_k)q^k + (a_{k-1} - b_{k-1})q^{k-1} + \\ \cdots + (a_1 - b_1)q + (a_0 - b_0). \quad (2) \end{aligned}$$

Jokainen luku $a_i - b_i$ on kahden joukkoon

$$\{0, 1, \ldots, q-1\}$$

kuuluvan luvun erotus. Siis $|a_i - b_i| \leq (q-1)$ ja

$$|(a_{k-1} - b_{k-1})q^{k-1} + \cdots + (a_0 - b_0)| \leq q^k - 1.$$

Toisaalta $(a_k - b_k)q^k \geq q^k$. Mutta tämä merkitsee sitä, että yhtälö (2) ei voi olla tosi. Oletus, että c:llä olisi kaksi eri esitystä q-kantaisessa lukujärjestelmässä johti ristiriitaan, joten sen täytyy olla väärä.

Lukujärjestelmästä toiseen

Jossain q-järjestelmässä lausutun luvun siirtäminen kymmenjärjestelmään onnistuu suoraan kaavan (1) avulla. On tiedettävä (tai laskettava) potenssit q^k ja suoritettava kaavan (1) kerto- ja yhteenlaskut. Sama olisi mahdollista myös silloin, kun siirrytään vaikkapa 10-järjestelmästä q-järjestelmään: nyt tarvitaan lukujen 10^k ja $0, 1, 2, \ldots, 9$ muodot q-järjestelmässä ja q-järjestelmän yhteenlasku- ja kertolaskutaulut. Esimerkiksi binäärijärjestelmässä on $2 = 10_2$, $3 = 11_2$, $4 = 100_2$, $5 = 101_2$, $6 = 110_2$, $7 = 111_2$, $8 = 1000_2$, $9 = 1001_2$, $10 = 1010_2$, $10^2 = 1010_2 \cdot 1010_2 = 1100100_2$, $10^3 = (1010_2) \cdot (110010)_2 = 1111101000_2$ jne. Siten

$$2013 = 10_2 \cdot 1111101000_2 + 1010_2 + 11_2 = 11111011101_2.$$

(Jos suorittaa laskut "allekkain", huomaa, miten yksinkertaista on laskea binäärisesti.)

Ehkäpä kuitenkin tavanomaisempi tapa siirtyä kymmenjärjestelmästä q-järjestelmään on noudattaa samaa ajatuskulkua, jota edellä käytimme luvun q-järjestelmäesityksen olemassaolon päättelemiseen. Jos x on jokin luku, selvitetään ensin ne q:n peräkkäiset potenssit, joiden välissä x on: $q^n \leq x < q^{n+1}$. Jakolasku x/q^n johtaa jakoyhtälöön: $x = a_n q^n + r_n$, missä nyt kokonaisluku a_n on ainakin 1, mutta enintään $q-1$, ja jakojäännös r_n on pienempi kuin q^n. Tiedämme, että x:n q-järjestelmäesityksen ensimmäinen "numero" on a_n. Seuraava tai seuraavat numerot saadaan, kun haetaan ne q:n potenssit q^k ja q^{k+1}, joiden välissä r_n on, ja toistetaan jakolasku ja jakojäännöksen muodostaminen. Näin esimerkiksi 2013 siirtyisi oktaalijärjestelmään seuraavasti: $8^3 = 512$ ja $8^4 = 2048$. $2013 = 3 \cdot 512 + 477$; $8^2 = 64 \leq 477 < 8^3$; $477 = 4 \cdot 64 + 29$; $29 = 3 \cdot 8 + 5$. Siis $2013 = 3735_8$.

Lukujärjestelmästä toiseen siirtyminen on erityisen yksinkertaista silloin, kun toinen kantaluku on toisen potenssi. Jos luvut kirjoitettaisiin 100-kantaisessa järjestelmässä, "numeroita" voisivat olla

$$00, 01, 02, \ldots, 09, 10, 11, \ldots, 99$$

ja luvun 10- ja 100-kantaiset esitykset näyttäisivät koko lailla samoilta. Tämä ilmiö tulee vastaan etenkin silloin, kun siirrytään binäärijärjestelmästä oktaali- tai heksadesimaalijärjestelmään. Edellä luvun 2013 kirjoitetusta oktaaliesityksestä saadaan aikaisempi binääriesitys kirjoittamalla peräkkäin $11_2 = 3_8$, $111_2 = 7_8$, $011_2 = 3_8$ ja $110_2 = 5_8$ ja binääriesityksestä oktaaliesitys ryhmittelemällä binääriesityksen numerot kolmen ryhmiin (oikealta alkaen) ja tulkitsemalla kunkin ryhmän osoittama binääriluku oktaaliluvuksi. Samoin tästä esityksestä 11111011101_2 saadaan luvun 2013 heksadesimaaliesitys ryhmittelemällä jono oikealta alkaen neljän ryhmiin ja muuttamalla nämä heksadesimaaliluvuiksi: $1101_2 = 13 = D_{16}$, $111_2 = 7_{16}$. Siis $2016 = 7DD_{16}$.

* * *

Tämän kirjoituksen aihepiiristä löytyy lisää tietoa Solmusta, esimerkiksi suomen ja suomensukuisten kielten lukusanoista:

`http://solmu.math.helsinki.fi/2001/2/suihkonen/suihkonen.pdf`

ja roomalaisten tavasta merkitä numeroita:

`http://solmu.math.helsinki.fi/2000/2/lehtinen/lehtinen.pdf`

Myös Solmun Unkari-aineistossa,

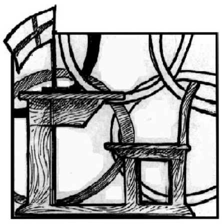
`http://solmu.math.helsinki.fi/2002/unkari/luento5a.html`

on lukujärjestelmiin liittyvää asiaa.

Uutta Verkko-Solmun oppimateriaalisivulla

Teuvo Laurinollin kirjanen *Ensiaskeleet Einsteinin avaruusaikaan, osa 1: Kinematiikka: aika, paikka ja liike* on ilmestynyt osoitteessa

`http://solmu.math.helsinki.fi/oppimateriaalit.html`



Kilpailutehtäviä geometriasta

Heikki Pokela
Tapiolan lukio

Edellisten tehtävien (Solmu 2/2013) ratkaisuja

Baltian tie -joukkuematematiikkakilpailussa kysyttiin seuraavaa funktionaalitehtävää. Tehtävä on siis vuodelta 1992, kuten tehtävänannosta saattaa päätellä.

Olkoon $a = \sqrt[1992]{1992}$. *Kumpi luvuista*

$$a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}} \text{ vai } 1992$$

on suurempi? Yhtälön vasemmalla puolella on 1992 kappaletta a-kirjaimia.

Ratkaistaan tehtävä sisäkkäisten funktioiden avulla. Merkitään $f(x) = a^x$, joka on eksponenttifunktiona kasvava, sillä kantaluvuksi tässä määritelty $a = \sqrt[1992]{1992} > 1$. $1992 > \sqrt[1992]{1992}$, joten kasvavuudesta seuraa $f(1992) > a$ (ja $f(1992) = 1992$). Nyt saadaan pääteltyä, että

$$\begin{aligned} 1992 &= \underbrace{f(f(f(\ldots f(1992)\ldots)))}_{1992 \text{ kpl}} \\ &> f(f(f\ldots f(a)\ldots)) = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}, \end{aligned}$$

joten 1992 on suurempi.

Pohjoismaisessa matematiikkakilpailussa vuonna 1991 ensimmäisenä tehtävänä kysyttiin seuraavaa. Myös tässä vuosiluku on mukana tehtävänannossa, eikä sillä ole olennaista merkitystä ratkaisun rakenteeseen – joskus toki voi olla.

Määritä luvun

$$2^5 + 2^{5^2} + 2^{5^3} + \ldots + 2^{5^{1991}}$$

kaksi viimeistä numeroa, kun luku kirjoitetaan kymmenjärjestelmässä.

Vaikka tehtävässä on kysymys usean luvun summan numeroista, lienee syytä aloittaa tarkastelemalla yksittäisten 2^{5^k}-termien viimeisiä numeroita. Helposti nähdään, että termi on 32, jos $k = 1$, ja pienen laskemisen jälkeen havaitaan termin päättyvän numeroihin 32 myös, kun $k = 2$. Voidaan siis epäillä tämän olevan totta kaikilla k:n arvoilla. Todistetaan induktiolla: kun $k = 1$, $2^{5^1} = 32$. Seuraavaksi oletetaan, että 2^{5^k} on muotoa $100r + 32$. Silloin

$$2^{5^{k+1}} = (2^{5^k})^5 = (100r + 32)^5 = 100s + 32^5.$$

Viimeinen yhtäsuuruus edellisessä tulee binomikaavasta, sillä avattaessa sulkulauseke kaikissa muissa termeissä paitsi viimeisessä (32^5) luku 100 on vähintään yhden kerran tekijänä. Tarkastellaan viimeinen termi muodossa $(30 + 2)^5$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} &30^5 + 5 \cdot 30^4 \cdot 2 + 10 \cdot 30^3 \cdot 4 \\ &\quad + 10 \cdot 30^2 \cdot 8 + 5 \cdot 30 \cdot 16 + 32 = 100t + 32. \end{aligned}$$

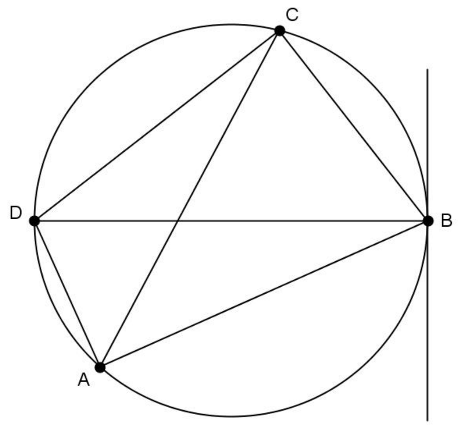
Luvut r, s ja t ovat positiivisia kokonaislukuja. Induktio on valmis. Koska tehtävänannon summassa jokaisen termin viimeiset numerot ovat 32, summan kaksi viimeistä numeroa saadaan lukujen 1991 ja 32 tulosta eli viimeiset kaksi numeroa summassa ovat 12.

Lukuteorian aihealueelta kilpailuissa induktio ja kongruenssin laskusäännöt ovat ehkä useimmin tarpeen. Myös parillisuus, alkulukujen ominaisuudet ja Fermat'n pieni lause kuuluvat perustyövälineistöön.

Kilpailugeometrian alkeita

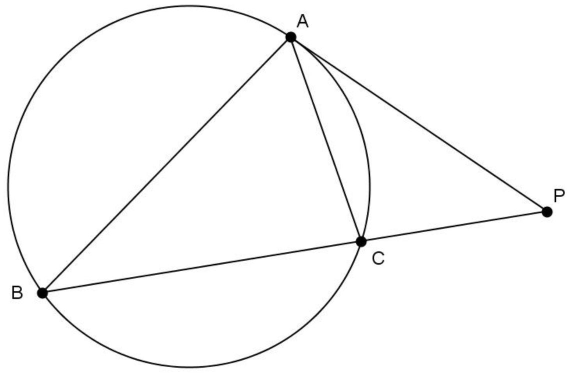
Geometrialla on matematiikkakilpailuissa vankka asema. Useiden maiden opetussuunnitelmissa tasogeometrian väittämien todistamiseen panostetaan huomattavasti suomalaista (nyky)koulujärjestelmää enemmän. Tasogeometriaa pidetään edelleen verrattomana koulumatematiikan osa-alueena, jolla pohjustetaan matematiikan rakenteiden ymmärtämistä.

Pitkän matematiikan kurssilla 3 tutustutaan kehäkulmien perusominaisuuksiin, jotka oletetaan tässä tunnetuiksi. Osa aktiivisista lukiolaisista on opiskellut aihepiiriä jo yläkoulussa. Osoitetaan jatkoa varten kolmion minkä tahansa kulman yhtäsuuruus viereisen kulman ja kolmion ympäri piirretyn ympyrän tangentin välille.



Kehäkulmatarkastelun perusteella kolmion ABC kulma $\angle ACB = \angle ADB$, missä D on valittu kehältä siten, että jana DB on ympyrän halkaisija. Tällöin kolmio ADB on suorakulmainen ja pisteeseen B piirretty ympyrän tangentti on kohtisuorassa janan DB kanssa. Koska $\angle DBA = \frac{\pi}{2} - \angle ADB$, janan AB ja tangentin välinen kulma on oltava yhtä suuri kuin $\angle ADB$ – ja yhtä kuin $\angle ACB$.

Pisteen potenssi on paitsi hyödyllinen työkalu tasogeometrian tehtävissä myös melko helppo johtaa. Piirretään ympyrän ulkopuolisesta pisteestä P tangentti ympyrälle. Merkitään tangenttipistettä A:lla ja piirretään lisäksi pisteestä P jana mielivaltaiseen ympyrän pisteeseen B. Merkitään janan ja ympyrän toista leikkauspistettä C:llä.



Tangenttikulmalle pätee edellisen perusteella $\angle CBA = \angle CAP$, joten kolmiot PAB ja PCA ovat yhdenmuotoisia (kk). Vastinsivujen verrannosta

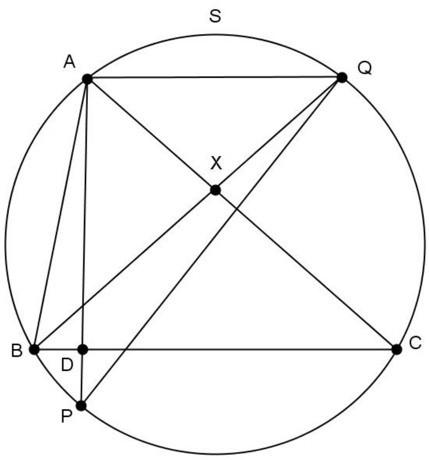
$$\frac{PC}{PA} = \frac{PA}{PB}$$

saadaan $PA^2 = PC \cdot PB$.

MAOL-alkukilpailun 2013 välisarjan geometrian tehtävä

Lukion toisen vuosikurssin oppilaiden sarjassa neljäntenä tehtävänä oli varsin perinteinen ympyräoppiin liittyvä ongelma.

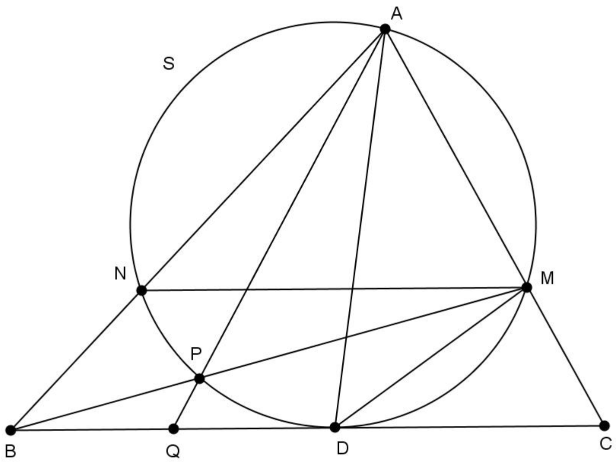
Kolmiolle ABC pätee $AB < AC$. Olkoon tämän kolmion ympäri piirretty ympyrä S. Pisteestä A piirretty kohtisuora janalle BC kohtaa ympyrän S uudestaan pisteessä P. Piste X sijaitsee janalla AC, ja janan BX jatke kohtaa ympyrän S pisteessä Q. Osoita, että jos $BX = CX$, niin PQ on ympyrän S halkaisija.



Ehto $BX = CX$ tekee kolmiosta BXC tasakylkisen, joten $\angle XCB = \angle XBC = \angle CAQ$, missä viimeisin yhtäsuuruusmerkki saadaan kehää CQ vastaavista kehäkulmista. Samankohtaisista kulmista voimme päätellä, että $BC \parallel AQ$. Koska jana AP on kohtisuorassa janaa BC vastaan, kulman $\angle PAQ$ on myös oltava suora. Suorakulmaisena kolmiona APQ:n hypotenuusa PQ on välttämättä ympyrän halkaisija.

Geometriaa Lähi-idästä

Kolmion ABC kulman $\angle BAC$ puolittaja kohtaa sivun BC pisteessä D. Oletetaan, että ympyrä S, jonka tangentti on jana BC pisteessä D, kulkee pisteen A kautta. Lisäksi ympyrä S leikkaa janat AC ja AB pisteissä M ja N, vastaavasti. Jana BM leikkaa ympyrän pisteessä P ja janan AP jatke kohtaa janan BC pisteessä Q. Osoita, että AQ on kolmion ABD keskijana. (Kilpailutehtävä Iranista 1999.)



Kuvan ympyrän sisällä kaarta AM vastaavat kehäkulmat ovat keskenään yhtä suuria, joten riittää saada yksi niistä lausutuksi kolmion ABC kulmien avulla. Aiemmin esitetyn perusteella $\angle DAM = \frac{1}{2}\angle A = \angle MDC$. Saamme

$$\begin{aligned}\angle ADM &= \angle ADC - \angle MDC \\ &= (\pi - \angle CAD - \angle DCA) - \angle MDC \\ &= (\pi - \frac{1}{2}\angle A - \angle C) - \frac{1}{2}\angle A \\ &= \pi - \angle A - \angle C = \angle B.\end{aligned}$$

Kehä- ja ristikulmien sekä edellisen avulla $\angle BPQ = \angle APM = \angle ADM = \angle B$. Kahden yhtäsuuren kulman perusteella kolmiot ABQ ja BPQ ovat yhdenmuotoisia, joten niille pätee vastinsivujen verranto

$$\frac{BQ}{QA} = \frac{QP}{BQ},$$

mistä saadaan $BQ^2 = QP \cdot QA$. Aiemmin esitetyn pisteen potenssin perusteella $QD^2 = QP \cdot QA$, eli yhdistämällä tulokset $BQ = QD$, joten AQ on kolmion ABD keskijana.

Kotitehtävä

Aktiiviselle lukiolaiselle jätetään ratkottavaksi vanha sveitsiläinen kilpatehtävä:

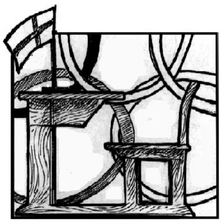
Kaksi ympyrää leikkaavat toisensa pisteissä M ja N. Valitaan ensimmäiseltä ympyrältä mielivaltainen piste A, joka ei ole M tai N. Suorat AM ja AN leikkaavat toisen ympyrän myös pisteissä B ja C, vastaavasti. Osoita, että ensimmäiselle ympyrälle pisteeseen A piirretty tangentti on yhdensuuntainen suoran BC kanssa.

Ratkaisu esitettäneen jossakin tulevassa Solmussa.

Kehäkulmien ominaisuuksien, yhdenmuotoisuuden ja pisteen potenssin lisäksi tasogeometriasta matematiikkakilpailuihin harjoittelevan lukiolaisen kannattaa opetella ainakin Menelaoksen ja Cevan lauseet. Myös kolmion merkillisten pisteiden ominaisuuksien todentaminen on mahdollista koulumatematiikan keinoin. Materiaalia oppimisen tueksi on saatavissa nykyään melko runsaasti Solmun verkkosivuilta, esimerkiksi edellä mainitut lauseet löytyvät osoitteesta `http://solmu.math.helsinki.fi/olympia/kirjallisuus/nimigeom.pdf`

Avoimia matematiikan oppikirjoja verkossa

Osoitteesta `http://avoinoppikirja.fi` löytyy avoimia yläkoulun ja lukion matematiikan oppikirjoja.



Matematiikkadiplomit syksyllä 2013

Marjatta Näätänen
Helsingin yliopisto

Syksyllä 2013 valmistui viimeinen peruskoulun, eli yhdeksäs matematiikkadiplomi ja Dimensio julkaisi syksyn numerossaan kirjoitukseni matematiikkadiplomeista. Elo–lokakuussa tuli uusia vastauspyyntöjä seuraavilta paikkakunnilta: Seinäjoki, Parkano, Oulu, Lappeenranta, Posio, Raahe, Jyväskylä, Tuusula, Helsinki, Salo, Huittinen, Ikaalinen, Kannus, Vantaa, Espoo, Laukaa, Nousiainen, Hollola, Kurikka, Tampere, Nurmes, Siilinjärvi, Pyhäjärvi, Ulvila, Pirkkala, Orimattila, Kuopio, Kokkola, joiltakin näistä useammista kouluista.

Palautetta opettajilta

Vastauksia pyytäessään jotkut opettajat kertovat samalla kommentteja diplomeista ja niiden käytöstä koulussaan:

- Ryhmässä on nimenomaan useita innostuneita tyttöjä, jotka haluavat päästä laskemaan.
- Kaiken kaikkiaan ihan mahtava idea.
- Ajan puute tuli viime vuonna, nyt aloitamme heti lukukauden alussa.
- Hyvä idea, saimme heti läjäpäin innostuneita diplomien aloittajia, vaikka olemmekin yläkoulu.
- Olen vasta löytänyt nämä upeat matematiikkadiplomit, kiitos MAOL:n Dimensio -lehden. Ajatus on tosi hieno.
- Diplomit on otettu innokkaasti vastaan oppilaiden keskuudessa.
- Minulla on yksi innostunut oppilas, uskon että myös muut oppilaat innostuvat tästä.
- Olemme innokkaina haastaneet oppilaat matikan maailmaan matematiikkadiplomien merkeissä.
- Koulullamme on sisäilmaongelmia, olemme evakossa. Tämä voi haitata, mutta meillä on niin monta innokasta oppilasta, että yritämme ainakin diplomien suorittamista.
- Meillä on pari innostunutta oppilasta.
- Muutamat suorittavat. Ihan mahtavia tehtäviä!
- Hienoa, että tällainenkin on kehitetty!
- Mielenkiintoisia tehtäviä, piti itsekin alkaa paria tehtävää jo heti ratkaista.
- Upeaa, että olette tehneet tällaisen työn ja toivottavasti nämä diplomit löytävät paljon tekijöitä!
- Aikaisemmin toisessa koulussa diplomitehtäviä laskeneet oppilaat ovat pyytäneet, että saavat jatkaa diplomeja uudessa koulussaan.
- Tehtävät ovat mielenkiintoisia ja monipuolisia.
- Oppilaat laskevat innoissaan.
- Juuri tällaisia tehtäväkokoelmia tarvitaan.

- Tehtävät antavat mahdollisuuden eriyttää, myös ylöspäin.
- Hyvä, että on myös haastavia tehtäviä.
- Matikkadiplomit ovat hieno juttu. Toivottavasti moni osaa ottaa ne käyttöön.

Opettajien kysymyksiä

Opettajat kysyvät toisinaan, miltä tasolta olisi hyvä aloittaa. Tehdäänkö yksi diplomi vuodessa? Antaako opettaja vinkkejä, vai onko ratkaisut keksittävä aivan itse?

Tehtävät eivät ole tiukasti luokka-asteisiin sidottuja. Olisi hyvä yrittää löytää kullekin oppilaalle sopiva taso. Joku oppilas voi olla niin nopea ja innostunut, että ratkoo useampienkin diplomien tehtävät yhdessä vuodessa. Tärkeintä on, että innostus herää ja säilyy, haasteiden tulisi olla sopivia. On hyvä, jos oppilas itse löytää ratkaisun, mutta yhteistyökin on sallittua. Silloin oppilaat joutuvat myös pukemaan ajattelunsa sanoiksi, mikä selkiyttää ajattelua. Tarvittaessa opettaja voi antaa vihjeitä, ellei muuten edetä. Tärkeää olisi aina selvittää mahdolliset virheet.

Opettajat voivat pyytää vastauksia koulun sähköpostiin. Vastaukset on tarkoitettu kullekin koululle, opettajien yhteiseen käyttöön. Suositeltavaa on tulostaa vastaukset omaan Diplomikansioon ja poistaa tiedostot koneelta. Koulun ulkopuolelle ei ratkaisuja tule antaa. Jos muut koulut haluavat ratkaisuja, täältä voi pyytää. Seuraan samalla myös diplomien leviämistä.

Miten diplomeja käytetään?

Ala-asteella yleensä koko luokka aloittaa diplomitehtävien ratkaisemisen, yläasteella harvemmin tasoerojen kasvamisen takia. Tehtävillä voi kuitenkin eriyttää, eri oppilaille voi antaa omaa tasoa vastaavan diplomin tehtävät. Opettajat ovatkin kiittäneet mahdollisuudesta eriyttää myös ylöspäin ja matemaattisen yleissivistyksen lisäämisestä. Muutamilla on matematiikkakerhoja, joissa diplomitehtäviä ratkotaan. Myös erityisopetuksessa diplomeja käytetään.

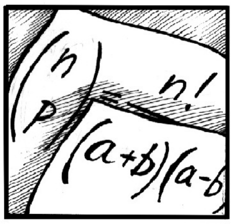
Aivovoimistelua Englannin lehdistä

Täytä valkoiset tyhjät ruudut käyttäen lukuja $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ siten, että kunkin rivin ja kunkin sarakkeen laskutoimitusten tulokseksi tulee kyseisen rivin oikealla puolella tai sarakkeen alla annettu luku. Harmaisiin ruutuihin ei kirjoiteta mitään. Kukin luvuista $1 - 9$ saa esiintyä ruudukossa vain kerran. Laskutoimitusten järjestys on vasemmalta oikealle ja ylhäältä alas.

5	−		−		−9
+		−		+	
	:		−		2
+		−		−	
7	−		−		−5
16		−2		1	

	×		−		41
×		×		−	
	−		−		1
+		×		×	
	:	3	×		12
57		42		−16	

Tehtävät lähetti Matti Seppälä.



Ihan vääriä järjestyksiä!

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Elli Mikkosen ongelma ja sen historiaa

Matemaattisten Aineiden Opettajien Liiton Dimensio-lehden numerossa 6/2013 on Kajaanin lukion lehtorin Jorma Myllylän kirjoitus *Kombinaatio-oppia luonnollisesti*. Se on hyvä kuvaus matemaattisen ongelman ratkaisun löytymisen vaiheista.

Myllylä kertoo, että kun hän opettaa todennäköisyyslaskennan kurssia, niin aluksi oppilaat saavat miettiä todennäköisyyteen liittyviä kysymyksiä, joista muotoutuu tehtäviä. Kun kurssi etenee ja keinoja opitaan, niin tehtäviin alkaa löytyä ratkaisuja. Viimeksi pidetyn kurssin alussa Myllylän oppilas Elli Mikkonen oli esittänyt mielenkiintoisen ongelman: ”Joukko ihmisiä kirjoittaa nimensä lappuun, laput sekoitetaan ja samat ihmiset ottavat kukin yhden lapun. Millä todennäköisyydellä kukaan ei saa omaa lappuaan?” Lehtori Myllylä oli arvioinut tehtävän aika vaativaksi. Asian yksinkertaistamiseksi hän täsmensi kysymyksen niin, että ihmisiä on kahdeksan.

Myllylä oli ongelmaa mietiskellyt, mutta se ei ollut helposti auennut. Niinpä hän oli ruvennut kyselemään kollegoiltaan, ja Mika Kemppainen olikin kertonut Myllylälle ratkaisun. Se oli palautuskaava, ja Myllylän tyytykseksi kaava antoi samat vastaukset pienille ihmismäärille kuin mihin Myllylä oli mahdolliset tapahtumat laskemalla päätynyt. Palautuskaavan antama todennäköisyys näytti ihmisten lukumäärän kasvaessa nopeasti konvergoivan kohti lukua 0,367879441, ja kun Myllylä kokeili laskimellaan, niin hän huomasi, että tuon luvun luonnollinen logaritmi on jokseenkin tasan -1. Todennäköisyys lähestyy siis lukua $\frac{1}{e}$! Myllylän kolleega Kemppainen oli sitten tuonut esiin tämän numeerisen havainnon varmistavan todistuksenkin, mutta sitä ei Dimension kirjoituksessa esitetty.

Elli Mikkonen ei ole ensimmäinen tämän kysymyksen esittäjä. Itseäni vastaan se taisi tulla ensimmäisen kerran 1960-luvun puolivälissä, kun Helsingin yliopiston matematiikan opiskelijoiden ainejärjestö Limeksen Sykloidi-lehdessä oli artikkeli ”Eulerin ongelma väärin postitetuista kirjeistä”. Siinä kertomus on jotenkin sellainen, että on joukko eri henkilöille osoitettuja kirjeitä ja osoitteilla varustettuja kirjekuoria, mutta postituksen sotkee lukutaidoton henkilö, joka laittaa joka kuoreen umpimähkään yhden kirjeen, tietämättä, kenelle se oli tarkoitettu. Miten suurella todennäköisyydellä kaikki kirjeet menevät väärille henkilöille? Samanarvoinen kysymys on, miten todennäköisesti ainakin yksi kirje lähetetään tarkoitetulle vastaanottajalle. Toisinaan tätä ongelmaa kutsutaan *narikkaongelmaksi*. Tällöin kertomus koskee herrasmiehiä, jotka ovat jättäneet (silinteri)hattunsa naulakkoon, mutta naulakonhoitaja on sotkenut numerolaput ja palauttaa hatut umpimähkään.

Ilmeisesti ongelman lähtökohtana, niin kuin todennäköisyyslaskennassa usein, on ollut uhkapeli. Ranskalainen matematiikko *Pierre Rémond de Montmort* (1678–1719) oli yksi varhaisimpia todennäköisyyslaskennan uranuurtajia. Vuonna 1708 hän julkaisi *Essay d'analyse sur les jeux de hazard* eli *Tutkielma uhkapelien analysoinnista* -nimisen kirjan. Siinä hän käsitteli peliä nimeltä *treize* eli kolmetoista, jossa kortteja käännetään sekoitetusta pakasta samalla laskien yksi, kaksi, kolme jne. Laskemista jatketaan, kunnes pakasta kääntyy samannumeroinen kortti kuin sanottavana oleva numero. Kirjassaan Montmort esitti mm. kysymyksen siitä, miten todennäköinen on tällainen tapahtuma. de Montmort ratkaisi itse ongelmansa, mutta myös sveitsiläiseen Bernoullien matemaatikkosukuun kuulunut ja kuuluisan setänsä *Jakob Bernoullin* (1654–1705) johdolla todennäköisyyslaskentaa opiskellut *Nicolaus Bernoulli* (1678–1759) esitti ongelmalle ratkaisun. Kyllä ongelmasta sitten suuri *Leonhard Eulerkin* (1707–83) kirjoitti, niin kuin vanhan lehtijutun otsikko antaa ymmärtää. Hän julkaisi ratkaisunsa vuonna 1753 artikkelissa *Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre*. Euler ei ollut tietoinen de Montmortin ratkaisusta. Eulerin asetelmassa on kaksi pelaajaa, A ja B, ja kumpikin kääntää pakasta kortteja samaan tahtiin. Jos kortit ovat joka kerran eri kortteja, A voittaa, mutta jos jonkin kerran molemmat pelaajat kääntävät saman kortin yhtä aikaa, B voittaa.

Kaksi ratkaisua

Narikkaongelman voi ratkaista eri tavoin. Esitetään niistä kaksi. Seuraava Myllylän kirjoitusta myötäilevä jakso on lainattu Suomen matemaattisen yhdistyksen Valmennusjaoston aineistosivulta (`http://solmu.math.helsinki.fi/olympia/aiheet`) löytyvästä kombinatoriikkaesityksestä.

"Monellako tavalla esineet $a_1, a_2, \ldots, a_k$ voidaan sijoittaa lokeroihin $A_1, A_2, \ldots, A_k$ niin, että a_i ei ole lokerossa A_i millään i, $1 \le i \le k$?

Ratkaisu. Jos kysytty lukumäärä on $f(k)$, niin $f(1) = 0$ ja $f(2) = 1$. Oletetaan, että $f(k)$ tunnetaan, kun $k \le n$, ja tarkastellaan sijoittelua, kun esineitä ja lokeroita on $n+1$. Oletetaan, että a_{n+1} on sijoitettu lokeroon A_j, $j \le n$. Sellaisia väärinsijoitteluja, joissa a_j on sijoitettu lokeroon A_{n+1}, on $f(n-1)$ kappaletta. Sellaisia väärinsijoitteluja, joissa a_j ei ole lokerossa A_{n+1}, on $f(n)$ kappaletta. Koska A_j voidaan valita n:llä eri tavalla, $f(n+1) = n(f(n) + f(n-1))$. Mutta nyt $f(n+1) - (n+1)f(n) = nf(n-1) - f(n) = (-1)(f(n) - n(f(n-1))$ ja edelleen $f(n+1) - (n+1)f(n) = (-1)^{n-1}(f(2) - 1 \cdot f(1) = (-1)^{n-1}$ tai $f(n) - nf(n-1) = (-1)^{n-2} = (-1)^n$. Tämän yhtälön voi kirjoittaa muotoon

$$\frac{f(n)}{n!} - \frac{f(n-1)}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Kun edelliset yhtälöt kirjoitetaan arvoilla $n = 2, 3, \ldots, k$ ja lasketaan puolittain yhteen, saadaan

$$\frac{f(k)}{n!} - \frac{f(1)}{1!} = \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots + \frac{(-1)^2}{2!},$$

jonka voi sieventää muotoon

$$f(k) = k!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k!}\right).$$

(Sulkeissa oleva summa lähestyy raja-arvoa $e^{-1} \approx 0{,}368$, kun $k \to \infty$.)" Sulkeissa oleva summa on juuri todennäköisyys tapahtumalle, jossa jokainen esine on joutunut "väärään" lokeroon.

Toinen varsin erilainen tapa löytää Elli Mikkosen ongelman ratkaisu perustuu niin sanottuun *summan ja erotuksen periaatteeseen.* Jos halutaan tietää, montako sellaista lukujen $1, 2, \ldots, n$ järjestystä on, joissa yksikään luku ei ole omalla paikallaan, voidaan menetellä niin, että vähennetään kaikkien järjestysten lukumäärästä, joka on $n!$, kaikkien sellaisten järjestysten, joissa ainakin jokin luku on suuruusjärjestyksen mukaisella paikallaan, määrä. Miten se onnistuu? Ajatellaan kaikkia sellaisia järjestyksiä, joissa luku k on k:ntena. Kaikki loput $n-1$ lukua voivat olla missä järjestyksessä tahansa, joten näitä järjestyksiä on $(n-1)!$ kappaletta. Kun k voi olla mikä hyvänsä n:stä luvusta, niin tällaisia järjestyksiä, joissa yksi luku on paikallaan, näyttäisi olevan $n \cdot (n-1)! = n!$ kappaletta, ja kun tämä vähennetään kaikkien järjestysten määrästä $n!$, saadaan nolla! Tämä ei käy. Vika on siinä, että niiden järjestysten joukossa, joissa k on paikallaan, on myös järjestyksiä, joissa jokin muu luku on paikallaan, ja tällaiset järjestykset ovat tulleet lasketuksi kaksi kertaa. Jokaista paria a, b, $a \ne b$, kohden on vähennetty kahdesti kaikki ne järjestykset, joissa sekä a että b ovat paikallaan. Tällaisten järjestysten määrä pitää lisätä summaan. Pareja on tunnetusti $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!}$ kappaletta, ja kun muut $n-2$ lukua saavat olla missä järjestyksessä vain, niin kuhunkin paikallaan olevaan pariin liittyy $(n-2)!$ eri järjestystä.

Olisiko hakemamme lukumäärä siis

$$n! - n! + \frac{n!}{2!} = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right)?$$

Ei sentään: jos a, b, c ovat kolme eri lukua, niin ne järjestykset, joissa kaikki kolme ovat paikallaan, ovat tulleet vähennetyiksi kunkin yksittäisen paikallaan pysyneen luvun kohdalla ja lisätyiksi jokaisen kolmen parin a, b, a, c ja b, c kohdalla. Kaikki kuhunkin kolmikkoon liittyvät $(n-3)!$ järjestystä on siis vähennettävä. Kolmikkoja on $\binom{n}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!}$ kappaletta, joten uusi tarkempi ehdotus niiden järjestysten lukumääräksi, joissa kaikki luvut ovat väärillä paikoilla, on

$$n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right).$$

Mutta kun jatketaan ja otetaan huomioon paikallaan pysyvät nelikot, viisikot jne., tullaan lopulta tarkkaan lukumäärään

$$n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

Aivoja rassaavaa matematiikkaa

Alli Huovinen
matikkatäti

- Kulttuurissa on aina heijastusvaikutuksia. Tilaisuudessa ei välttämättä käy montaa ihmistä, mutta siitä saatetaan kirjoittaa juttuja, joita lukevat jotkut, jotka ... (Claes Andersson SS/Kulttuuri 15.9.2012)

Toisin on matematiikan suhteen. Jos siitä kirjoitetaan, se on useimmiten negatiivista. Ylen uutisissa 8.11.2012 kerrottiin, että ”Tutkimus todisti: Matematiikka tekee kipeää”. Koehenkilöt saivat viisi sekuntia aikaa vastata kuhunkin kysymyksistä ”kyllä” tai ”ei”. Jos on pidettävä kiirettä, alkaa väkisinkin ahdistaa.

Kun luin pitemmälle Anderssonia koskevaa artikkelia, löytyi sieltäkin matematiikkaa, jopa murtolukuja. Andersson ihmetteli: ”Kun synnyin 1937, suomalaisen miehen elinodotus oli vähän alle 60 vuotta. Tänään kun syntyy poikalapsi Suomeen, hän voi odottaa noin 80 vuoden ikää. Näin lyhyessä ajassa viidennes lisää elinaikaa, aika huima saavutus!” Viidennes! Minkä laskuopin opeilla Andersson saa tuloksensa?

Matemaattinen tieto ei vanhene. Harmittaa, kun ei ole tallella yhtään kansakouluaikaista laskuopin kirjaani. Onnellisten yhteensattumien ansiosta löysin kuitenkin kirjan [1]. Siinä on paljon aivoja rassaavia sanallisia tehtäviä.

Mielenkiintoinen asia, joka jäi mieleeni kansakoulusta, on päätöslasku. Vuonna 1925 tehtiin pitkiä työpäiviä, minkä osoittaa kirjan yksiehtoinen päätöslaskutehtävä: *Työ valmistuu 60 päivässä, jos tehdään työtä 11 tuntia joka päivä. Missä ajassa se valmistuu, jos tehdään työtä 10 tuntia joka päivä?*. Lauantaikin oli työpäivä.

Yksiehtoisessa päätöslaskussa on kaksi osaa: ehtolause, jossa mainitaan, mitä tiedetään, ja kysymyslause, jossa mainitaan, mitä on haettava. Päättämistä alettaessa otetaan ensin selville, kuinka kauan aikaa kuluu, jos työtä tehdään joka päivä yksi tunti. Tämän jälkeen saadaan tietää ajantarve, jos työtä tehdään päivittäin 10 tuntia.

Päätöslasku on moniehtoinen, jos etsittävä suure on määrättävä useamman muun suureen avulla. Esimerkkinä tästä on Luvunlaskun oppikirjasta poimittu tehtävä: *Missä ajassa 14 miestä, tehden työtä 5 tuntia joka päivä, saa valmiiksi työn, jonka 9 miestä tehden työtä 7 tuntia päivässä, saa valmiiksi 3 ja 1/3 päivässä?*

Muistan opettajan kysymykset ja taulutyöskentelyn:

9 miestä	...	7 h/vrk	...	valmistui $\frac{10}{3}$ päivässä
14 miestä	...	5 h/vrk	...	valmistui x päivässä

Ajatellaan ensin, että tuntimäärä on sama. Koska 9 miestä tarvitsee aikaa $\frac{10}{3}$ päivää, niin yksi mies tarvitsee enemmän aikaa eli

$$9 \cdot \frac{10}{3} = \frac{9 \cdot 10}{3} \quad \text{päivää.}$$

Koska yksi mies tekee työn $\frac{9 \cdot 10}{3}$ päivässä, niin 14 miestä tarvitsee aikaa 14. osan siitä eli

$$\frac{9 \cdot 10}{3} : 14 = \frac{9 \cdot 10}{14 \cdot 3} \quad \text{päivää.}$$

Oletetaan tämän jälkeen, että miehiä on koko ajan 14 ja työpäivän pituus vaihtelee. Jos työpäivä on seitsentuntinen, niin aikaa menee

$$\frac{9 \cdot 10}{14 \cdot 3} \quad \text{päivää.}$$

Jos työpäivä kestää yhden tunnin, niin tarvitaan 7 kertaa niin paljon aikaa eli

$$7 \cdot \frac{9 \cdot 10}{14 \cdot 3} = \frac{7 \cdot 9 \cdot 10}{14 \cdot 3} \quad \text{päivää.}$$

Viiden tunnin työpäivien lukumäärä saadaan tästä viidellä jakamalla eli näitä työpäiviä on

$$x = \frac{7 \cdot 9 \cdot 10}{14 \cdot 3} : 5 = \frac{7 \cdot 9 \cdot 10}{5 \cdot 14 \cdot 3} = 3.$$

Päättely tiivistettynä:

9 miestä	...	7 h/pv	...	$\frac{10}{3}$ pv
1 mies	...	7 h/pv	...	$\frac{9 \cdot 10}{3}$ pv
14 miestä	...	7 h/pv	...	$\frac{9 \cdot 10}{14 \cdot 3}$ pv
14 miestä	...	1 h/pv	...	$\frac{7 \cdot 9 \cdot 10}{14 \cdot 3}$ pv
14 miestä	...	5 h/pv	...	$x = \frac{7 \cdot 9 \cdot 10}{5 \cdot 14 \cdot 3} = 3$ pv.

Aktiivinen lukija päätelköön itse seuraavan: *Niityllä on 10 hevoselle tarpeeksi syötävää 24 päiväksi. Moneksiko päiväksi 6 hevoselle on syötävää toisella niityllä, jos edellisessä ruohonkasvu on 1/4 parempi kuin jälkimmäisessä? Vastaus: 32 päiväksi.*

Matemaatikkopiirejä huolettaa äidinkielen osaaminen. Kirjailijaliiton puheenjohtajan Tuula-Liina Variksen mukaan suomalaiskirjailijoita esiintyy televisiossa liian vähän. Mielestäni kirjailijoilla on runsaasti ohjelmaaikaa, mutta esiintyjinä ovat yleensä samat henkilöt, jotka muutenkin saavat palstatilaa lehdissä ja höpöohjelmissa.

Televisio passivoi, enkä usko, että kirjojen lukeminen radiossa lisää lukuharrastusta. Sen sijaan pitäisi esitellä myös vähemmän tunnettuja kirjailijoita. Lehtiarvioissa kannattaa suosia kirjailijoita, joiden juuret ovat lähiseudulla.

Vanhat matematiikan kirjat palvelevat myös äidinkielen oppimista. Niitä löytyy vielä antikvariaateista. Nykyään kysyttyjä ovat muun muassa K. Väisälän oppikirjat. Muutama niistä löytyy Solmun sivuilta: `http://solmu.math.helsinki.fi`.

Matematiikka ansaitsisi uutisensa, teemailtansa ja taustapeilinsä siinä, missä muukin kulttuuri ja urheilu. Kummallista, etteivät poliitikot lämpene ”Tieteiden kuningattaresta” – kaikkien tieteiden, taiteiden, talouselämän ja kulttuurin perustasta.

”Jokaisen kansanedustajan yöpöydälle pitäisi hankkia K. Väisälän matematiikan oppikirja muistuttamaan joka aamu matematiikan opetuksen tärkeydestä yhteiskunnalle.” – Teollisuusneuvos Jorma Terentjeff.

Viitteet

[1] R. Ceder, *Luvunlaskun oppikirja*, Otava, 1925.

Olympiakomitea toivoo...

”Olympiakomitea toivoo, että Suomi ei antaisi koulujärjestelyillä tasoitusta muille maille. Nuoret tarvitsevat valtavasti toistoja teknisissä suorituksissaan, kommentoi Raiskinmäki.”

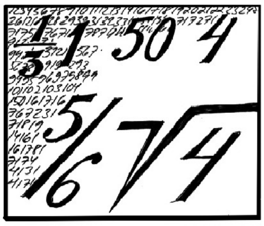
Näin kirjoitettiin Kuopion Kaupunkilehdessä 11.1.2014 otsikon ”Lasten koulunkäynti kärsii liiasta harjoittelusta” alla. Samassa jutussa kerrottiin, että Kuopio perustaa yläkoulujen liikuntaluokkien rinnalle uudet kilpaurheiluluokat. Lukujärjestyksissä tiistai- ja torstaiaamut on varattu kouluajan ulkopuolista lajiharjoittelua varten ja tietenkin valinnaisaineina valituilla oppilailla on lisää liikuntaa.

Yllä oleva on hyvä esimerkki peruskoulun oppilaiden tasa-arvoisuuden toteutumattomuudesta, koska samaan aikaan valtakunnassa ei suvaita oikein edes keskustelua luonnontieteiden opetuksen eriyttämisestä innokkaille oppijoille. Keskustelut teollisuuden tarpeista, matematiikka- ja luonnontiedepainotteisista yläkoulun luokista tai edes valinnaisaineista eivät kiinnosta poliitikkoja.

Kyllä matematiikan laskuharjoituksissa kuten fysiikan ja kemian laboratoriotöissäkin tarvitaan myös valtava määrä toistoja, jotta asiat opitaan ja niitä kyetään soveltamaan uusiin asioihin ja teorioihin.

Tarja Shakespeare

Lähde: `http://www.kaupunkilehti.fi/web/pdf/2014_02/index.html`, sivu 3.



$2{,}107299476\ldots^{-2{,}107299476\ldots+i2{,}107299476\ldots} = i \cdot i^i$

Markku Sointu
FM, matematiikan lehtori, Soppeenharjun koulu

Antti Kanto
FT, talousmatematiikan professori, Tampereen yliopisto

Aluksi

Dosentti Matti Lehtinen kirjoitti Tehtävä maassa -kirjan[1] arvostelussa seuraavasti:

"...mutta ehkä kirjoittajat jättävät Inspiratiuksen, Fractalian ja Hackerian suomalaiseen lukioonsa kirjan jatko-osaa odottamaan. Tehtävä maassa tuskin muodostuu myyntimenestykseksi. Se on tietysti vahinko, sillä tietoromaani on kuitenkin ideana hauska ja kirjoittajilla on yhtä ja toista sanottavaa, rivien välissäkin. Matematian suurmestarit esimerkiksi näyttävät olevan aika tasaisesti kumpaakin sukupuolta."

Kirjan ensimmäisessä osassa imaginaariyksikkö esiintyi tärkeässä sivuroolissa. Seuraavassa artikkelissa esitellään näytteitä jatko-osasta. Samalla paljastetaan jotain siitä, mitä ensimmäisessä osassa oli rivien välissä. Siellä esiteltiin muun muassa luku $2{,}107299476\ldots$. Nyt on aika pohtia, miksi tätä lukua voidaan pitää vähintäänkin mielenkiintoisena.

Ensimmäinen luku

Seuraava teksti on osa Tehtävä maassa -kirjan julkaisemattomasta toisesta osasta. Juuso on suomalainen koululainen, jota matematiikan planeetalta lähetetyt nuoret auttavat.

Juuso oli aivan myyty. Hän ei ollut enää varma siitä, mikä häneen oli iskenyt. Aikaisemmin hän oli vaatinut, että kaikesta, mihin hän ryhtyisi, piti olla selkeää käytännön hyötyä. Nyt numerot kiehtoivat häntä omina itsenään. Juuso oli kaivanut Elisan papereista tältä salaa esiin kielletyn luvun – mystisen Absurdicuksen luvun. Tästä luvusta hän oli jutellut ohimennen matematiikan planeetan ihmenuorten kanssa, mutta nämä Maan asukkaita valistamaan singotut ihmelapset eivät olleet innostuneet asiasta.

Juuson tyttöystävä Elisa oli lähes jäätävä, ihmepoika Into taas välinpitämätön. Jopa aina kultainen ja herttainen Fanni oli innostamisen sijasta toppuutellut ja vain todennut, että Lambertin funktiosta oli hyötyä. Ikivanha totuus oli kuitenkin se, että kiellot lisäsivät kiinnostusta. Alakoululainenkin tiesi, että nimittäjässä ei saanut olla lukua nolla. Kielto ja kiinnostus.

Nimittäjä ei saa olla nolla. Entäpä, jos se on hyvin lähellä nollaa oleva luku: sadasosa, miljoonasosa, miljardisosa ja niin edelleen? Tämän keksimällä ihminen oli päässyt matematiikassa syvemmälle ja ymmärtänyt paremmin todellisuutta. Elisa oli luvannut, että

[1] Kanto A., Kanto A. & Sointu M. 2010. *Tehtävä maassa.* Helsinki: Gummerus. Markku Sointu sai idean kirjaan lukiessaan dosentti Matti Lehtisen kirjoitusta Matematiikan historia.

Juusosta kuultaisiin vielä. Siis toimeen...

Kaikki oli saanut alkunsa, kun Juuso oli pohtinut seuraavaa: Onko alkeisfunktioiden joukossa toista funktiota, joka olisi yhtä immuuni derivoinnille kuin e-kantainen eksponenttifunktio. Pelkkä kantaluku e oli jo itsessään mielenkiintoinen – olihan sen käänteisluku tärkeällä sijalla vaikkapa tyttöystävän valinnassa.

Aluksi Juuso selvitti reaaliarvoiset funktiot, joilla on ominaisuus

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = k, \tag{1}$$

jossa k on vakio. Niinpä hän merkitsi

$$g(x) = \ln |f(x)|,$$

jonka derivaatta on

$$g'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = k.$$

Tästä seuraa $g(x) = kx + c$ ja edelleen $f(x) = e^{kx+c}$.

Merkitsemällä $e^c = b$ Juuso sai selville, että kaikki reaaliarvoiset funktiot, joilla on ominaisuus (1), voidaan esittää muodossa

$$f(x) = be^{kx}.$$

Juuso alkoi pohtia, olisiko toista derivoinnille yhtä immuunia funktiota. Hän muisti, että kosinin ja sinin derivaatat ovat

$$\mathrm{D} \sin x = \cos x$$

ja

$$\mathrm{D} \cos x = -\sin x,$$

joista seuraa

$$\mathrm{D}(\cos x + \sin x) = -\sin x + \cos x = \cos x - \sin x.$$

Kosini säilyi, mutta sini vaihtoi etumerkkiä. Juuso tunsi olevansa lupaavan lähellä. Hän yksinkertaisti yhtälön (1) ratkaisua ja kirjoitti

$$u(x) = \mathrm{e}^{ax}$$

sekä tämän derivaatan

$$u'(x) = a\,\mathrm{e}^{ax} = au(x).$$

Lisäksi u toteuttaa ehdot $u(0) = 1$ ja $u'(0) = a$.

Seuraavaksi Juuso pyrki rakentamaan kosinin ja sinin summasta funktion, jolla olisi tietty ominaisuus: funktion derivaatta saataisiin kertomalla funktio vakiolla a. Vakio a piti siis sijoittaa summaan $\cos x + \sin x$. Koska termi $\cos x$ säilyi derivoinnissa, kannatti vakio liittää termiin $\sin x$. Juuso keskitti huomionsa funktioon

$$v(x) = \cos x + a \sin x$$

ja sen derivaattaan

$$v'(x) = a \cos x - \sin x.$$

Tämä funktio toteuttaa samat ehdot kuin funktio u, $v(0) = 1$ ja $v'(0) = a$. Kertomalla vakiolla a Juuso sai

$$av(x) = a \cos x + a^2 \sin x.$$

Juuson oli selvitettävä, millä vakion a arvolla funktio v toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$v' = av$$

eli

$$a \cos x - \sin x = a \cos x + a^2 \sin x.$$

Yhtälö toteutuu kaikilla $x \in \mathbb{R}$, mikäli $a^2 = -1$, eli jos a on imaginaariyksikkö. Näin ollen funktiot

$$u(x) = \mathrm{e}^{ix}$$

ja

$$v(x) = \cos x + i \sin x$$

ovat differentiaaliyhtälön $y' = iy$ ratkaisuja samoilla alkuehdoilla, joten nämä funktiot ovat samat. Toisin sanoen

$$\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x. \tag{2}$$

Juuso halusi todentaa tämän vielä toisella tavalla, joten hän tutki taulukkokirjasta löytämiään Taylor-sarjoja

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots,$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

ja

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \cdots.$$

Tekemällä viimeiseen sarjaan sijoituksen $x = ix$ ja muistamalla ominaisuuden $i^2 = -1$ Juuso sai muodostettua sarjojen välille yhteyden:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{ix} &= 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\ &= (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots) + i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots) \\ &= \cos x + i \sin x. \end{aligned}$$

Juuso sai näin todennettua kaavan (2).

$i^2 = -1$ tuntui Juusosta aluksi vaikealta ymmärtää, mutta koska luvun i avulla aidosti monotoninen funktio muuttui jaksolliseksi, i tuntuikin todella käyttökelpoiselta.

Kaavaa (2) käyttäen Juuso totesi

$$\mathrm{e}^{i\pi} + 1 = 0,$$

koska $\mathrm{e}^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$.

Juuson suosikki oli kuitenkin yhtäsuuruus

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}. \tag{3}$$

Tämän yhtäsuuruuden Juuso sai seuraavasti: hän sijoitti $x = \frac{\pi}{2}$ kaavaan (2), ja sai

$$\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2},$$

josta seurasi

$$\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = i.$$

Korotettuaan potenssiin i Juuso näki yhtäsuuruuden (3):

$$i^i = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} = 0{,}2078795764\ldots.$$

Tämä näytti mielenkiintoiselta. Kun Juuso tarkasteli funktiota ($x > 0$)

$$f(x) = x^x = \mathrm{e}^{x\ln x},$$

hän huomasi, että

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x\ln x}(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x).$$

$f'(x) = 0$, kun $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$. Tarkasteltavan reaaliarvoisen funktion minimi oli

$$f(\frac{1}{e}) = (\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}} = 0{,}6922006276\ldots,$$

eli i^i oli reaaliluku, joka oli pienempi kuin funktion x^x minimi, kun $x > 0$.

Seuraavaksi Juuso alkoi pohtia yhtälöä

$$s^{-s} = i^i = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}},$$

jossa $s \in \mathbb{R}_+$.

Tämä voitiin kirjoittaa

$$s^s = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}.$$

Juuso halusi ratkaista tästä yhtälöstä tuntemattoman s, joten hän kirjoitti (ottamalla puolittain luonnollisen logaritmin)

$$s\ln s = \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Koska yhtälön vasemmalla puolella olevan funktion $f(s) = s\ln s$ derivaatta $f'(s) = \ln s + 1$ oli negatiivinen, kun $s < \frac{1}{e}$, ja positiivinen, kun $s > \frac{1}{e}$, oli $f(s)$:llä kaksi monotonista haaraa. Näillä haaroilla täytyi siis olla käänteisfunktiot. Mikäli Juuso onnistuisi ratkaisemaan käänteisfunktion...

Erilaisten kokeilujen jälkeen Juuso huomasi, että hän ei onnistuisi löytämään käänteisfunktiota algebrallisin menetelmin. Tämä oli mielenkiintoista. Jos funktio oli aidosti monotoninen, sillä oli käänteisfunktio. Juuso ei olisi päässyt eteenpäin, ellei olisi muistanut avainsanoja – Lambertin funktio. Se määritellään funktion

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^x$$

käänteisfunktiona eli $f^{-1}(x) = W(x)$, jossa $W(x)$ on Lambertin funktio. Nyt Juuso palasi yhtälöön (4). Asettamalla $s = \mathrm{e}^{\ln s}$ hän sai

$$\mathrm{e}^{\ln s}\ln s = \frac{\pi}{2}.$$

Käyttämällä Lambertin funktiota Juuso kirjoitti

$$\ln s = W(\frac{\pi}{2}),$$

josta seurasi

$$s = \mathrm{e}^{W(\frac{\pi}{2})}.$$

Juuso oli aina ollut innokas tietokoneen käyttäjä. WolframAlphalla (`http://www.wolframalpha.com/`) oli helppo laskea $s = 2{,}107299476\ldots$. Juuso oli niin innoissaan, että haki kreikan kielen aakkosista symbolin luvulle s. Hän merkitsi sitä nyt symbolilla ς ja listasi sen ominaisuuksia:

$$\varsigma^{-\varsigma} = i^i,$$
$$2\varsigma\ln\varsigma = \pi,$$
$$\varsigma^{\frac{2\varsigma}{\pi}} = \mathrm{e}.$$

Tutustuessaan paljon puhuttuun Riemann-hypoteesiin Juuso oli törmännyt kaavaan

$$\prod_{p \text{ on alkuluku}} \frac{p^s}{p^s - 1} = \sum \frac{1}{n^s}.$$

Sijoittamalla vasemman puolen tuloon alkulukuja ja muuttujan s paikalle kokonaislukuja saattoi taulukkolaskentaohjelmallakin havaita, että kaava näytti pitävän paikkansa. Riemann oli kuitenkin asettanut $s = a + ib$. Siksi Juuso ryhtyi tarkastelemaan sellaisia kompleksilukuja, jotka syntyvät, kun reaaliluku korotetaan kompleksiluvun osoittamaan potenssiin.

Juuso merkitsi

$$z_{(x)} = x^{-x+ix}.$$

Kaavan (2) avulla hän laski

$$z_{(2)} = 2^{-2+i2} = 2^{-2}e^{2i\ln 2} = \frac{1}{4}(\cos(2\ln 2) + i\sin(2\ln 2))$$

$$z_{(3)} = 3^{-3+i3} = \frac{1}{27}(\cos(3\ln 3) + i\sin(3\ln 3))$$

Erityisesti Juuso ilahtui havaitessaan

$$z_{(\varsigma)} = \varsigma^{-\varsigma+i\varsigma} = i^i\,\mathrm{e}^{is\ln s} = i^i i = i^{i+1}.$$

Juuso innostui tästä niin, että määritteli kompleksiluvun z imaginaariyksikölliseksi, jos se voitiin esittää muodossa

$$z = i^{i+m},$$

jossa $m \in \mathbb{Z}$. Esimerkiksi jos $m = 0$, niin kompleksiluvun z imaginaariosa oli 0 ja, kun $m = 1$, reaaliosa oli 0.

Perin kauniilta näytti yhtäsuuruus

$$2{,}107299476\ldots^{-2{,}107299476\ldots+i2{,}107299476\ldots} = i \cdot i^i.$$

Oli hienoa nähdä, kuinka epämääräisen näköinen vasen puoli pelkistyi oikean puolen muotoon. Mutta pienikin muutos lukuun ς hävittäisi tämän ominaisuuden ja vastaukseksi tulisi kompleksiluku, jonka reaali- ja imaginaariosat olisivat nollasta eroavia.

Luettavaa

Bernhard Riemann: ”Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse”

John Derbyshire: ”Prime Obsession”

Matti Lehtinen: ”Matematiikan historia”

Solmun matematiikkadiplomit

Peruskoululaisille tarkoitetut Solmun matematiikkadiplomit I–IX tehtävineen ovat tulostettavissa osoitteessa

`http://solmu.math.helsinki.fi/diplomi.html`

Opettajalle lähetetään pyynnöstä vastaukset koulun sähköpostiin. Pyynnön voi lähettää osoitteella

marjatta.naatanen(at)helsinki.fi

Ym. osoitteessa on diplomitehtäville oheislukemistoa, joka varmasti kiinnostaa muitakin kuin diplomien tekijöitä:

Lukujärjestelmistä

Desimaaliluvut, mitä ne oikeastaan ovat?

Murtolukujen laskutoimituksia

Negatiivisista luvuista

Hiukan osittelulaista

Lausekkeet, kaavat ja yhtälöt

Äärettömistä joukoista

Erkki Luoma-aho: Matematiikan peruskäsitteiden historia

Gaussin jalanjäljissä

K. Väisälä: Algebra

Yläkoulun geometriaa

Geometrisen todistamisen harjoitus

K. Väisälä: Geometria

Lukuteorian diplomitehtävät

Zermelo ja aritmetiikan peruslause

Esa V. Vesalainen
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Lukuteorian alkeita opiskellessa ensimmäinen iso merkkipaalu lienee aritmetiikan peruslause, joka sanoo, että jokainen luonnollinen luku $n > 1$ on tekijöiden järjestystä vaille yksikäsitteisellä tavalla alkulukujen tulo. Tavallisesti tämä todistetaan niin, että ensin jakoyhtälöstä lähtien esitellään Eukleideen algoritmi, jolla vuorostaan ratkaistaan lineaariset Diofantoksen yhtälöt. Lineaaristen Diofantoksen yhtälöiden ratkaisuiden olemassaolosta sitten seuraa, että jos alkuluku jakaa tulon, niin se jakaa myös jonkin tulontekijöistä. Tämän jälkeen alkutekijöihin jaon yksikäsitteisyys seuraa helpohkosti.

Koska Eukleideen algoritmi on hyvin tärkeä, ja siksi esiteltävä lukuteorian alkeiden yhteydessä, yllä kuvattu tie aritmetiikan peruslauseeseen on varsin taloudellinen, ja näin asiat esitetään useimmissa suomalaisissa lukion oppikirjoissakin.

Toisaalta, tämän klassisen lähestymistavan perusteella arvaisi, että aritmetiikan peruslause on jollakin tapaa vaikea lause todistaa, mutta osoittautuu, että näin ei olekaan. Nimittäin, joukko-opillisista ansioistaan kuuluisa saksalainen matemaatikko E. Zermelo keksi vaihtoehtoisen todistuksen 1912, joka perustuu lähinnä jaollisuuden helpoimpiin perusominaisuuksiin, ja suoraviivaiseen induktioon luvun n yli. Seuraavassa tarkoituksena on esittää hänen kaunis todistuksensa.

Kertausta: jaollisuus ja alkuluvut

Muistin virkistämisen nimissä ja nähdäksemme, kuinka vähän koneistoa myöhemmin esitettävän todistuksen taakse oikeastaan kätkeytyykään, aloitamme aivan alusta, eli jaollisuuden määritelmästä: Olkoot a ja n kokonaislukuja. Jos on olemassa kokonaisluku k, jolle $a = nk$, niin merkitsemme $n \mid a$ ja sanomme, että a on jaollinen luvulla n, tai että n jakaa luvun a.

Määritelmästä seuraa suoraan monia asioita, mutta jaollisuuden perusominaisuuksista ei oikeastaan tarvita seuraavassa kuin sellaisia helppoja havaintoja, kuin että

- jos kokonaisluvuille a, b ja n pätee $n \mid a$ ja $n \mid b$, niin myös $n \mid (a + b)$ ja $n \mid (a - b)$, tai että
- jos kokonaisluvuilla a, b ja n pätee $n \mid a$, niin myös $n \mid ab$.

Lukua $p > 1$ sanotaan alkuluvuksi, jos sitä ei voi kirjoittaa itseään pienempien luonnollisten lukujen tulona. Luku 2 on varmasti alkuluku, koska ainoa sitä pienempi luonnollinen luku on 1.

Tunnetusti alkuluvut ovat eräänlaisia multiplikatiivisia ”atomeita”, joista kaikki luonnolliset luvut koostuvat:

Havainto. *Jokainen luonnollinen luku* $n > 1$ *on alkulukujen tulo.*

Tässä ”tulo” tosin sisältää vain yhden tulontekijän, jos n on alkuluku.

Todistus. Tehdään induktio luvun n suhteen. Tapaus $n = 2$ on selvä, koska 2 on alkuluku. Oletetaan sitten, että $n > 1$ ja kaikki luonnolliset luvut m, joilla $1 < m < n$, ovat alkulukujen tuloja.

Nyt, jos n on alkuluku, asia on selvä. Muutoin luku n on pienempien luonnollisten lukujen tulo, ja induktiooletuksen nojalla nämä pienemmät luvut ovat alkulukujen tuloja, ja siis myös n on, ja todistus on valmis.

Todettakoon, että tämän argumentin voisi luontevasti integroida Zermelon todistuksessa tehtävään induktiopäättelyyn.

Vaikka se ei olisikaan tarpeen, seuraava tulos on hyvä mainita jo ihan täydellisyydenkin vuoksi. Vaikka tätä tulosta ei aritmetiikan peruslauseen todistuksessa tarvitakaan, se on peruslauseen kannalta ilmeisen oleellinen tulos. Lisäksi se on kenties Zermelon todistustakin kauniimpi esimerkki siitä, miten paljon joskus pystyy sanomaan niin vähin työkaluin.

Lause. *Alkulukuja on äärettömän monta.*

Eukleideen todistus. Tehdään vastaoletus: oletetaan, että alkulukuja on vain äärellinen määrä. Olkoot $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ kaikki alkuluvut, missä tietenkin $k \in \mathbb{Z}_+$.

Tarkastellaan lukua $N = p_1 p_2 \cdots p_k + 1$. Koska on olemassa ainakin yksi alkuluku, nimittäin 2, on $N > 1$. Luku N on siis alkulukujen tulo, ja sen on oltava jaollinen ainakin yhdellä alkuluvulla, jonka vastaoletuksen nojalla täytyy olla jokin luvuista $p_1, p_2, \ldots, p_k$, sanokaamme p_ℓ. Nyt $p_\ell \mid N$ ja varmasti $p_\ell \mid p_1 p_2 \cdots p_k$, eli

$$p_\ell \mid (N - p_1 p_2 \cdots p_k) = 1,$$

mikä on selvästi mahdotonta.

Aritmetiikan peruslause ja ”vastaesimerkkejä”

Nyt voimme keskittyä tekijöihinjaon yksikäsitteisyyteen. Mielenkiinnon kohteena oleva tulos on siis seuraava.

Aritmetiikan peruslause. *Jokainen luonnollinen luku $n > 1$ on alkulukujen tulo tekijöiden järjestystä vaille yksikäsitteisellä tavalla.*

Vaikka tämä tulos onkin luonnollisen tuntuinen, mitenkään itsestäänselvä se ei ole. Kuitenkaan lukuteorian perusesityksissä ei aina pohdita kysymystä siitä, miten alkulukujen tekijöihinjako oikeastaan voisi mennä pieleen. Joka tapauksessa lienee ainakin mielenkiintoista ennen todistusta tutustua analogisiin tilanteisiin, jossa tulos ei päde.

Hilbert esitti aikoinaan yksinkertaisen esimerkin epäyksikäsitteisestä tekijöihinjaosta. Luonnollisesti esimerkki ei voi koskea kokonaislukujen tekijöihinjakoa, koska niille yksikäsitteinen tekijöihinjako pätee, kuten tulemme näkemään. Hilbertin esimerkki koskee lukuja, jotka ovat muotoa $4k + 1$ jollakin ei-negatiivisella kokonaisluvulla k:

$$1, \quad 5, \quad 9, \quad 13, \quad 17, \quad 21, \quad 25, \quad 29, \quad 33 \quad \ldots$$

On helppo nähdä, että kahden tämän listan luvun tulo on myös tämän listan luku: Nimittäin lukujen $4k + 1$ ja $4k' + 1$ tulo on muotoa

$$(4k + 1)(4k' + 1) = 4(4kk' + k + k') + 1.$$

Samoin, näille luvuille löytyy ilmeinen ”alkuluvun” käsite; esimerkiksi luvut 5, 21, 9 ja 49 ovat ”alkulukuja”, koska ne eivät ole pienempien saman listan lukujen tuloja. Kolme viimeksi mainittua siksi, että niiden ainoat oikeat alkulukutekijät 3 ja 7 eivät ole muotoa $4k + 1$. Nyt luvulle 441 saadaan kaksi oleellisesti erilaista ”tekijöihinjakoa”

$$441 = 21 \cdot 21 = 9 \cdot 49.$$

Muita, vakavampia esimerkkejä saadaan, kun tarkastellaan kokonaislukujen renkaan laajennoksia, mitkä lukuteoriassa ovat erittäin tärkeitä. Esimerkiksi jos kokonaislukujen sekaan lisää luvun $i\sqrt{5}$, jolloin siis tarkastellaan lukuja $a + bi\sqrt{5}$, missä $a,b \in \mathbb{Z}$, niin osoittautuu, että luvulla 21 on kaksi oleellisesti erilaista tekijöihinjakoa:

$$21 = 3 \cdot 7 = \left(1 + 2i\sqrt{5}\right)\left(1 - 2i\sqrt{5}\right).$$

Osoittautuu, että eräässä mielessä tällaiset esimerkit ovat luonteeltaan Hilbertin esimerkin kaltaisia; alkulukuja on niissä ikään kuin liian vähän. 1800-luvulla tälle ongelmalle löydettiin suurenmoinen osittaisratkaisu tarkastelemalla lukujen sijasta ns. ideaaleita.

Zermelon todistus

Todistamme aritmetiikan peruslauseen induktiolla luvun n suhteen. Todetaan ensin, että väite pätee, kun n on alkuluku. Erityisesti, väite on selvä, kun $n = 2$.

Oletetaan sitten, että $n > 1$, ja että väite on jo todistettu kaikille lukua n pienemmille positiivisille kokonaisluvuille. Meidän on osoitettava, että jos luvun n kirjoittaa kahdella eri tavalla alkulukujen tulona, niin itse asiassa molemmissa tuloissa esiintyvät täsmälleen samat alkuluvut, tosin mahdollisesti eri järjestyksessä.

Jos luku n sattuu olemaan alkuluku, olemme valmiit. Muutoin on olemassa pienin epätriviaali luvun n tekijä p, siis pienin $p \in \mathbb{Z}_+$, jolle $p \mid n$ ja $1 < p < n$. Tämä luku p on itse asiassa alkuluku, sillä luvun p epätriviaali tekijä olisi lukua p pienempi luvun n epätriviaali tekijä.

Kirjoitetaan $n = pb$, missä $b \in \mathbb{Z}_+$ on tietenkin pienempi kuin n. Nyt induktio-oletuksen nojalla luku b on alkulukujen tulo yksikäsitteisellä tavalla. Tästä seuraa, että luvulla n on vain yksi alkutekijöihinjako, jossa esiintyy luku p.

Seuraavaksi on osoitettava, että luvulla n ei voi olla muita alkutekijöihinjakoja. Tehdään se vastaoletus, että luvulla n olisi jokin muukin alkutekijöihinjako. Olkoon sen pienin alkutekijä q. Nyt siis $p < q$ ja $n = qc$ jollakin $c \in \mathbb{Z}_+$, jolle $c < n$ ja $p \nmid c$.

Seuraavaksi tarkastellaan lukua

$$n_0 = n - pc = \begin{cases} pb - pc = p\,(b-c)\,, \\ qc - pc = (q-p)\,c. \end{cases}$$

Tämä luku on positiivinen kokonaisluku ja varmasti pienempi kuin n. Koska $p \mid n_0$, on induktio-oletuksen nojalla alkuluvun p esiinnyttävä tulon $(q-p)\,c$ alkutekijähajotelmassa, ja siis ainakin toisen luvuista $q-p$ ja c alkutekijähajotelmassa. Mutta olemme jo todenneet, että $p \nmid c$, eli on oltava $p \mid (q-p)$. Mutta nyt olisi myös $p \mid (q-p+p) = q$, ja koska p ja q ovat molemmat alkulukuja, olisi $p = q$, vastoin sitä seikkaa, että $p < q$. Olemme päätyneet ristiriitaan, ja siksi luvulla n on oltava vain yksi alkutekijöihinjako, ja olemme valmiit.

Lähteet

Klassisesta jaollisuusteoriasta suomenkielellä löytyy esimerkiksi hyvä lukiotason esitys oppikirjasta [3], ja Väisälän oppikirjasta [7] yliopistollisempi esitys, joka on tiiviimpi, mutta luonnollisesti etenee aiheeseen syvemmälle.

Alkulukujen äärettömyyden todistus on peräisin Eukleideen Alkeista [2], missä se on 9. kirjan 20. propositio.

Kirjoittaja oppi Zermelon todistuksesta ensimmäisen kerran Hassen klassikkoteoksesta [5]. Vaikka todistus on peräisin jo vuodelta 1912, jolloin Zermelo keskusteli siitä mm. Hurwitzin ja Landaun kanssa, se julkaistiin ensimmäisen kerran vasta 1934 hänen ainoassa puhtaasti lukuteoreettisessa paperissaan [8], joka löytyy myös hänen kootuista teoksistaan [9] Volken lyhyen mutta kiintoisan historiallisen johdannon [6] kanssa.

On mielenkiintoista, että ennen Gaussia ja hänen monumentaalista teostaan [4], kukaan ei ollut muotoillut aritmetiikan peruslausetta, vaikka siihen riittävä koneisto oikeastaan löytyykin jo Eukleideen Alkeista [2].

Hilbertin esimerkki on esitelty esimerkiksi Cohnin oppikirjan [1] pykälässä III.5. Esimerkki luvun 21 tekijöihinjaosta on saman teoksen pykälästä VI.6. Kokonaislukujen renkaan laajentamiseen ja ideaaliteoriaan voi tutustua suomeksikin esimerkiksi Väisälän kirjasta [7].

Viitteet

[1] Cohn, H.: *Advanced Number Theory*, Dover Publications, 1980.

[2] Eukleides: *Alkeet*, n. 300 eKr. Tämän teoksen eri käännöksiä löytyy Internetistä runsaasti. Linkkejä näihin löytyy helposti esimerkiksi Wikipedia-sivulta `http://en.wikipedia.org/wiki/Euclid's_Elements`.

[3] Ernvall-Hytönen, A.-M., K. Luosto, ja T. Pokela: *Pyramidi 11: Lukuteoria ja logiikka*, Tammi, 2006.

[4] Gauss, C. F.: *Disquisitiones Arithmeticae*, 1801. Alkuperäinen latinankielinen teksti on myöhemmin käännetty monille kielille, englanniksi löytyy A. A. Clarken käännös (Yale University Press, 1966, tai Springer, 1986).

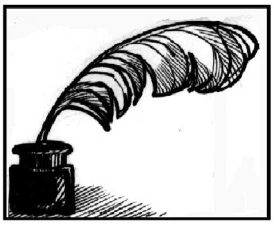
[5] Hasse, H.: *Number Theory*, Classics in Mathematics, Springer, 2002.

[6] Volke, D.: *Introductory note to 1934*, johdanto Zermelon artikkeliin [8] kokoomateoksessa [9], 574–575.

[7] Väisälä, K.: *Lukuteorian ja korkeamman algebran alkeet*, Otava, 1961.

[8] Zermelo, E.: *Elementary considerations concerning the theory of prime numbers*, kokoomateoksessa [9], 576–581, mistä löytyy myös alkuperäinen *Elementare Betrachtungen zur Theorie der Primzahlen*, Wissenschaftliche Gesellschaft zu Göttingen, 2.11.1934.

[9] Zermelo, E. (kirj.), sekä H.-D. Ebbinghaus, ja A. Kanamori (toim.): *Ernst Zermelo. Collected Works. Volume I. Set Theory, Miscellanea*, Springer, 2010.



Affiini kombinaatio ja riippuvuus: Affmenin arvoitus

Noora Karvinen

Tämän kirjoituksen tarkoitus on kertoa affiineista kombinaatioista ja riippuvuudesta mielenkiintoisella ja uudella tavalla. Lineaarialgebran perusteet kerrataan, mutta lisätietoja löytyy teoksista [1] ja [3]. Kirjoitus on muokattu kandidaatintutkielmastani [2].

Olipa kerran pieni, mutta hyvin onnellinen kuningaskunta nimeltä Matikkylä. Kuningasperhe oli hyvin rakastavainen ja oikeamielinen alaisilleen. Kylässä vallitsi rauha.

Eräänä kauniina päivänä koko kuningaskunta joutui suuren murheen valtaan, sillä kaikkien rakastama prinsessa Amanda katosi yllättäen. Huolestunut kuningas pyysi apuun salapoliisi Linunhon, joka saapui linnaan nuori salapoliisiharjoittelija Victor Lininto mukanaan.

- Päivää, arvon kuningas. Voisitteko ystävällisesti kertoa prinsessa Amandan liikkeistä ennen hänen katoamistaan? Linunho aloittaa.

- Voi kyllä. Tämä on vaan niin surullista, kuningas aloittaa melkein itkuun purskahtaen. Hän saa kuitenkin hillittyä itsensä ja jatkaa: - Amanda lähti aamulla kylälle, kuten monesti ennenkin. Hänellä on tapana poiketa tervehtimässä ystäviään keskustan kahvilassa, ja usein matkalla hän pysähtyy juttelemaan muidenkin kylän asukkaiden kanssa. Tällä kertaa hän ei kuitenkaan koskaan palannut takaisin.

- Oletteko huomanneet mitään muuta epätavallista? Linunho kysyy.

Kuningas ei ehdi vastata, kun kuningatar ryntää hysteerisenä itkien huoneeseen. Hän ei pysty puhumaan, mutta ojentaa Linunholle postissa tulleen kirjekuoren. Linunho avaa kuoren ja ottaa siellä olevan paperinpalan hansikkaat käsissään. Siinä lukee epäselvin kirjaimin: ”Kiitos kaunis kaunokaisestanne! Miljoonalla eurolla saatte hänet takaisin. - Affmen”

- Affmen! Aivan kuin affiinit aliavaruudet, Lininto huudahtaa innostuneena.

- Siis mitkä? kuningas kysyy hämmentyneenä.

- Kyse on siis aliavaruuksista, jotka on siirretty pois origosta. Näin ollen ne eivät ole oikeita aliavaruuksia, joten niitä kutsutaan affiineiksi aliavaruuksiksi, Lininto vastaa.

Linunho pyöräyttää silmiään ja kuiskaa kuninkaalle: - Tuo kaveri joutaisi yliopiston tutkimuslaitokselle homehtumaan noiden matemaattisten ongelmiensa kanssa, ja jatkaa sitten suuremmalla äänellä: - Menen toimistolleni ottamaan tästä sormenjälkinäytteet. Lisäksi toivoisin, arvon kuningatar, että tulisitte mukaani antamaan sormenjälkenne, jotta osaamme erottaa tämän kirjoittaneen jäljet teidän jäljistänne. Tuo Affmen yrittää kiristää teitä, hyvä kuningatar. Älkää kuitenkaan vielä maksako tuota huikaisevaa summaa, sillä teemme kaikkemme löytääksemme prinsessan. Lähdetään! Jos menemme kävellen, voimme samalla tervehtiä kyläläisiä ja kysellä heiltä tietoja prisessasta.

Matkalla he tapaavat vanhan rouvan, hullun tiedemiehen, papin, kampaamon rouvan vilkkaat kaksospojat, sairaanhoitajan sekä puusepän. Tiedemies ja pappi kutsuvat heidät kahville, mutta muita he jututtavat vain kadulla. Kaikki heistä olivat nähneet aamulla prinsessan yhtä hyväntuulisena kuin aina ennenkin, mutta eivät osaa sanoa mitään hänen katoamisestaan. He osaavat olla ainoastaan kauhuissaan katoamisesta ja yrittävät lohduttaa kuningatarta.

Ryhmän saavuttua vihdoin toimistolle, Lininto ottaa salaperäisenä lapun taskustaan ja sanoo: - Katsokaa, mitä löysin sen hullun tiedemiehen lattialta teidän keskustellessanne. Lapussa lukee: ”S: 1/-15, E: 1/3”. Voisikohan tämä olla salakirjoitusta?

- Vaikka se mies vähän hullu onkin, niin mukava ja ystävällinen kuitenkin. Voin toki ottaa tuostakin lapusta sormenjäljet, mutta sitä hullua en kyllä ensimmäisenä olisi epäilemässä. Ja salakirjoitusta muka, hah, Linunho vastaa ivallisella äänellä.

Seuraavana aamuna Lininto saapuu Linunhon toimistolle hyvin väsyneenä.

- Missäs bileissä olet oikein ollut, kun tuolta näytät? Ei muuten löytynyt sormenjälkiä siitä paperilapusta, paitsi kuningattaren jäljet, Linunho mumisee sanomalehtensä takaa.

- Tein töitä koko yön, Lininto vastaa ja jatkaa: - Uskoisin prinsessan löytyvän Karulasta.

- Töitä? Karulasta? Linunho kysyy ihmetellen.

- Kyllä. Jos sinulla on muutama tunti aikaa, niin voin selittää kaiken, Lininto sanoo innostuneena.

- No, jos kerran olet varma asiastasi, niin antaa tulla. Karulaan saakka en kyllä pelkän arvailun perusteella lähde tilannetta katsomaan, Linunho myöntyy.

- Okei. Sinäkin olet tainnut aikoinasi opiskella hieman vektoreita ja lineaarialgebraa? Lininto kysäisee. Linunho vastaa tylysti: - Olen kyllä, mutta jos aiot luennoida minulle niistä, lähden tästä kyllä mieluummin kyläläisiä haastattelemaan.

- No hei, meidän paras, tai no oikeastaan ainoa, johtolankamme on prinsessan kaapanneen ryhmän nimi: Affmen. Aluksi ajattelin, että ”Aff” viittaa Afganistaniin, mutta se ajatus ei johtanut mihinkään ratkaisuun. Sitten tajusin: ”Aff” viittaa selvästi affiineihin kombinaatioihin, ”men” miesjoukkoon. Siitä päättelin, että ryhmä koostuu miehistä, jotka käyttävät affiineita kombinaatioita apunaan. Illalla keksin, että luultavasti hullu tiedemies tietää eniten näistä asioista. Niinpä pimeän tullen hiivin salaa hänen pihaansa. Kurkistelin hänen ikkunoistaan ja näin yhdessä huoneessa erikoisen, hieman aseen näköisen laitteen, jonka kyljessä luki: ”Affgun”. Se voisi tarkoittaa affiinia asetta. Tehtyäni sitten muutamia laskelmia, kävin vielä matematiikkanero T. Aigurin luona tarkistamassa, että päätelmäni ovat oikeita, Lininto selittää.

Hieman myötämielisempänä Linunho vastaa: - Kuulostaa aivan hullulta, mutta kerro pois. Aikamoinen sattuma, jos ”Affmenin” ja ”Affgunin” välillä ei ole mitään yhteyttä.

Kertausta

Niinpä Lininto aloittaa:

- Affiinit kombinaatiot ja riippuvuus saattavat aluksi kuulostaa vaikeilta ja kummallisilta asioilta. Sitä ne eivät kuitenkaan ole. Niihin liittyvä teoria pohjautuu vahvasti lineaarikombinaatioihin ja lineaariseen riippuvuuteen, joka sinulle olikin jo tuttua.

- Oli kyllä, mutta en muista siitä kyllä yhtään mitään, Linunho keskeyttää.

- Okei, kerrataan sitten hieman.

Vektori $v \in \mathbb{R}^n$ on vektoreiden v_i, missä $i \in \{1, \ldots, k\}$, *lineaarikombinaatio*, jos se voidaan esittää vektoreiden v_i reaalikertojen summana:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k.$$

Vektoreiden v_i, missä $i \in \{1, \ldots, k\}$, *lineaarinen riippuvuus* puolestaan tarkoittaa sitä, että jokin vektoreista voidaan esittää muiden joukon vektoreiden lineaarikombinaationa. Näin ollen vektorit v_i ovat *lineaarisesti riippumattomat*, mikäli yhtälö

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k = 0$$

pätee ainoastaan, kun jokainen reaaliluku $a_i = 0$.

- Aiemmin mainitsinkin jo jotain aliavaruuksista. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruudella tarkoitetaan sitä avaruutta $U \subset \mathbb{R}^n$, jonka vektoreiden reaalikerrat ja summat ovat nekin tämän avaruuden U vektoreita.

Määritelmä 1. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ epätyhjä osajoukko U on sen aliavaruus, jos seuraavat ehdot pätevät:

1. kaikilla $c \in \mathbb{R}$ ja $u \in U$ myös $cu \in U$ ja

2. kaikilla $u \in U$ ja $v \in U$ myös $u + v \in U$.

Määritelmän 1 ehdot voidaan esittää yhtäpitävästi myös muodossa

$$c_1 u_1 + \cdots + c_k u_k \in U$$

kaikilla $c_i \in \mathbb{R}, u_i \in U$ ja $i \in \{1, \ldots, k\}$, missä $k \geq 1$.

Huomautus 2. Aliavaruus sisältää aina nollavektorin. Muutoin määritelmän ehdosta 1. seuraisi ristiriita arvolla $c = 0$.

Koska aliavaruus sisältää aina nollavektorin, siitä seuraa, että suoran tai tason on kuljettava origon kautta, jotta se olisi aliavaruus. Vastaavasti myös useampiulotteisten avaruuksien on sisällettävä origo ollakseen aliavaruuksia.

- Osaatko Linunho sanoa, miten voimme tarkastella niitä tilanteita, joissa esimerkiksi taso ei kuljekaan origon kautta?

- No en kyllä osaa. Mitä väliä sillä on, missä se taso kulkee? Linunho vastaa.

- Jos halutaan suorittaa tasolle joitain operaatioita, emme voi tähän astisen lineaarialgebran tietämyksesi pohjalta tehdä niitä tasolle, joka ei kulje origon kautta. Monesti operaation suorittamisen kannalta helpointa on siirtää taso origoon, suorittaa operaatiot, jotka origossa osataan hyvin tehdä, ja palata sitten takaisin siihen paikkaan, missä taso oli alussa.

- Tuo kuulostaa aivan sekavalta! Miten se siirto oikein menikään? Linunho keskeyttää.

- Yksinkertainen matemaattinen esimerkki siirrosta on xy-tason suora $y = ax + b$, joka on suoran $y = ax$ siirto y-akselin suuntaan luvulla b, Lininto vastaa.

- Aivan! Nyt tajusin tuon, mutta mitä järkeä tuossa kaikessa edestakaisin siirtymisessä on? Linunho ihmettelee.

- Voit verrata sitä kylämme parturiin. Jos haluat eroon tuosta ihastuttavasta hiuspehkostasi, voit joko siirtyä parturimme luo leikkauttamaan hiuksesi ja palata takaisin. Toinen vaihtoehto on pyytää hänet tulemaan tänne hiuksiasi leikkaamaan. Monesti kuitenkin helpointa on, että sinä menet hänen luokseen, koska silloin hänen ei tarvitse roudata kaikkia välineitään tänne. Joissain tilanteissa, esimerkiksi pyörätuolissa olevan isäni tapauksessa, on kuitenkin parturin kotikäynti järkevämpi ratkaisu.

- Tuossa esimerkissä parturin työtila oli siis origo ja hiusten leikkaaminen se operaatio? Linunho varmistaa.

- Juuri niin. Tätä periaatetta tarvitaan nyt, kun siirrymme affiineihin kombinaatioihin. Tästä lähtien ajattelin muuten puhua pisteistä silloin, kun tarkoitan origosta tähän pisteeseen kulkevaa vektoria. Se on jatkon kannalta yksinkertaisempaa.

Affiinit kombinaatiot

Affiinit kombinaatiot ovat erikoistapaus lineaarikombinaatioista. Lineaarikombinaatio on siis affiini kombinaatio, jos seuraavan määritelmän ehto pätee.

Määritelmä 3. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteiden $v_1, v_2, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$ affiini kombinaatio on lineaarikombinaatio

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_pv_p,$$

missä kertoimille $c_1, \ldots, c_p \in \mathbb{R}$ pätee

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_p = 1.$$

Piste $y \in \mathbb{R}^n$ on siis pisteiden $v_1, v_2, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$ affiini kombinaatio, jos se on näiden sellainen lineaarikombinaatio, jossa reaalikertoimien c_i summa on 1.

Aliavaruus saatiin määriteltyä lineaarikombinaatioiden avulla ja vastaavasti affiinit aliavaruudet saadaan määriteltyä affiinien kombinaatioiden avulla.

Määritelmä 4. Äärellisen joukon S virittämä affiini aliavaruus on joukko, joka koostuu joukon S alkioiden kaikista affiineista kombinaatioista. Joukon S affiinia aliavaruutta merkitään $[S]$.

- Okei okei, Linunho keskeyttää. - Nyt tulee niin teoreettista juttua, etten enää ymmärrä mitään. Osaatko sanoa, mitä tämä käytännössä tarkoittaa?

- Toki. Jos äärellinen joukko S koostuu yhdestä pisteestä, $[S]$ on tämä piste. Jos äärellinen joukko S koostuu kahdesta pisteestä, $[S]$ on näiden läpi kulkeva suora. Tämä johtuu siitä, että affiiniin aliavaruuteen $[S]$ kuuluvat pisteet ovat joukon S pisteiden affiineita kombinaatioita. Eli jos joukko S koostuu pisteistä v_1 ja v_2, joukon $[S]$ pisteet y ovat muotoa $y = c_1v_1 + c_2v_2$, missä $c_1 + c_2 = 1$. Merkitään nyt asioiden selkeyttämiseksi $c_2 = t$. Tällöin joukon $[S]$ pisteet ovat muotoa

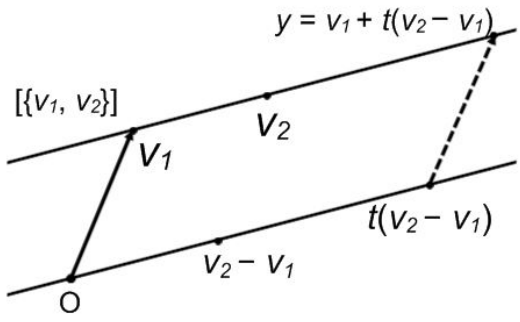
$$y = (1 - t)v_1 + tv_2,$$

missä $t \in \mathbb{R}$. Tämä voidaan muuttaa muotoon

$$y = t(v_2 - v_1) + v_1.$$

Tässä yhtälössä v_1 ja v_2 ovat vakiovektoreita ja t on muuttuja. Tätä avaruudessa $\mathbb{R}^n$ olevaa yhtälöä voi verrata xy-tasossa olevan suoran yhtälöön $y = ax + b$.

- Katsopas sitten, Linunho, tätä kuvaa 1. Se havainnollistaa asiaa geometrisesti ja siitä näkee paremmin sen, miten siirtoa käytettiin hyväksi: piste v_1 siirrettiin origoon ja myös pistettä v_2 siirrettiin vektorilla $-v_1$ eli pisteeseen $v_2 - v_1$.



Kuva 1

- Joo. Tuo kuva selkiyttää kyllä asiaa, Linunho myöntää.

- Hyvä. Tämä kuva antaakin jo viitteitä siitä, että affiinit aliavaruudet ovat siirrettyjä aliavaruuksia. Olen jo hieman tästä asiasta maininnutkin, mutta palaan tähän uudestaan myöhemmin ja perustelen sinulle, miksi niin on.

- Okei. Entä pystytäänkö äskeisen kaltaisia päättelyjä tekemään, jos joukko S koostuu useammasta kuin kahdesta pisteestä?

- Kyllä. Jos äärellinen joukko S koostuu kolmesta pisteestä, jotka eivät ole samalla suoralla, $[S]$ on näiden läpi kulkeva taso. Tämä saadaan pääteltyä vertaamalla aluksi kahta joukon S kolmesta pisteestä. Joukkoon $[S]$ kuuluu jokainen piste, joka on näiden kahden pisteen muodostama affiini kombinaatio, koska kolmannen vektorin kerroin voidaan asettaa nollaksi. Äskeisen päättelyn perusteella joukko $[S]$ sisältää siis kaikki kahden sen pisteen läpi kulkevan suoran pisteet. Kun sitten huomioidaan kolmaskin piste, päästään tältä suoralta poikkeamaan kolmannen pisteen suuntaan. Koska kolmatta pistettä voidaan kertoa millä tahansa reaaliluvulla niin, että kertoimien summa on 1, joukkoon $[S]$ sisältyy kaikki näiden kolmen pisteen kautta kulkevan tason pisteet. Kerron tästä lisää kuitenkin vasta myöhemmin ja perustelen asian silloin.

Jos S koostuu neljästä avaruuden $\mathbb{R}^3$ pisteestä, jotka eivät ole samalla suoralla tai tasolla, voimme vastaavanlaisella päättelyllä osoittaa, että $[S]$ on avaruus $\mathbb{R}^3$. Näiden päätelmien perusteella ymmärrämme seuraavan määritelmän joukon affiiniudelle.

Määritelmä 5. Joukko S on affiini, jos kaikille joukon S pisteille p ja q pätee $(1-t)p + tq \in S$ jokaiselle reaaliluvulle t.

Tämä tarkoittaa siis sitä, että jos joukosta S valitaan mitkä tahansa kaksi pistettä ja niiden läpi kulkeva suora kuuluu edelleen joukkoon S, joukon on oltava affiini. Näin ollen affiini joukko $[S]$ on äärellinen vain, jos joukko S on piste. Joukon affiiniutta voidaan tarkastella paremmin seuraavan lauseen avulla.

Lause 6. *Jos joukko S on affiini, sen kaikkien äärellisten osajoukkojen affiinit kombinaatiot kuuluvat joukkoon S.*

- Todistan tämän lauseen, jotta uskoisit sen olevan totta. Muistatko muuten induktiotodistuksen periaatteen?

- Eikös se ollut se missä piti tehdä joku oletus ja sen pohjalta todistaa joku väite? Linunho varmistaa.

- Hyvin muistettu! Lisäksi pitää aluksi todistaa väite jollekin alkuarvolle, Lininto lisää.

Todistus. Oletetaan, että joukko S on affiini. Merkitään joukon S osajoukon U pisteiden lukumäärää luvulla k.

Kun $k = 1$ tai $k = 2$, väite on totta määritelmän 5 nojalla.

Induktio-oletus on, että kun U koostuu pisteistä $v_1, \ldots, v_k$, näiden pisteiden affiinit kombinaatiot kuuluvat joukkoon S eli jokainen piste $y = c_1v_1, + \cdots + c_kv_k$, missä $c_1 + \cdots + c_k = 1$, kuuluu joukkoon S.

Induktioväite on, että tämä pätee myös, kun osajoukossa U on $k+1$ pistettä $v_1, \ldots, v_{k+1}$. Tarkastellaan pistettä $y = c_1v_1, + \cdots + c_kv_k + c_{k+1}v_{k+1}$, missä $c_1 + \cdots + c_{k+1} = 1$. Koska kertoimien c_i, missä $i \in \{1, \ldots, k+1\}$, summa on 1, vähintään yhden näistä kertoimista on oltava erisuuri kuin 1. Voidaan olettaa, että $c_{k+1} \neq 1$. Jos näin ei muuten ole, indeksoidaan termit v_i ja c_i uudestaan.

Olkoon $t = c_1 + \cdots + c_k$. Tällöin $t = 1 - c_k$, joten $t \neq 0$. Nyt

$$\begin{aligned} y &= c_1v_1 + \cdots + c_kv_k + c_{k+1}v_{k+1} \\ &= t(\frac{c_1}{t}v_1 + \cdots + \frac{c_k}{t}v_k) + c_{k+1}v_{k+1} \\ &= (1-c_{k+1})(\frac{c_1}{t}v_1 + \cdots + \frac{c_k}{t}v_k) + c_{k+1}v_{k+1}. \end{aligned}$$

Induktio-oletuksen mukaan piste $q = \frac{c_1}{t}v_1 + \cdots + \frac{c_k}{t}v_k$ kuuluu joukkoon S, koska sen esityksessä kertoimien summa on 1. Näin ollen yllä oleva lauseke on kahden joukon S pisteen affiini kombinaatio, koska $(1-c_{k+1}) + c_{k+1} = 1$, joten piste $y \in S$. Induktioperiaatteen mukaan affiinin joukon S kaikkien äärellisten osajoukkojen U affiinit kombinaatiot kuuluvat joukkoon S, joten $[U] \subset S$. Induktioväite on siis todistettu. □

- Voi miten upea todistus! Sitä vain ihmettelen, miten nämä kaikki asiat liittyvät prinsessan pelastamiseen, Linunho pohtii hieman jo väsyneen oloisena.

- Jotta saisimme selville prinsessan olinpaikan, meidän on ratkaistava eräs tyypillinen näihin asioihin liittyvä ongelma: meillä on tiedossa joukko pisteitä ja haluamme selvittää, onko jokin piste y näiden affiini kombinaatio.

- Vihdoin asiaa! Tehdäänkö se niin, että selvitämme, mitä y on näiden pisteiden lineaarikombinaationa, ja tarkistamme sitten, onko reaalikertoimien summa 1? Linunho keskeyttää innokkaana.

- Periaatteessa se on yksi keino. Ongelma on kuitenkin se, että y voidaan esittää usealla eri tavalla muiden pisteiden lineaarikombinaationa. Esitys ei siis ole yksikäsitteinen. Jos sattumalta löydät sellaisen lineaarikombinaatioesityksen, jossa kertoimien summa on 1, niin hieno juttu. Silloin olet osannut ilmaista pisteen y

muiden pisteiden affiinina kombinaationa. Jos et kuitenkaan löydä halutunlaista esitystä, se ei kuitenkaan tarkoita sitä, ettei sitä olisi olemassa, Lininto vastaa.

- Argh, kerrankin kun luulin jotain keksineeni. Miten se sitten tehdään? Linunho kysyy hieman turhautuen.

- Meillä on pari erilaista vaihtoehtoa siihen, miten se tehdään, ja esitän niistä nyt ensimmäisen, seuraavan lauseen mukaisen ratkaisutavan.

Lause 7. *Piste $y \in \mathbb{R}^n$ on pisteiden $v_1, v_2, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$ affiini kombinaatio, jos ja vain jos $y - v_i$ on lineaarikombinaatio siirretyistä pisteistä $v_1 - v_i, \ldots, v_{i-1} - v_i, v_{i+1} - v_i \ldots, v_p - v_i$ kaikille $i \in \{1, \ldots, p\}$.*

- Näyttää kyllä hienolta ja matemaattiselta, mutta mistä tiedät, että tämä väite on tosi? Jos prinsessan löytyminen on tästä kiinni, haluan perustelut väitteellesi, Linunho tokaisee.

- Hyvä on, todistan väitteeni:

Todistus. Todistetaan tilanteelle $i = 1$. Muut tilanteet voidaan todistaa vastaavasti.

Jos $y - v_1$ on lineaarikombinaatio pisteistä $v_2 - v_1, \ldots, v_p - v_1$, on olemassa sellaiset kertoimet $c_1, \ldots, c_p$, että pätee

$$y - v_1 = c_2(v_2 - v_1) + c_3(v_3 - v_1) + \cdots + c_p(v_p - v_1). \quad (5)$$

Kertomalla tämä auki saadaan

$$y - v_1 = c_2v_2 - c_2v_1 + c_3v_3 - c_3v_1 + \cdots + c_pv_p - c_pv_1.$$

Siirretään v_1 oikealta vasemmalle puolella ja otetaan sille yhteinen tekijä:

$$y = (1 - c_2 - c_3 - \cdots - c_p)v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + \cdots + c_pv_p. \quad (6)$$

Huomataan, että kertoimien summa on 1, joten y on pisteiden $v_1, v_2, \ldots, v_p$ affiini kombinaatio.

Oletetaan sitten päin vastoin, että

$$y = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + \cdots + c_pv_p, \quad (7)$$

missä $c_1 + c_2 + \cdots + c_p = 1$. Kun siirretään $c_2, \ldots, c_p$ oikealle, saadaan $c_1 = 1 - c_2 - c_3 - \cdots - c_p$. Sijoitetaan tämä yhtälöön (3), jolloin saadaan yhtälö (2). Tästä saadaan johdettua yhtälö (1), mikä osoittaa, että $y - v_1$ on lineaarikombinaatio pisteistä $v_2 - v_1, \ldots, v_p - v_1$. □

- Okei, uskotaan. Mitenkäs tämän avulla voimme sitten löytää prinsessan? Linunho kysyy hieman epäluuloisena.

Lininto vastaa innokkaana: - Uskon, että hullun tiedemiehen luota löytämäni lapun teksti: ”S: 1/-15, E: 1/3” tarkoittaa pisteitä $S = (1, -15)$ ja $E = (1, 3)$. Ne ovat yhdessä Matikkylän koordinaattien $33°15'29''$ eteläistä leveyttä (S) ja $115°57'6''$ itäistä pituutta (E) kanssa avain ratkaisuun. Samaistamme eteläisen leveyden koordinaatit pisteisiin $s_1 = (3, 3), s_2 = (1, 5)$ ja $s_3 = (2, 9)$ ja itäisen pituuden koordinaatit pisteisiin $e_1 = (11, 5), e_2 = (5, 7)$ ja $e_3 = (0, 6)$. Nyt ilmoitamme pisteen S pisteiden s_1, s_2 ja s_3 affiinina kombinaationa ja vastaavasti pisteen E pisteiden e_1, e_2 ja e_3 affiinina kombinaationa. Saamme reaalikertoimet, joiden avulla saadaan laskettua prinsessan uuden olinpaikan koordinaatit.

Esimerkki 8. Ilmoita piste $S = (1, -15)$ pisteiden $s_1 = (3, 3)$, $s_2 = (1, 5)$, $s_3 = (2, 9)$ affiinina kombinaationa, jos mahdollista.

Lasketaan aluksi lauseen 4 mukaiset siirretyt pisteet:

$s_2 - s_1 = (-2, 2)$, $s_3 - s_1 = (-1, 6)$ ja $S - s_1 = (-2, -18)$.

Lauseen 4 mukaan halutaan siis löytää sellaiset reaalikertoimet c_2 ja c_3, että

$$S - s_1 = c_2(s_2 - s_1) + c_3(s_3 - s_1) \text{ eli}$$

$$(-2, 18) = c_2(-2, 2) + c_3(-1, 6).$$

Tästä saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} -2c_2 - c_3 = -2 \\ 2c_2 + 6c_3 = -18. \end{cases}$$

Lisätään jälkimmäinen yhtälö ensimmäiseen yhtälöön:

$$\begin{cases} 5c_3 = -20 \\ 2c_2 + 6c_3 = -18. \end{cases}$$

Kerrotaan jälkimmäinen yhtälö luvulla $\frac{1}{2}$ ja ensimmäinen yhtälö luvulla $\frac{1}{5}$:

$$\begin{cases} c_3 = -4 \\ c_2 + 3c_3 = -9. \end{cases}$$

Kerrotaan ylempi yhtälö luvulla -3 ja lisätään se alempaan yhtälöön:

$$\begin{cases} c_3 = -4 \\ c_2 = 3. \end{cases}$$

Sama ratkaisu voidaan esittää niin sanotulla Gaussin ja Jordanin menetelmällä eli käyttäen rivioperaatioita seuraavasti:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & | & -2 \\ 2 & 6 & | & -18 \end{bmatrix} \xrightarrow{A_{21}(1)} \begin{bmatrix} 0 & 5 & | & -20 \\ 2 & 6 & | & -18 \end{bmatrix} \xrightarrow{M_2(\frac{1}{2})}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & | & -20 \\ 1 & 3 & | & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{M_1(\frac{1}{5})} \begin{bmatrix} 0 & 1 & | & -4 \\ 1 & 3 & | & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{A_{12}(-3)}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & | & -4 \\ 1 & 0 & | & 3 \end{bmatrix}.$$

Tästäkin nähdään, että $c_3 = -4$ ja $c_2 = 3$. Ratkaistaan vielä kerroin c_1 näiden avulla:

$$\begin{aligned} S - s_1 &= 3(s_2 - s_1) - 4(s_3 - s_1) \\ S &= 3s_2 - 3s_1 - 4s_3 + 4s_1 + s_1 \\ &= 2s_1 + 3s_2 - 4s_3. \end{aligned}$$

Nyt $c_1 + c_2 + c_3 = 2 + 3 - 4 = 1$, joten kyseessä todella on affiini kombinaatio.

Prinsessan olinpaikan eteläisen leveyden koordinaattien selvittämiseksi kerromme ratkaistuilla vakioilla c_1, c_2 ja c_3 alkuperäiset eteläisen leveyden koordinaatit:

$$2 \cdot 33° \;\; 3 \cdot 15' \;\; - 4 \cdot 29'' = 66° \;\; 45' \;\; - 116''.$$

Koska koordinaateissa on kyse asteista, minuuteista ja sekunneista, saamme muutettua -116 sekuntia positiiviseksi luvuksi lainaamalla 2 minuuttia:

$$66° \;\; 45' \;\; - 116'' = 66° \;\; 43' \;\; (120 - 116)'' = 66°43'4''.$$

Prinsessan olinpaikan eteläisen leveyden koordinaatit ovat siis $66°43'4''$.

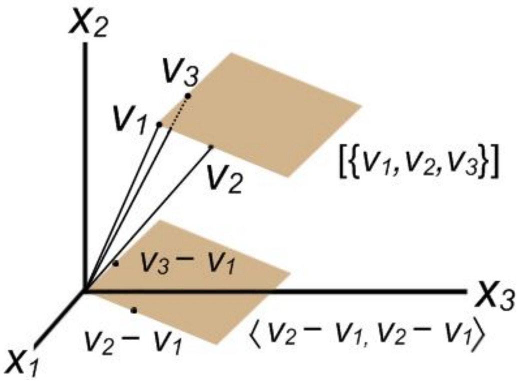
- Nerokasta! Miten tuon keksit? Linunho kysäisee.

- Noh, kyllä sitä muutamat muutkin jutut tuli kokeiltua. Monta tuntiahan siinä vierähti, mutta viimein keksin tämän, Lininto vastaa väsyneenä, mutta tyytyväisenä.

- Taisit sanoa, että prinsessan olinpaikan koordinaattien ratkaisemiseen olisi ollut joku toinenkin ratkaisutapa, Linunho sanoo ja jatkaa: - Onko se yhtään lyhyempi? Jos on, niin lasketaan ne itäisen pituuspiirin koordinaatit sillä tavalla. Tuon laskemisessa kesti nimittäin melko kauan, Linunho esittää toiveikkaana.

- Homogeenisten muotojen avulla olisimme voineet tuon ratkaista myös. Voimme hyvin laskea ne toiset koordinaatit sillä tavalla. Sitä ennen haluan kuitenkin perustella affiinin joukon ja siirretyn aliavaruuden välisen yhteyden, mitä aiemmin jo lupailinkin.

Joukon $S \subset \mathbb{R}^n$ siirto pisteellä p on siirretty joukko $S + p = \{s + p : s \in S\}$. Jos S on lineaarinen aliavaruus, $S + p$ on affiini aliavaruus. Huomaa, ettei tämä päde toisin päin, ja että piste p voi olla myös nolla, sillä aliavaruus on aina myös affiini aliavaruus. Tämä selittyy lauseen 7 ja kuvan 2 avulla: Piste $s_i \in S$ ja $s_i = s_i + p - p = v_i - p$, missä $v_i = s_i + p \in S + p$. Nyt jos $y \in S$ on pisteiden s_i, missä $i \in \{1, \dots, k\}$, lineaarikombinaatio, piste y on pisteiden $v_i - p$ lineaarikombinaatio, koska $v_i = s_i + p$ eli $s_i = v_i - p$. Piste y voidaan ilmaista muodossa $y = v_{k+1} - p$, jolloin lauseesta 7 seuraa, että v_{k+1} on pisteiden v_i, missä $i \in \{1, \dots, k\}$, affiini kombinaatio. Jos S on aliavaruus, tämä pätee kaikille joukon S pisteille $s_i = v_i - p$ ja näin ollen myös jokaiselle v_i, joten tällöin $S + p$ on joukon S affiini aliavaruus.



Kuva 2

Lauseiden 6 ja 7 perusteella voidaan myös todistaa, että jos joukko S on affiini, sen on oltava siirretty aliavaruus. Näin ollaan saatu johdettua seuraava tulos.

Lause 9. *Epätyhjä joukko S on affiini, jos ja vain jos se on siirretty aliavaruus.*

Affiineilla joukoilla on paljon yhteyksiä avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruuksiin, jotka voidaan ymmärtää lauseen 9 avulla. Affiinit joukot eli siirretyt aliavaruudet A ja $B \subset \mathbb{R}^n$ ovat yhdensuuntaiset, jos $A = B + p$ tai $B = A + p'$, missä p ja p' ovat joitain $\mathbb{R}^n$:n vektoreita. Toisin sanottuna affiinit joukot ovat yhdensuuntaiset, jos toinen on toisen siirto.

Aliavaruuden dimensiolla tarkoitetaan aliavaruuden ulottuvuutta. Suora avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on 1-ulotteinen siirretty aliavaruus, joten sen dimensio on 1. Jos taas siirretty aliavaruus T on taso, $\dim T = 2$ ja niin edelleen. Hypertasoksi kutsutaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ siirrettyä aliavaruutta, jonka dimensio on $n - 1$.

Voidaan sopia, että siirretyn aliavaruuden dimensio on sama kuin vastaavan siirtämättömän aliavaruuden dimensio. Tästä seuraa suoraan se, että myös yhdensuuntaisten siirrettyjen aliavaruuksien dimensiot ovat yhtä suuret. Siirrettyjen aliavaruuksien avulla voidaan myös määritellä joukon S dimensio: joukon S dimensio on yhtä suuri kuin pienimmän siirretyn aliavaruuden dimensio, joka sisältää joukon S.

- Oho, hieman taas innostuin. Mennäänpä nyt niihin homogeenisiin muotoihin, jotta pääsemme pian prinsessaa pelastamaan!

- Vihdoin, Linunho huokaa, mutta niin hiljaa, ettei Lininto kuule.

- Aluksi siis pisteen homogeenisen muodon määritelmä.

Määritelmä 10. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteen v homogeeninen muoto, merkitään $\hat{v}$, on piste $\hat{v} = (v, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

- Homogeenisten muotojen ja seuraavan lauseen avulla pystymme tosiaan selvittämään, onko piste y pisteiden v_i, missä $i \in \{1, \dots, p\}$, affiini kombinaatio. Todistan myös tämän lauseen mielenrauhasi vuoksi.

Lause 11. *Piste $y \in \mathbb{R}^n$ on pisteiden $v_1, v_2, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$ affiini kombinaatio, jos ja vain jos $\hat{y}$ kuuluu pisteiden $\hat{v}_i$, missä $i \in \{1, \ldots, p\}$, virittämään aliavaruuteen $\langle \hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_p \rangle$. Itse asiassa reaaliluvuille $c_1, \ldots, c_p$ pätee*

$$y = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + \cdots + c_pv_p,$$

missä $c_1 + c_2 + \cdots + c_p = 1$, jos ja vain jos

$$\hat{y} = c_1\hat{v}_1 + c_2\hat{v}_2 + \cdots + c_p\hat{v}_p.$$

Todistus. Olkoon piste y pisteiden $v_1, v_2, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$ affiini kombinaatio. Osoitetaan, että tällöin $\hat{y} = c_1\hat{v}_1 + c_2\hat{v}_2 + \cdots + c_p\hat{v}_p$:

$$\begin{aligned} &c_1\hat{v}_1 + c_2\hat{v}_2 + \cdots + c_p\hat{v}_p \\ &\quad = c_1(v_1, 1) + c_2(v_2,1) + \cdots + c_p(v_p,1) \\ &\quad = (c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_pv_p, c_1 + c_2 + \cdots + c_p) \\ &\quad = (y,1) = \hat{y}. \end{aligned}$$

Ylläoleva päättely pätee vain, kun y on pisteiden $v_1, v_2, \ldots, v_p$ affiini kombinaatio, joten koko lause on todistettu. □

- Näillä tiedoilla voimmekin sitten ratkaista itäisen pituuspiirin koordinaatit.

Esimerkki 12. Ilmoita piste $E = (1, 3)$ pisteiden $e_1 = (11, 5), e_2 = (5, 7)$ ja $e_3 = (0, 6)$ affiinina kombinaationa, jos mahdollista.

Muodostamme ensin pisteiden homogeeniset muodot: $\hat{e}_1 = (11, 5, 1)$, $\hat{e}_2 = (5, 7, 1)$, $\hat{e}_3 = (0, 6, 1)$ ja $\hat{E} = (1, 3, 1)$, jonka jälkeen ratkaisemme kertoimet c_1, c_2 ja c_3 yhtälölle

$$c_1(11, 5, 1) + c_2(5, 7, 1) + c_3(0, 6, 1) = (1, 3, 1).$$

Yllä olevasta yhtälöstä saamme tehtyä yhtälöryhmän, jonka voimme ratkaista kuten esimerkissä 8. Kertoimiksi saamme $c_1 = 1, c_2 = -2$ ja $c_3 = 2$. Näillä kertoimilla kerromme alkuperäiset itäisen pituuden koordinaatit, jotta saamme uudet selville:

$$1 \cdot 115^\circ \ - 2 \cdot 57' \ 2 \cdot 6'' = 115^\circ \ - 114' \ 12''.$$

Yksi pituusaste jakaantuu 60 minuuttiin, joten lainaamme kaksi astetta minuuteiksi ja saamme:

$$115^\circ \ -114' \ 12'' = 113^\circ \ (120-114)' \ 12'' = 113^\circ \ 6' \ 12''.$$

- Prinsessan sijainnin koordinaatit ovat siis $66^\circ 43' 4''$ eteläistä leveyttä ja $113^\circ 6' 12''$ itäistä pituutta. Nämä koordinaatit ovat Karulan koordinaatit, joten eikun menoksi!

- Karulan? Mikäs paikka se olikaan? Linunho kysäisee.

- Sieltä on se jääkiekkojoukkue Karulan Kanuunat! Lininto muistaa.

- Totta! Niiden pelejä on tullutkin joskus seurattua.

Lininto ja Linunho saapuvat vihdoin Karulaan. He suunnistavat paikalle, jossa selvitetyt leveys- ja pituuspiirit leikkaavat toisensa, mutta prinsessaa ei siellä näy! Paikka on keskellä pientä metsää, joten lähistöllä ei näy mitään muutakaan tavallisesta metsästä poikkeavaa. Masentuneina he palaavat Karulan keskustaan ja varaavat hotellihuoneen.

- Olet tainnut antaa ajatustesi laukata vähän liian lujaa, Linunho syyllistää.

- Olen ihan varma, että joko siellä metsässä tai tässä kylässä on joko prinsessa, tai jokin vihje hänen olinpaikastaan, Lininto puolustelee. - Mennään käymään uudestaan siellä metsässä. Ehkä siellä oli jokin johtolanka, jota emme vain huomanneet.

- Mene sinä vain, minä jään nukkumaan, Linunho sanoo haukotellen.

Lininto lähtee takaisin metsään johtolankoja etsimään. Leveys- ja pituuspiirien leikkauskohdassa ei näy jälkeäkään johtolangoista. Lininto meinaa jo luovuttaa, kunnes päättää vielä kokeilla, löytyisikö jotain maasta kaivamalla. Lininto löytää lähettyviltä kepin, jolla hän alkaa sorkkia ja kaivaa maata. Hetken kuluttua keppi kolahtaa johonkin kovaan. Se ei ole kivi. Lininto nostaa kaivamastaan kuopasta pienen rasian. Sen sisältää löytyy lappu, jossa lukee: " 0-1-2, 131, 252, 350". Lininto kopioi tekstin muistikirjaansa ja laittaa lapun takaisin rasiaan, rasian kuoppaan ja peittää kuopan hiekalla.

- Löysin kuin löysinkin jotain, Lininto huudahtaa hotellille palattuaan. - Löysin lapun, jossa on taas jotain numeroita. Taidan tämän yön viettää pohtien näiden merkitystä, Lininto jatkaa.

Linunho vilkaisee muistikirjaan kopioitua tekstiä ja toteaa: - Vai niin. Enpä tiedä onko tuosta mitään hyötyä. Jos olisit ottanut alkuperäisen lapun mukaan, olisin voinut käydä ottamassa siitä sormenjälkinäytteet. Ehkä teen sen sitten huomenna, nyt on unen aika.

Linunhon mentyä nukkumaan Lininto alkaa pohtimaan numeroiden merkitystä: - Pisteitä... Hmm. Salakirjoitusta? Tuskin. Affiineja kombinaatioita? Ei... Riippuvat? Ei, mutta riippumattomat. Riippumattomat. Hmm. Kuulostaa tutulta. Aah. Mihinkäs minä sen kartan laitoinkaan...

Aamuviideltä Linunho herää riemunkiljahdukseen.

- Mitä nyt? Linunho mumisee unenpöpperössä.

- Keksin, missä prinsessa on! Lininto huudahtaa. - Herää ja tule kuuntelemaan, kun paljastan lapun salaisuuden!

Affiini riippuvuus

- Lapun sisällön ymmärtäminen vaatii tietämystä affiinista riippuvuudesta ja riippumattomuudesta. Määrittelen siis ensin, mitä ne tarkoittavat.

Määritelmä 13. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteiden joukko $\{v_1,\ldots,v_p\}$ on affiinisti riippuva, jos on olemassa sellaiset reaaliluvut $c_1,\ldots,c_p$, että ainakin yksi niistä on erisuuri kuin 0 ja lisäksi $c_1 + \cdots + c_p = 0$ ja $c_1v_1 + \cdots + c_pv_p = 0$. Muulloin joukko on affiinisti riippumaton.

- Väitän, että lapun numerot voidaan tulkita pisteiksi, jotka ovat keskenään affiinisti riippumattomat. Tämän todistamiseen tarvitaan kuitenkin seuraava lause.

Lause 14. *Seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja avaruuden $\mathbb{R}^n$ joukolle $S = \{v_1,\ldots,v_p\}$, missä $p \geq 2$.*

1. *S on affiinisti riippuva.*
2. *Yksi joukon S pisteistä on muiden joukon S pisteiden affiini kombinaatio.*
3. *Joukko $\{v_1-v_i,\ldots,v_{i-1}-v_i,v_{i+1}-v_i,\ldots,v_p-v_i\} \in \mathbb{R}^n$ on lineaarisesti riippuva kaikille $i \in \{1,\ldots,p\}$.*
4. *Homogeenisten muotojen joukko $\{\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_p\} \in \mathbb{R}^{n+1}$ on lineaarisesti riippuva.*

Todistus. Väite saadaan todistettua olettamalla ensin, että kohta (1) pätee, ja että siitä seuraa kohta (2). Sen jälkeen todistetaan, että kohdasta (2) seuraa kohta (3) ja kohdasta (3) seuraa kohta (1). Lopuksi todistetaan vielä, että kohdat (1) ja (4) ovat ekvivalentteja.

Oletetaan, että joukko S on affiinisti riippuva, jolloin kertoimet $c_1,\ldots,c_p$, joista ainakin yksi on erisuuri kuin nolla, toteuttavat määritelmän 13 eli $c_1 + \cdots + c_p = 0$ ja $c_1v_1 + \cdots + c_pv_p = 0$. Voidaan olettaa, että $c_1 \neq 0$, sillä tarvittaessa pisteet voidaan indeksoida uudelleen. Jaetaan kaksi edellä olevaa yhtälöä termillä c_1, jolloin saadaan $1 + \frac{c_2}{c_1} + \cdots + \frac{c_p}{c_1} = 0$ ja

$$v_1 = \frac{-c_2}{c_1}v_2 + \cdots + \frac{-c_p}{c_1}v_p.$$

Jälkimmäisessä esityksessä kertoimien summa on täten 1, joten piste v_1 on muiden joukon S pisteiden affiini kombinaatio, toisin sanottuna väite (2) pätee.

Oletetaan seuraavaksi, että yksi joukon S pisteistä on muiden joukon S pisteiden affiini kombinaatio. Voidaan yksinkertaisuuden vuoksi olettaa, että tämä piste on v_1, sillä tarvittaessa pisteet voidaan indeksoida uudelleen. Nyt siis pätee $v_1 = c_2v_2 + \cdots + c_pv_p$, missä $c_2 + \cdots + c_p = 1$. Näistä saadaan

$$(c_2 + \cdots + c_p)v_1 = c_2v_2 + \cdots + c_pv_p$$

ja tästä edelleen kertomalla vasen puoli auki, siirtämällä termit oikealle puolelle ja ottamalla yhteiset tekijät saadaan

$$c_2(v_2 - v_1) + \cdots + c_p(v_p - v_1) = 0.$$

Kertoimista $c_2,\ldots,c_p$ vähintään yhden on oltava erisuuri kuin nolla, koska niiden summa on 1. Tästä seuraa, että joukko $\{v_1-v_i,\ldots,v_{i-1}-v_i,v_{i+1}-v_i,\ldots,v_p-v_i\} \subset \mathbb{R}^n$ on lineaarisesti riippuva eli väite (3) pätee.

- Hetkonen, Linunho keskeyttää. - Eihän tuo voi pitää ollenkaan paikkaansa. Äsken esittelemäsi määritelmän 13 perusteella myös noiden kertoimien $c_2,\ldots,c_p$ summan olisi pitänyt olla nolla, jotta nuo pisteet voisivat olla riippuvat.

- Nyt sekoitit affiinin ja lineaarisen riippuvuuden. Tuo mitä sanoit on aivan totta affiinille riippuvuudelle, mutta tässä väitettiin pisteiden $v_2 - v_1,\ldots,v_p - v_1$ olevan vain lineaarisesti riippuvat. Lineaarisen riippuvuuden kertasimme aivan alussa. Kertoimien summa voi olla siis mikä vain, kunhan jokin niistä on erisuuri kuin nolla, Lininto selittää.

- Jatketaan. Seuraavaksi oletetaan, että väite (3) pätee. Tällöin on olemassa kertoimet $c_2,\ldots,c_p$, joista ainakin yksi on erisuuri kuin nolla ja joille pätee

$$c_2(v_2 - v_1) + \cdots + c_p(v_p - v_1) = 0.$$

Kertomalla tämä auki saadaan

$$-(c_2 + \cdots + c_p)v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_pv_p = 0.$$

Huomataan, että myös kertoimien summa on 0, joten määritelmän 13 nojalla joukko S on affiinisti riippuva eli väite (1) pätee.

Lisäksi vielä väitteet (1) ja (4) ovat ekvivalentteja, sillä määritelmän 13 mukaiset ehdot ovat ekvivalentteja seuraavan yhtälön kanssa

$$c_1(v_1,1) + c_2(v_2,1) + \cdots + c_p(v_p,1) = (0,0).$$

Lause on siis todistettu. □

- Seuraavaksi voimmekin sitten osoittaa lapun pisteet affiinisti riippumattomiksi. Lapussa luki siis " 0-1-2, 131, 252, 350", ja uskomukseni mukaan se tarkoittaa pisteitä $v_1 = (0,-1,-2)$ ja niin edelleen.

Esimerkki 15. Osoita pisteet $v_1 = (0,-1,-2), v_2 = (1,3,1), v_3 = (2,5,2)$ ja $v_4 = (3,5,0)$ affiinisti riippumattomiksi.

Lauseen 14 mukaan riittää osoittaa, että joukko $\{v_2 - v_1, v_3-v_1, v_4-v_1\}$ on lineaarisesti riippumaton. Tällöin yhtälön

$$c_2(v_2 - v_1) + c_3(v_3 - v_1) + c_4(v_4 - v_1) = 0 \qquad (8)$$

on oltava voimassa vain, jos jokainen kertoimista c_2, c_3 tai c_4 on nolla. Lasketaan erotuspisteet: $v_2 - v_1 = (1,4,3), v_3 - v_1 = (2,6,4)$ ja $v_4 - v_1 = (3,6,2)$. Nyt

$$
\begin{aligned}
&(0,0,0)\\
&= c_2(v_2 - v_1) + c_3(v_3 - v_1) + c_4(v_4 - v_1)\\
&= c_2(1,4,3) + c_3(2,6,4) + c_4(3,6,2)\\
&= (c_2, 4c_2, 3c_2) + (2c_3, 6c_3, 4c_3) + (3c_4, 6c_4, 2c_4)\\
&= (c_2 + 2c_3 + 3c_4, 4c_2 + 6c_3 + 6c_4, 3c_2 + 4c_3 + 2c_4).
\end{aligned}
$$

Tästä saamme muodostettua yhtälöryhmän, josta saamme ratkaistua kertoimiksi $c_2 = c_3 = c_4 = 0$. Kaikkien kertoimien c_2, c_3 ja c_4 on siis oltava nollia, jotta yhtälö (4) olisi voimassa. Näin ollen joukko $\{v_2 - v_1, v_3 - v_1, v_4 - v_1\}$ on lineaarisesti riippumaton.

- Katsohan sitten tätä karttaa. Riippumatontie. Joukko oli riippumaton. Prinsessan on pakko olla siellä! Kello onkin jo kahdeksan, niin voimme käydä hakemassa varmuuden vuoksi paikallisen poliisipartion mukaamme.

Lininto ja Linunho lähtevät yhdessä Karulan poliisiasemalle ja pyytävät sieltä poliisipartion mukaansa. Poliisipartio piirittää talon Lininton ja Linunhon mennessä ovelle. Oven tulee avaamaan hullu tiedemies. Hän ja Linunho meinaavat pyörtyä kilpaa toisensa nähdessään, mutta Lininto pysyy viileänä ja pyytää hullua tiedemiestä luovuttamaan prinsessan. Hullu tiedemies ei ole saada sanaa suustaan.

- P-p-p-prinsessan?

- Kyllä. Tiedämme, että Matikkylän prinsessa Amanda on täällä. Jos et luovuta häntä suosiolla, poliisipartiomme on valmiina toimintaan, Lininto toteaa tyynesti. Samalla poliisipartio alkaa lähestyä taloa aseet valmiudessaan.

- Kädet ylös ja ulos! poliisipartion johtaja huutaa.

Hullulla tiedemiehellä ei ole muuta vaihtoehtoa kuin totella. Masentuneena hän tottelee. Poliisipartio menee taloon, mutta koko talosta löytyy vain pari tiedemiehen kaveria. Prinsessaa ei näy missään.

- No niin, Lininto, taisit vetää vesiperän, Linunho alkaa naljailla.

Lininto ei moisesta masennu vaan lähtee itse kiertämään taloa.

- Riippumatto! Lininto huudahtaa olohuoneesta. - Lapussa olleet pisteet olivat riippumattomia, joten...

Lininto alkaa tutkia seinää, jossa riippumatto on kiinni. Riippumaton vieressä on kirjahylly, jonka takaa Lininto löytää oven. Oven, jonka takaa löytyy prinsessa Amanda. Lininton ja Amandan katseet kohtaavat, ja rakkaus on molemminpuolista ensi silmäyksellä!

- Kuinka tämän teit? Linunho tiedustelee hullulta tiedemieheltä myöhemmin poliisiasemalla.

- Sitä ette saakaan ikinä tietää, tiedemies naureskelee partaansa.

- Ammuitko prinsessan tänne Affgunillasi? Linunho jatkaa.

Hullu tiedemies jää melkein sanattomaksi. - Affgunilla? Kuinka tiedät siitä? No, joo. Affgunilla pystyin muuttamaan hänen sijaintinsa koordinaatit affiineja kombinaatioita hyödyntäen.

- Siis ihan niinkuin Lininto sanoi! Affiini ase! Höyrähtänyt kaveri, mutta aikamoinen nero kuitenkin.

- Täten julistan prinsessa Amandan ja salapoliisi Lininton aviopuolisoiksi, pappi kuuluttaa Matikkylän kirkossa kuukauden kuluttua. Koko kylän väki, lukuunottamatta vankilassa istuvaa hullua tiedemiestä, on kutsuttu hääjuhliin. Riemu on rajaton. Kaikista onnellisimpia ovat kuitenkin morsian ja sulhanen, jotka saivat toisensa.

Lähdeluettelo

[1] Häsä, Oinonen, Rämö: *Johdatus lineaarialgebraan, Osa I.* Helsingin yliopisto, 2013. `http://www.mv.helsinki.fi/home/jramo/lm2_kesa2013/linis_materiaali_osa1.pdf`, luettu 2.12.2013.

[2] Noora Karvinen: *Affiini kombinaatio ja riippuvuus.* LuK-tutkielma, Jyväskylän yliopisto, 2013.

[3] Mikko Saarimäki: *Vektorilaskentaa euklidisissa avaruuksissa.* Luentomoniste 65, matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto, 2012.