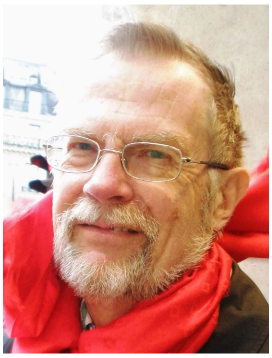

Matematiikan merkityksestä

Aatos Lahtinen
professori emeritus, Helsingin yliopisto

Johdanto

Matematiikka on kautta aikojen kuulunut koulujen ja yliopistojen opetusohjelmaan. Jo 2400 vuotta sitten antiikin Kreikassa filosofi Platonin perustaman yliopiston edeltäjän Akademeian pääsyvaatimuksena oli geometrian osaaminen. Ei siis ihme, että Suomessakin matematiikka on pakollinen aine niin peruskoulussa kuin lukiossa jo ensimmäisestä luokasta alkaen. Tästä huolimatta matematiikan merkitys ja tarpeellisuus jää usein epäselväksi. Ehkä oleellisimpana syynä tähän on matematiikan kumulatiivinen luonne, jonka vuoksi koulussa ei pystytä opiskelemaan varsinaista matematiikkaa, vaan ainoastaan eräiden matematiikan työkalujen käyttöä. Se, mitä matematiikka itse asiassa on, jää pimentoon. Samalla jää pimentoon yhteiskunnan kaikilla alueilla oleva suuri matematiikan tarve ja sen syyt.

Matematiikan olemuksesta

Matematiikan todellisen olemuksen ymmärtämistä vaikeuttaa se, että me emme voi nähdä emmekä koskettella sitä, sillä matematiikka on näkymätön ja aineeton. Siitä huolimatta on mahdollista havainnollistaa, mitä matematiikka oikein on ja mitä se saa aikaan.

Oleellista on, että matematiikka on ikivanha tieteenala, joka on täysin itsenäinen. Se ei tarvitse mitään ulkopuolista tukea. Matematiikassa rakennetaan ja käsitellään abstrakteja systeemejä logiikan keinoin. Systeemeillä ei tarvitse olla mitään tekemistä todellisuuden kanssa. Työkaluina rakennustyössä käytetään muun muassa koulumatematiikassa opiskeltuja asioita. Työn vaiheet kirjataan muistiin erityisen matemaattisen kielen avulla. Tämän kielen tarkkuus ja ilmaisukyky on saanut myös monien muiden tieteenalojen tutkijat käyttämään sitä omissa tutkimuksissaan.

Matematiikkaa voi verrata valtavan kokoiseen monikerroksiseen katedraaliin, joka kurottuu korkeaholvisine laivoineen, torneineen ja sivulaivoineen korkeammalle ja korkeammalle kohti taivasta. Vaikka katedraalia on rakennettu jo tuhansia vuosia, se on edelleen selvästi keskeneräinen. Kuitenkin katedraalin työmaalla on jatkuvasti runsaasti rakentajia. World Directory of Mathematicians, joka pitää luetteloa työmaan miehityksestä, sisältää tällä hetkellä yli 50 000 nimeä. Tämä joukko rakensi viime vuonnakin katedraaliin lisäkerroksia, torneja ja ulokkeita yli 50 000 tieteellisellä julkaisulla, joista jokainen sisältää uusia matemaattisia tuloksia. Ei ole mitään merkkejä siitä, että rakentamisen tahti hiipuisi, pikemminkin päinvastoin. Tästä huolimatta katedraalin valmistuminen ei tunnu lainkaan lähestyvän. Katedraalin rakennussuunnitelmassa kerrosten lukumäärää ei ole rajoitettu, joten matemaatikoilla riittänee työtä koko maapallon arvioidun eliniän eli ainakin viisi miljardia vuotta.

Viime vuosina on puhuttu paljon rakentamisen huonosta laadusta. Vain parikymmentä vuotta vanhat rakennukset saattavat jo olla peruskorjauksen tarpeessa. Matematiikan katedraali tekee tässä suhteessa poikkeuksen. Sen jokainen tiilikin kestää muuttumattomana ikuisuuden, sillä oikeaksi todistetut matematiikan tulokset pysyvät ikuisesti oikeina.

Matematiikan katedraalin rakentajien ei tarvitse koskaan korjata vanhaa, vaan he voivat huoletta rakentaa uusia tuloksia jo olemassa olevan matematiikan päälle. Tämä mahdollistaa matematiikan jatkuvan nousun yhä korkeammalle. Tämä matematiikan kumulatiivisuus ei välttämättä ole ilouutinen aloittelevalle rakentajalle, sillä hänen on kiivettävä monet katedraalin kerrokset ylöspäin, ennen kuin löytää kohdan, josta voi jatkaa rakentamista ylöspäin. Tosin suuret matemaatikot ovat nousseet niin nopeasti huipulle, että heidän on täytynyt syntyä katedraalin yläkerroksissa alakertojen pohjapiirustus nyrkissään.

Matematiikan käsittämätön tehokkuus

Matematiikka on siis loogisia rakenteita käsittelevä abstrakti tiede, jota tutkitaan muiden tieteiden tapaan sen itsensä kehittämiseksi. Tällaisten todellisuudesta riippumattomien rakenteiden luominen ja tutkiminen on kiehtovaa luovaa työtä, joka tarjoaa myös esteettisiä elämyksiä. Nykyisen markkinatalouden aikana on kuitenkin kysyttävä, mitä hyötyä on todellisuudesta riippumattomien rakenteiden tutkimisesta.

Kysymykseen on yllättävä, paradoksinen vastaus. Nimenomaan matematiikan todellisuudesta riippumattomuus tekee siitä käsittämättömän tehokkaan todellisuuden kuvaajan, jota voidaan käyttää käytännön ongelmien ratkaisuun lähes kaikilla elämänaloilla. Tämä matematiikan ainutlaatuinen soveltuvuus sekä teorian että käytännön tehtäviin tekee siitä tärkeän sekä muille tieteille että yhteiskunnalle ja antaa matematiikalle itseoikeutetun sijan koulujen opetusohjelmissa.

Matematiikan rakenteen todellisuudesta riippumattomuuden etu on siinä, että matemaattista rakennetta voidaan käyttää kuvaamaan mitä tahansa ilmiötä, jonka perusominaisuuksiin juuri tämä rakenne sopii. Sillä, mikä ilmiö todellisuudessa on, ei ole rakenteen kannalta mitään merkitystä. Tarkastellaan paria yksinkertaista esimerkkiä.

Todellisuudesta riippumattomuus alkaa jo luvuista. Luku ei riipu siitä, minkä lukumäärää se asetetaan kuvaamaan. Luvulla 7 voidaan merkitä yhtä hyvin Otavan tähtien lukumäärää kuin asuinrakennuksen korkeutta metreissä.

Lukujen riippumattomuudesta seuraa edelleen laskutoimitusten riippumattomuus kohteesta. Prosenttilaskun kaavassa

$$b = \left(1 + \frac{p}{100}\right) a$$

on aivan samantekevää, onko a metrejä, kiloja, euroja, kappaleita tai mitä tahansa luvuilla kuvattavaa, kaava antaa aina p prosentin kasvun vaikutuksen mille tahansa prosenttiluvulle p. Poplaulaja Robinin levymyynnin kasvu, hampurilaisaterian hinnannousu ja hiilidioksidin lisääntyminen ilmakehässä, kaikki saadaan samalla tavalla kaavasta.

Lukiossa esitelty derivaatta on esimerkki vähän syvällisemmästä matematiikan työkalusta. Derivaatta määritellään raja-arvona, joka liittää annettuun funktioon f jokaisessa pisteessä x arvon $f'(x)$. Määritelmä ei riipu siitä, onko funktiolla f ja pisteellä x jokin merkitys todellisuudessa vai ei. Tällä abstraktisti määritellyllä, todellisuudesta riippumattomalla derivaatalla on kuitenkin runsaasti käytännön sovellutuksia.

Yleinen sovellutus on annetun systeemin pienimmän arvon määrittäminen. Jos derivoituva funktio f kuvaa tiettyä yhden muuttujan x systeemiä, löytyy systeemin pienin arvo derivaatan $f'(x)$ nollakohtien joukosta (tai välin päätepisteistä, jos tarkasteluvälin päätepisteet kuuluvat tarkastelujoukkoon). Se, millainen systeemi on ja millaista todellisuutta funktio f kuvaa, ei vaikuta tarkasteluun. Kyseessä voi yhtä hyvin olla pakkausmateriaalin määrä kuin lämmityskustannukset.

Derivaatta antaa käytännön tietoa myös liikkuvasta objektista, jonka kulkema matka s tiedetään ajan t funktiona muodossa $s = f(t)$. Jos funktio on derivoituva, antaa sen derivaatta $f'(t)$ objektin nopeuden $v(t)$ hetkellä t täysin riippumatta siitä, onko kyseessä pikajuoksija, leijona, auto, lentokone vai laavavirta eli riippumatta siitä, mikä objekti todellisuudessa on. Itse asiassa sama pätee kaikkiin systeemeihin, jotka muuttuvat jollain tavalla ajan mukana. Derivaatta antaa aina systeemin muutosnopeuden kokonaan siitä riippumatta, mitä systeemi todellisuudessa kuvaa.

Matematiikan sovellutuksissa ilmiön käyttäytymistä hallitaan matemaattisilla yhtälöillä, jotka on muodostettu sen tiedon varassa, mitä meillä ilmiöstä on. Yhtälöt saattavat olla hyvinkin monimutkaisia ja niillä saattaa olla monenlaisia ratkaisuja. Oma ongelmansa on tulkita, mitä saadut matemaattiset ratkaisut kertovat ilmiöstä. Saattaa myös käydä niin, että joillekin ratkaisuille ei löydy konkreettista merkitystä. Tällaisen ratkaisun ei kuitenkaan aina tarvitse olla soveltajalle hyödytön. Näennäisesti outo ratkaisu saattaakin joskus kertoa ilmiöstä ominaisuuksia, joita ei vielä ole löydetty. Esimerkiksi antimateria ja osa alkeishiukkasista on löydetty juuri pohtimalla, mitä matemaattisen mallin outo ratkaisu yrittää kertoa meille.

Vaikka matematiikan rakenteet ovat todellisuudesta riippumattomia, niiden muodostaminen on saattanut saada innoituksensa todellisuudesta. Usein on käynyt niin, että kun todellisen maailman ilmiölle ei löydetä sopivaa matemaattista mallia, matemaatikot ovat innostuneet kehittämään sellaista uutta matematiikkaa, jolla ilmiö saataisiin hallintaan.

Matematiikan katedraali on soveltajalle varsinainen aarreaitta, jossa on lukemattomia käytännön tarpeisiin soveltuvia abstrakteja rakennelmia. Ongelmaksi jää, miten soveltaja löytää tästä paljoudesta juuri hänen tarvitsemansa rakenteet. Katedraalin rakenteet ovat todellisuudesta riippumattomia, eikä niissä ole tuoteselosteita, jotka kertoisivat mihin kaikkeen niitä voisi käyttää. Ei myöskään ole mitään takeita siitä, että umpimähkään valitulle matematiikan rakenteelle löytyisi tällä hetkellä käyttöä ihmisen todellisuudessa.

Punainen tarra

Warwickin yliopiston matematiikan professori Ian Stewart esitti kerran, että matematiikan merkitystä voitaisiin havainnollistaa kiinnittämällä kaikkeen matematiikkaa hyödyntävään punainen tarra: ”SISÄLTÄÄ MATEMATIIKKAA”. Stewart ryhtyi samalla listaamaan kiinnityskohteita.

Punaisen tarran saisi tietysti jokainen tietokone, jokainen tabletti ja jokainen puhelin. Tarra kiinnitettäisiin myös jokaiseen automaattihissiin, jokaiseen uudehkoon tai uuteen autoon, jokaiseen lentokoneeseen, jokaiseen sähköveturiin ja jokaiseen laivaan. Lisäksi tarra tulisi jokaiseen CD-, DVD- ja BlueRay-soittimeen, jokaiseen televisioon ja jokaiseen erikoistehosteita sisältävään elokuvaan. Väistämättä tarran saisi Internet ja jokainen sitä käyttävä sovellus kuten Google, Facebook, YouTube, Twitter. Tarra liimattaisiin myös jokaiseen vaaligallupiin ja jopa jokaiseen kaupallisesti viljeltyyn vihannekseen, koska niiden jalostus on nojannut biomatematiikkaan.

Punaisten tarrojen kiinnitys ei rajoittuisi vain esineisiin. Tieteiden puolella punaisen tarran saisivat melkein kaikki luonnontieteiden tulokset samoin kuin useat muiden tieteiden tulokset, koska niiden kehittelyssä ja ilmaisussa on käytetty matematiikkaa.

Luetteloa voisi jatkaa, mutta jo esitetty osoittaa, että punaiset tarrat peittäisivät lähes koko maailman. Niinpä idean toteutus kaatuisi käytännössä rahan ja kiinnittäjien puutteeseen. Tarroittaminen on kuitenkin niin hyvä keino havainnollistaa matematiikan merkitys, että matemaattinen yhteisö voisi yrittää saada EU:n säätämään direktiivin, joka velvoittaisi kaikki matematiikkaa sisältävien laitteiden valmistajat kiinnittämään laitteisiinsa tuon punaisen tarran. On EU tehnyt paljon turhempiakin direktiivejä.

Matematiikan tekijät ja käyttäjät

Punaiset tarrat osoittavat, että matematiikka on yhteiskunnalle välttämätöntä. Lisäksi matematiikka on monen tieteenalan oleellinen apuväline. Esimerkiksi fysiikan kehitys olisi ollut mahdotonta ilman matematiikkaa. Samoin ihmiskunnan tulevaisuudelle elintärkeä ilmastonmuutoksen ennustaminen on täysin riippuvainen monimutkaisten matemaattisten mallien kyvystä kuvata ilmastoa.

Matematiikka ei kuitenkaan tee itse mitään, tarvitaan ihmisiä, jotka ymmärtävät matematiikkaa ja osaavat käyttää sitä. Matematiikan valtavan laajuuden vuoksi sen parissa työskentelevien on pakko erikoistua.

Tarvitaan ensinnäkin tieteentekijöitä, ns. puhtaita matemaatikkoja, jotka omalla luovalla työllään rakentavat matematiikan valtavaan katedraaliin uusia kerroksia ja torneja, joista näkee yhä kauemmaksi. Toiseksi tarvitaan käytännön soveltajia, insinöörejä, maistereita ja tohtoreita, jotka kehittävät punaiseen tarraan oikeuttavia, matematiikan avulla toimivia laitteita. Kolmanneksi tarvitaan oppaita, ns. soveltavia matemaatikkoja, jotka tuntevat matematiikan katedraalia niin hyvin, että osaavat löytää tosielämän ongelman parissa työskenteleville insinööreille, maistereille ja tohtoreille juuri sellaiset matematiikan rakenteet, joita ongelman ratkaisemiseen tarvitaan.

Matematiikan katedraalin suuruus ja punaisten tarrojen paljous kertovat, että uuden matematiikan luojia, matematiikan käytännön soveltajia ja oppaita tarvitaan paljon. Suomessakin tällaisten osaajien vuosittainen kysyntä ylittää tarjonnan eli ylioppilaskirjoituksissa pitkän matematiikan kokeen suorittajien määrän. Matemaattispohjaisten alojen jatko-opiskelu on nimittäin vaikeata ilman lukion pitkän matematiikan antamaa pohjaa. Lukion aloittava opiskelija, joka haluaa katedraalin rakentajaksi, punaisen tarran käytön lisääjäksi tai katedraalin oppaaksi, tekee siis viisaasti valitessaan pitkän matematiikan. Valinta tuo mukanaan työntekoa, mutta myös elämyksiä. Ennenkaikkea valinta antaa mahdollisuuden osallistua paremman tulevaisuuden rakentamiseen.