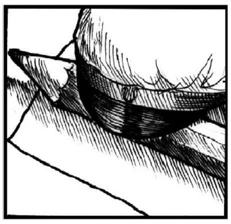


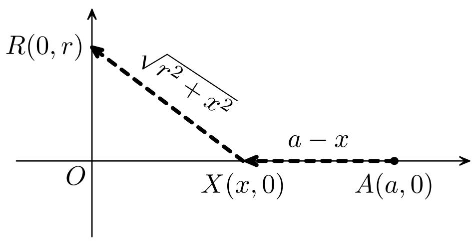
Vuoden 1934 ylioppilaskoetehtävä

Lehtori K.

Solmussa 3/2013 jäimme pohtimaan vuoden 1934 keväällä ylioppilaskokeessa ollutta kakkostehtävää. Tuolloin ei lukiossa opiskeltu differentiaalilaskentaa, mutta ääriarvoja kuitenkin määritettiin. Tehtävä oli seuraava:

”Piste P liikkuu vakinaisella nopeudella pitkin x-akselia origoa kohti, kunnes se saapuu pisteeseen Q, josta se nopeudella, joka on puolet edellisestä, jatkaa matkaansa y-akselilla olevaa annettua pistettä R kohti. Missä kohdassa pisteen Q tulee sijaita, jotta piste P mahdollisimman pian saapuisi pisteeseen R? Piirrä kuvio ja merkitse pisteen Q oikea paikka.”

Olkoon lähtöpiste $A(a,0)$, päätepiste $R(0,r)$ ja poikkeamispiste toistaiseksi tuntematon $X(x,0)$. Reitti näyttää seuraavalta:



Näillä palikoilla matkaan AXR kuluva aika

$$t = \frac{a-x}{c} + \frac{2\sqrt{r^2+x^2}}{c}, \tag{1}$$

missä c on pisteen nopeus x-akselilla. On siis löydettävä pienin mahdollinen $t = t_{\min}$ siten, että yhtälöllä (1) on reaalinen ratkaisu x. Yhtälö sievenee muotoon

$$(ct-a)+x = 2\sqrt{r^2+x^2}. \tag{2}$$

Selvästi $ct-a>0$ ja $x>0$, joten yhtälön (2) molemmat puolet ovat positiivisia. Neliöimällä saamme sievennysten jälkeen

$$3x^2 - 2(ct-a)x + 4r^2 - (ct-a)^2 = 0.$$

Diskriminanttiehto sievenee epäyhtälöksi

$$(ct-a)^2 - 3r^2 \geq 0,$$

mistä seuraa

$$ct \leq a - r\sqrt{3} \quad \text{tai} \quad ct \geq a + r\sqrt{3}.$$

Näistä oikeanpuoleinen toteuttaa ehdon $ct > a$, joten

$$t_{\min} = \frac{a + r\sqrt{3}}{c},$$

ja sitä vastaava poikkeamiskohta

$$x = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Siis

$$Q = \left(\frac{r}{\sqrt{3}}, 0\right).$$

Pisteen Q paikantaminen onnistunee yksinkertaisimmin piirtämällä aluksi origokeskeinen r-säteinen ympyrä. Erotetaan sitten R:stä alkavan halkaisijan toisesta päätepisteestä S koordinaatiston neljänteen neljännekseen 60°:een kaari ST. Jana RT leikkaa x-akselin etsityssä pisteessä Q.