Solmu

Matematiikkalehti
1/2015

http://solmu.math.helsinki.fi

Solmu 1/2015

ISSN-L 1458-8048
ISSN 1459-0395 (Painettu)
ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)
00014 Helsingin yliopisto

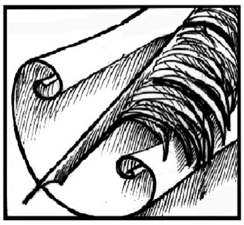
http://solmu.math.helsinki.fi

Numeroon 2/2015 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 31.3.2015 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.

Sisällys



Opetussuunnitelmaan ohjelmointia

Pääkirjoitus

Uuden opetussuunnitelman myötä matematiikan opetukseen tulee suuria uudistuksia. Uudistuksista eniten näkyvyyttä ovat ansaitusti saaneet ohjelmointiopetus peruskoulussa ja lukion pitkän ja lyhyen matematiikan yhteinen kurssi.

Uudistuksista on iloittu. Niitä on kauhisteltu. Niihin on suhtauduttu epävarmuudella. Niistä on revitty raflaavia otsikoita. Muistan itse ensin järkyttyneeni nähtyäni otsikon, joka kertoi, että jakokulma jää pois ohjelmointiuudistuksen tilalta. ”Miten ne voivat tehdä tämän *jakokulmalle*”, mietin. Jakokulma oli ollut minulle aina hyvin tärkeä. Opiskellessani lukuteorian alkeita koin saavani jakokulmasta hahmotuskykyä kongruenssien ja murtolukujen ominaisuuksien ymmärtämiseen. Kyse ei ollut vain jakokulmasta työkaluna, vaan jakokulman ymmärtämisen suomista mahdollisuuksista. Toivuttuani alkujärkytyksestä pohdin asiaa tarkemmin. Minulle jakokulma on ollut tärkeä, mutta se, että jokin on minulle tärkeä, ei tarkoita, että suuri osa oppilaista pitäisi asiaa tärkeänä, oppisi asiaa syvällisesti tai edes muistaisi asiaa välttävästi puoli vuotta sen jälkeen, kun asia on koulussa käyty läpi.

Ohjelmointiuudistus vaatii tunteja, ja ne tunnit ovat aina jostain muusta pois. Varsinaisesti ei ole alaluokilla kyse ohjelmoinnista siinä mielessä kuin moni sen ymmärtää, vaan algoritmisen ajattelun kehittämisestä. Sitä voi kehittää leikeissä ja peleissä, kynällä ja paperilla, ja hyvin monella muulla tavalla. Algoritminen ajattelu on kiinteä osa matematiikkaa. Ohjelmointitehtävänä voi hoitaa vaikka sen jakokulmankin. Se on itse asiassa erinomainen esimerkki algoritmista. Tätä vasten tuntuu loogiselta, että matematiikan tuntimäärää vähennetään, vaikka se toki kauhistuttaa. Riskinä on, että matematiikan perusteorian hallinta heikkenee, kun liikaa keskitytään koneisiin, tai liikaa luotetaan, että tietokoneet kuitenkin hoitavat sen kaiken ajattelun.

Tunteja voisi hyvin ottaa muistakin aineista. Esimerkiksi alaluokille ehdotettu toisten oppilaiden käskyttäminen komennoin ”Mene kolme askelta vasemmalle, pysähdy, mene kaksi oikealle” tuo mahdollisuuksia vaikka koulun liikuntatunneille: Miltä kuulostaisi aarteenetsintä komennoin ”viisi askelta oikealle, kiipeä kuusi puolaa, katso tangon taa, jne” tai kilpailu vaikka joukkueissa: ”kolme metriä ryömintää, neljätoista haaraperushyppyä, kahdeksan juoksuaskelta, neljä pallon pompotusta...”

Olen käyttänyt tietokoneita kuusivuotiaasta. Pienenä treenasin päässälaskua isäni tekemillä yksinkertaisilla ohjelmilla. Kuulemma vanhempani kuulivat ennätyksen rikkoutumisesta kertovan fanfaarin joskus puoli seitsemältä viikonloppuaamuna. Matematiikan tutkijana olen hyötynyt tietotekniikasta paljon. Laitan esimerkiksi tietokoneen summaamaan yhteen vaikkapa satatuhatta kärkimuodon Fourier-kerrointa, tavoitteenani oman työskentelyhypoteesini ripeä kumoaminen tai jonkinlaisen vahvistuksen sille saaminen. Tämä on huomattavasti mielekkäämpää kuin yrittää hoitaa homma kynällä ja paperilla (enemmän tai vähemmän mahdotonta) tai yrittää kehittää ja todistaa tulos, jolla ei mahdollisesti ole mitään todellisuuspohjaa. Paitsi, että koen tietokoneella laskemisen hyödylliseksi, on se minusta myös hauskaa, on valtavan mukava odottaa laskujen valmistumista ja jännittää, onko omassa arvauksessa mitään tolkkua.

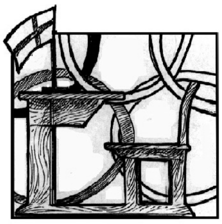
Tätä samaa hauskuutta matematiikan opiskeluun toivoisin myös kouluihin: innovatiivisia ja fiksuja tapoja käyttää tietokoneita ja algoritmiikkaa sellaisiin ongelmiin, jotka koululaisten mielestä ovat mielenkiintoisia. Tässä on mielestäni uudistuksen valtava potentiaali. Tietokoneita käytetään arkielämässä paljon, niiden käyttäminen on luonnollista, joten on luonnollista käyttää niitä myös koulussa.

Uudistus oli väistämätön, sillä tietokoneet ovat niin kiinteä osa arkielämää, että jokaisen on syytä niiden toiminnasta jotain ymmärtää. Ongelmaksi voi kuitenkin koitua, että uudistus on toteutettu valtavan nopealla aikataululla. Uudistuksen päätöksestä toteutukseen on hyvin vähän aikaa, ja uudistus tulee koko peruskouluun yhtä aikaa. Opettajia ei ole koulutettu. Vaikka tarkoitus ei olekaan tehdä hienoja ja suuria ohjelmia, voi uudistus olla hyvin hankala ja pelottava niille opettajille, joilla ei ole mitään ohjelmointitaustaa, sillä uuden opettelu ja sen saman tien opettaminen on aina vaativaa. Olisi luultavasti ollut parempi toteuttaa uudistus vähitellen, portaittain. Aluksi opetusta olisi voitu tarjota vain joillain luokka-asteilla, ja vähitellen olisi laajennettu. Aluksi opetusta olisivat antaneet opettajat, joilla on tietoteknistä taustaa, ja vähitellen myös muut. Monet myös pelkäävät, että jos opettaja ei ole riittävän motivoitunut, niin oppilaat vain pelaavat luokassa. Sekin mahdollisuus on olemassa, mutta toisaalta jo pitkään on opettajilla ollut mahdollisuus laittaa oppilaat katsomaan vaikka televisiota.

Opettajien kädenjälki tulee uudistuksessa näkymään paljon, sillä opetussuunnitelmassa on moni asia jätetty avoimeksi, mukaan lukien ohjelmointiin käytettävä tuntimäärä. Verkosta löytyy hyvää materiaalia, jolla innokas opettaja jopa täysin vailla ohjelmointitaustaa pääsee jo pitkälle. Sivu `http://koodi2016.fi` kannattaa ehdottomasti lukea. Siellä on myös linkkejä muuhun materiaaliin. Hyvää materiaalia kaikenlaisiin algoritmisen ajattelun harjoituksiin on Majava-kilpailun (`http://www.majava-kilpailu.fi`) vanhoissa tehtävissä, joita löytyy kilpailun materiaalipankista. Lisäksi halusimme Solmussa tukea opettajia ja antaa ideoita omaan opiskeluun ja opettamiseen, joten julkaisemme tänä vuonna kirjoituksia ohjelmoinnin opettamisesta ja oppimisesta. Ensimmäiset kirjoitukset ovat Sari Auramolta ja Tiina Romulta, ja ne ilmestyvät jo tässä numerossa.

Anne-Maria Ernvall-Hytönen

PS. Tässä numerossa on myös Tarja Shakespearen arvio Math Girls -kirjasarjasta. Satuin itse saamaan hyvältä ystävältäni yhden kirjasarjan osan hiljattain lahjaksi. Ainoa valituksen aihe on: Miksei näitä ollut jo silloin, kun kuuluin varsinaiseen kohderyhmään?



Tilastojen lukutaitoa opettamassa

Miten saada nuoret innostumaan tilastojen maailmasta? Matematiikanopettaja Raimo Huhtala on onnistunut tässä tehtävässä erinomaisesti.

Jenny Ståhlberg

(Kirjoitus on aikaisemmin julkaistu Tieto&trendit-lehden numerossa 5/2014.)

Tilastokeskus tekee paljon yhteistyötä opettajien kanssa, jotta nuorten kiinnostusta tilastoihin ja niiden käyttöön voitaisiin edistää jo mahdollisimman varhaisessa vaiheessa. Rovaniemen Lyseonpuiston lukion matematiikanopettaja **Raimo Huhtala** on yksi Tilastokeskuksen yhteistyökumppani, joka aktiivisesti hyödyntää Tilastokoulua opetuksessaan.

Tilastokeskus esittää seuraavaksi vuoden matematiikan opettajaksi FM Raimo Huhtalaa.

Mikä Tilastokoulussa on mielestäsi hyvää?

Lukiolaiset tarvitsevat tilastojen luku- ja käyttötaitoja mm. historian, yhteiskuntaopin, maantieteen, psykologian ja totta kai myös tilastoihin perustuvassa todennäköisyyslaskennassa. Tilastokeskuksen Tilastokoulu on mainio apu tilastotieteen perusteiden ja käsitteiden oppimisessa ja ymmärtämisessä.

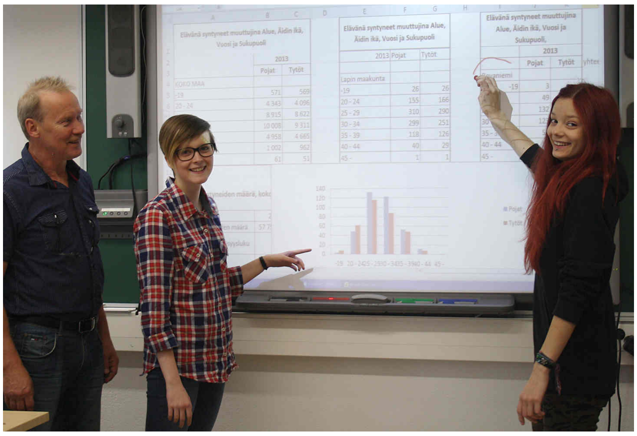
Tilastokoulun sivut ovat mielestäni onnistuneet, sillä opiskelijat voivat edetä siellä omaan tahtiin alkeista syvällisempään osaamiseen. Tämä on myös opettajan kannalta merkittävä asia, koska samalla kurssilla on eri-ikäisiä ja sekä laajan että lyhyen matematiikan opiskelijoita. Tietenkin on helpottavaa, että opettajan ei tarvitse valmistella kaikkea kurssilla tarvittavaa opetusmateriaalia. Opettaja voi luottaa Tilastokouluun tietäen, että taustalla on asiantuntijoita.

Mikä motivoi oppilaita?

Se on selvää, että opiskelijoiden on nähtävä tilasto-opiskelussa itselleen tulevaisuuden hyötyä. Monet, esimerkiksi psykologiaa opiskelemaan aikovat osallistuvat tilasto-opiskeluun tietäen, että pääsykokeessa tilastojen osaamista vaaditaan.

Miten hyödynnät Tilastokoulua opetussuunnitelmassa?

Kun viimeksi tehtiin lukion opetussuunnitelmaa (OPS), niin kirjoitin OPSiin koulukohtaisen Tilastotieteen kurssin. Oppikirjaa tällä kurssilla ei tarvita, siitä kiitos Tilastokoulun.



Opiskelijoiden oma halu ja into käyttää aikaansa tilastotaitojen oppimiseen ja tutkimuksen tekemiseen on motivoinut minua käyttämään myös vapaa-aikaani ohjaukseen, sanoo Raimo Huhtala. Sara Piirainen (vas.) ja Ira Pekkala osallistuvat käynnissä olevaan tilastokilpailuun.

Opiskelijat opiskelevat parin kolmen hengen ryhmissä Tilastokoulua läppäreitä käyttäen. Välillä harjoitellaan excel-taitoja tilastofunktioita käyttäen ja tekemällä graafeja esimerkiksi väestö- tai taloudellisista tilastoista. Kurssin lopputyönä opiskelijat tekevät kyselytutkimuksen oman mielenkiintonsa mukaan esimerkiksi kouluruoasta, elintavoista, harrastuksista jne. Tuotoksena voi olla posteri, powerpoint-esitys tai excel-sivusto, jonka opiskelijat esittelevät toisilleen.

Tällä hetkellä käynnissä olevassa kansainvälisessä matematiikkaprojektissa, jossa on mukana yksitoista koulua eri puolilta Eurooppaa, opiskelijani käyttävät tilastotaitoja tutkiessaan eri maiden taloutta. Tilastokoulu antaa opiskelijoille erinomaisen lähtötason projektia varten. Projektin lopputuotoksen eri maiden opiskelijat esittelevät yhdessä keväällä 2015 Madridissa.

Mitä tilastokilpailut ovat tuoneet tullessaan?

Ensimmäinen osallistuminen tilastokilpailuun vuonna 2009 alkoi juuri tilastokurssiltani, kun huomasin kilpailun netissä. Alkukilpailun ja kansallisen loppukilpailun voitti **Justus Mutanen**. Etelä-Afrikan Durbanissa Justus voitti myös maailmanlaajuisen loppukilpailun vanhimpien sarjan. Saimme siis mukavan yhdeksän päivän ulkomaanreissun, ja päälle päätteeksi myös joukkuekilpailun voitto tuli Suomeen.

Seuraava kilpailu oli vuonna 2011 ja tällä kertaa posterikilpailu. Kolme opiskelijaani halusi osallistua kierrätysaiheisella posterilla. Posteri voitti sekä kansallisen että Dublinissa järjestetyn kansainvälisen kilpailun.

Tilastokoulu – ovi tilastojen maailmaan

Tilastokoulu sisältää Tilastokeskuksen asiantuntijoiden tekemiä kursseja eri aiheista. Kursseja on tällä hetkellä yhteensä viisi ja kursseja ja oppimateriaaleja päivitetään ja lisätään jatkuvasti.

- **Tilastojen ABC** -kurssi tarjoaa perustiedot tilastojen ymmärtämiselle ja käyttämiselle sekä tilastollisen tutkimuksen tekemiselle.
- **Työmarkkinatilastot** -kurssi opettaa työmarkkinatilastoinnin peruskäsitteet, työmarkkinatilastojen, kuten palkka- ja työvoimakustannustilastojen, muodostamisen sekä työmarkkinoiden analysoinnin niin kotimaisten kuin kansainvälistenkin aineistojen pohjalta.
- **Indeksit** -kurssi tutustuttaa erilaisiin indekseihin, joita ovat muun muassa hinta-, kustannus- ja määräindeksit, indeksien laskentakaavoihin sekä niiden eroihin.
- **Väestötieteen perusteet** -kurssi taas kuvaa väestötieteen keskeiset käsitteet, tarkastelee väestömuutoksiin vaikuttavia tekijöitä sekä väestönkehityksen ja yhteiskunnan taloudellisen ja sosiaalisen kehityksen välistä suhdetta.
- **Kansantalouden tilinpito** -kurssilla käydään läpi kansantalouden tilinpidon käyttöalueet ja sen historia, sen tärkeimmät määritelmät ja käsitteet sekä kansantalouden tilinpidon laskennan yleiset periaatteet.

Jokaisen Tilastokoulun kurssin yhteydessä on havainnollistavia esimerkkejä ja hyödyllisiä harjoitustehtäviä kurssin aiheeseen liittyen. Tilastokoulusta löytyy myös eri luokka-asteille suunnattuja harjoitustehtäviä.

Lisäksi Tilastokoulu tarjoaa tiedonlähdevinkkejä opettajille ja opiskelijoille sekä esimerkiksi opinnäytetyötä tekevälle ja tietoa Tilastokeskuksen tarjoamista koulutuspalveluista. Tilastokoulua ja sen oppimateriaaleja voivat hyödyntää kaikki tilastotiedosta ja tilastoista kiinnostuneet yläkoulusta lähtien.

Tilastokoulun yhteydessä voi myös pelata **Tilastovisaa**, joka tutustuttaa yksityiskohtaisiin tilastollisiin tietoihin sekä Tilastokeskuksen toimintaan ja tarjontaan.

Tilastokoulu löytyy verkko-osoitteesta `http://tilastokoulu.stat.fi`.

Kolmas kilpailu oli vuonna 2013 ja taas posterikilpailu. Tällä kertaa kaksi opiskelijaani päättivät osallistua porotaloutta tutkivalla posterilla. Silloinkin tuli voitto sekä kansallisessa että kansainvälisessä kilpailussa.

Menestyksen myötä opiskelijoiden kiinnostus tilastokurssille on tietenkin lisääntynyt.

Mikä on kilpailuissa menestymisen salaisuus?

Kilpailuun osallistuminen vaatii opiskelijoilta aikalailla viitseliäisyyttä, sillä hyvän tutkimuksen ja tutkimusjulisteen tekeminen vaatii taitojen lisäksi yllättävän paljon työtä ja aikaa, helposti jopa kymmeniä tunteja. Totta kai myös opettajan on oltava valmis ohjaamiseen.

Tärkeää opiskelijoille on myös se, että Helsingin yliopisto myöntää vapaan aloituspaikan ylemmän sarjan tilastojen luku- ja käyttötaitokilpailun voittajille. Niin ja onhan kilpailussa opiskelijoille palkintojakin.

Millaisia muita opetustapoja käytät työssäsi?

Matematiikan opettaminen lukiossa on todella kiireistä laajoista kurssisisällöistä johtuen. Nyt symbolisten laskimien käyttöönoton myötä kiirettä tuntuu lisäävän laskimen käyttöopetus opiskelijoille.

En missään tapauksessa ole kokonaan luopunut matematiikan opetuksessa perinteisestä opettajajohtoisesta opetuksesta. Apuvälineinä luokassani on *Smart Board* ja sitä käytän yhdessä *Mathematica* ja *Math Desktop* -ohjelmilla. Näitä ohjelmia olemme käyttäneet myös kansainvälisissä matematiikkaprojekteissa, joissa olen ollut opiskelijoideni kanssa mukana kahdeksan vuotta. Näitä *Comenius*-projekteja on tukenut myös Teknologiateollisuuden 100-vuotissäätiö. Noin 80 opiskelijaa on ollut mukana projekteissa.

Matematiikan opiskelu toisten eurooppalaisten opiskelijoiden kanssa ja projektitapaamiset eri maissa ovat osaltaan motivoineet opiskelijoitani. Monessa Euroopan maassa tilastotiedettä opetetaan omana oppiaineena lukiossa. Mielestäni pari kurssia tilastotiedettä tulisi olla pakollisena myös suomalaisissa lukioissa.

Reija Helenius (kesk.) johtaa kansainvälistä ISLP-projektia ja vastaa projektin koordinoinnista vuosina 2009–2017. Jenny Ståhlberg (vas.) työskenteli korkeakouluharjoittelijana projektin parissa kesällä 2014. Jaana Kesti on ISLP-projektin Suomen maavastaava.

Suomalaisnuorilla voittoputki

Tähän mennessä Suomi on pärjännyt kansainvälisissä kilpailuissa loistavasti: lukiosarja on voitettu jo kolme kertaa peräkkäin. Viimeisin, vuoden 2013 lukiosarjan voitto tuli jälleen Raimo Huhtalan luotsaamalle joukkueelle Rovaniemeltä.

Matemaattisten aineiden opettajien liitto MAOL ry, Suomen Tilastoseura ry ja Tilastokeskus järjestävät joka toinen vuosi käynnistyvän Suomen kansallisen tilastojen luku- ja käyttötaitokilpailun, jossa yläkoulu- ja lukioikäiset nuoret pääsevät joukkueina näyttämään taitonsa tilastojen oivaltavasta käytöstä.

Kilpailun ideana on, että jokainen joukkue tekee pienen tutkimuksen valitsemastaan aiheesta: määrittää tutkimuskysymyksen, kartoittaa taustatietoja, kerää ja analysoi tutkimusaineiston sekä tiivistää tutkimuksen kulun sekä tulokset posteriin eli tietotauluun. Jokainen kilpailuun osallistuva koulu valitsee parhaan posterin yläkoulu- ja lukiosarjasta ja lähettää ne Tilastokeskukseen Suomen kansallisen raadin arvioitavaksi.

Suomen sarjojen voittajaposterit jatkavat matkaansa kansainväliseen tilastojen luku- ja käyttötaitokilpailuun.

Kansainvälisen kilpailun järjestää Kansainvälisen tilastoinstituutin (ISI) alaisuudessa toimiva tilastotieteen opetusta sekä tilastojen luku- ja käyttötaitoa edistävä järjestö IASE (International Association of Statistical Education).

Kilpailu on osa laajempaa ISLP-projektia (International Statistical Literacy Project). Projektin tavoitteena on kasvattaa aktiivisia ja osaavia kansalaisia, jotka kykenevät ymmärtämään ja hyödyntämään tilastoja sekä numerotietoa eri elämänvaiheissa.

Kilpailu edistää samalla koulujen, kansallisten tilastovirastojen, opettajajärjestöjen ja tilastoseurojen välistä yhteistyötä ja verkottumista sekä tukee kouluja konkreettisesti tilastojen opetuksessa ja käytössä.

ISLP-projektilla on maavastaavia tällä hetkellä yli 80 maassa jokaisessa maanosassa. Maavastaavien tehtävänä on koordinoida toimintaa projektin toimintasuunnitelman mukaisesti omassa maassaan.

ISLP-projektin johtajistoon kuuluvat projektin johtaja Tilastokeskuksen kehittämispäällikkö **Reija Helenius** sekä Assistant Professor **Pedro Campos** (University of Porto) Portugalista ja Assistant Director General **Steve MacFeely** (Central Statistical Office) Irlannista.

Seuraava kansainvälinen tilastoposterikilpailu on juuri käynnistynyt. Voittajaposterit julkistetaan kesällä 2015, kun kansainvälisen tilastoinstituutin 60. maailmankongressi kokoontuu Brasiliassa.

Solmun matematiikkadiplomit

Peruskoululaisille tarkoitetut Solmun matematiikkadiplomit I–IX tehtävineen ovat tulostettavissa osoitteessa

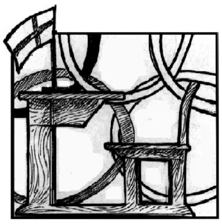
`http://solmu.math.helsinki.fi/diplomi.html`

Opettajalle lähetetään pyynnöstä vastaukset koulun sähköpostiin. Pyynnön voi lähettää osoitteella

marjatta.naatanen(at)helsinki.fi

Ym. osoitteessa on diplomitehtäville oheislukemistoa, joka varmasti kiinnostaa muitakin kuin diplomien tekijöitä:

Lukujärjestelmistä
Desimaaliluvut, mitä ne oikeastaan ovat?
Murtolukujen laskutoimituksia
Negatiivisista luvuista
Hiukan osittelulaista
Lausekkeet, kaavat ja yhtälöt
Äärettömistä joukoista
Erkki Luoma-aho: Matematiikan peruskäsitteiden historia
Funktiosta
Gaussin jalanjäljissä
K. Väisälä: Algebra
Yläkoulun geometriaa
Geometrisen todistamisen harjoitus
K. Väisälä: Geometria
Lukuteorian diplomitehtävät



Matematiikkadiplomit syksyllä 2014

Marjatta Näätänen
Helsingin yliopisto

Diplomitehtävien uusia vastauspyyntöjä tuli alkusyksyllä 2014 seuraavilta paikkakunnilta, myös saman paikkakunnan useilta eri kouluilta:

Jyväskylä, Laitila, Turku, Pieksämäki, Eurajoki, Lohja, Kempele, Vantaa, Vihti, Helsinki, Mynämäki, Oulu, Kuusamo, Espoo, Ylitornio, Ulvila, Lahti, Lappeenranta, Tampere, Ruokolahti, Naantali, Seinäjoki, Ylöjärvi, Luumäki, Ranua, Porvoo, Keminmaa, Kemi, Ii, Rauma, Kouvola, Siilinjärvi, Tyrnävä, Valkeakoski, Hyvinkää, Pirkkala, Kannus, Masku, Jämijärvi, Lempäälä, Imatra, Mänttä-Vilppula, Tohmajärvi, Lavia, Salo, Suonenjoki, Kirkkonummi, Hankasalmi, Haapavesi, Orimattila, Sipoo, Hämeenlinna, Laukaa, Mäntsälä, Alavus, Nurmijärvi, Jalasjärvi, Nokian kaupunki, Kotka, Kauhajoki, Varkaus, Pälkäne, Sievi.

Opettajien palautetta

Opettajat pyysivät vastauksia tehtäviin ja mukana tuli paljon oma-aloitteisia kiitosviestejä. Ne kertovat myös koulun arkipäivästä:

- ”Aivan mahtava paketti! Hieno juttu nuo diplomit! :)”
- ”Monet lapset kaipaavat lisäpuuhaa ja pohdittavaa matematiikantunneille ja muutenkin.”
- ”Aloittelevalle luokanopettajalle oli ihanaa, kun kollega vinkkasi tästä.”
- Alaluokilla kokonaiset luokat innostuvat matikkadiplomeista ja alusta alkaen on eroja oppilaiden nopeudessa, erot kasvavat myöhemmin. Jo 3. luokalla voi olla oppilas, joka tekee V. diplomia.
- Monista opettajista diplomi vaikuttaa erittäin hyvältä työkalulta oppilaiden eriyttämiseen. Jotkut luokat ovat aloittaneet matematiikassa itsenäisen etenemisen ja nopeille laskijoille diplomitehtävät ovat ”tuntuneet todella mielekkäiltä”. Ylöspäin eriyttäessä opettajista tuntuu, että kirjojen materiaalit eivät riitä, joten he ovat ”innoissaan diplomista”. Monet kertovat, että luokalla on ”oppilas, joka saa aina kaiken tehtyä matikan tunneilla todella nopeasti, eikä saa tarpeeksi haastetta koulun kirjoista/lisätehtävistä.” Opettajat haluavat yrittää motivoida matemaattiseen ajatteluun varsinkin niitä oppilaita, jotka kaipaavat haasteita ja ylöspäin eriyttämistä. ”Minulla on useampia hyviä matemaatikonalkuja luokassani ja ajattelin tsempata heitä suorittamaan diplomin.” ”Keväällä saamani matikkadiplomi on saanut suuren suosion. Hienoa! Nyt on haastetta, mitä antaa niille, jotka tekevät tehtävänsä sujuvasti.”
- Koulun työskentelyolosuhteet voivat olla hyvin karuja: ”Olen nyt töissä home-evakossa urheiluhallin kahvilassa, joten minun olisi kätevämpi saada koulun sähköpostin sijasta omaan sähköpostiini vastaukset”.
- ”Diplomissa on hyviä tehtäviä, jotka rakentavat oppilaille laajempaa pohjaa osaamiseen. Tällaisia tosiaan kaivataan, sillä oppikirja ei sitä tarjoa.”

- Tehtäviä käytetään myös peruskoulun oppimäärän kertaukseen Ammattiopistossa.

- Jotkut opettajat eivät käytä oppikirjaa, heille diplomi oli ”mukava tuttavuus!”

- Opettajat kyselevät, miltä tasolta pitäisi diplomien teko aloittaa, esim. ”Onko tuo VI sopiva vaikeusaste juuri 6. luokalle? Voiko sen suorittaa, vaikkei ole aiempia diplomeita suorittanutkaan? Ja saisiko siihen vastauksia?” ”Olisin teetättämässä ensimmäistä kertaa matematiikkadiplomeita kasi- ja ysiluokkalaisille ja miksipä ei myös seiskaluokkalaisille nopeimmmille oppilaille. Mitä diplomeita suosittelisit ja saisiko ratkaisuja?”

- ”Voinko kopioida vastaukset luokanopettajille, jotta he pääsevät tarkistamaan oman luokkansa papereita? Itselläni on nimittäin 13 luokkaa ja nyt näyttää, että joka luokalla on useita diplomin suorittajia ja oma aikani ei riitä.... vai onko vastauksien kopioiminen luokanopettajille vastoin toivottua toimintaa?”

- Oli palkitsevaa tuntea useiden opettajien ilmaisema ilo: ”Aurinkoisin syysterveisin ja innostuneista diplominlaskijoista iloiten”; ”Ja kiitos diplomeista, ne ovat innostaneet näitä pienempiäkin!”; ”Olemme päättäneet aloittaa matikkadiplomin suorittamisen kaikilla luokka-asteilla eli 1-6. luokilla. P.S. Hienoa työtä matikan oppimiseen ja oivaltamiseen!”; ”Kiitos näistä mielenkiintoisista tehtäväpaketeista”; ”Olen ottanut neljä vuotta sitten käyttööni matikkadiplomit eri luokkien kanssa. Olen todella iloinnut niistä, koska tehtävät ovat monipuolisia ja matikan kirjojen normaalitehtävistä poikkeavia. Ne avaavat minulle ja oppilaille uusia ulottuvuuksia matemaattisten tehtävien pohdiskeluihin. Kiitos suunnattomasti teille!”; ”Olen kiitollinen siitä, että saan lahjakkaille oppilaille lisämateriaalia sekä motivoitua myös muita antautumaan matemaattiseen pohdiskeluun”; ”Ensiksi kiitokset matikkadiplomista - sen avulla matematiikan opetusta saa eriytettyä ylöspäin ja toivon mukaan oppilaat saavat motivaatiota matematiikan harjoitteluun ja pohdintaan!”

- Myös diplomien ulkoasua kiiteltiin: Kiitoksia haastavasta ja visuaalisesti hienosta matematiikkadiplomista!

- Pienetkin koulut ovat aktiivisia: ”Me olemme pieni, noin 80 oppilaan yläkoulu, mutta matemaattinen harrastus esimerkiksi kerhotoiminnan muodossa on aktiivista.”

- Tytöt ovat mukana innolla: ”Minun kahdeksasluokkalaiset tytöt innostuivat matematiikkadiplomin tekemisestä. Ajattelin, että aloittaisimme diplomista VII. Onko tarkoitus, että tulostan heille tehtäviä vähitellen ja he tuovat niitä minulle tarkistettavaksi omaan tahtiinsa? Oppitunneilla emme valitettavasti ehdi niitä käyttää.”

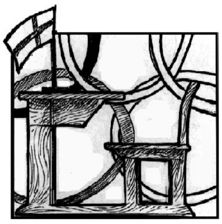
Vastauksia opettajien kysymyksiin

Yksi opettaja voi pyytää vaikka kaikkien tasojen vastaukset ja jakaa niitä koulussaan muille, samalla ohjeistaen, että tarkoitus on pitää vastaukset koulun sisällä. Diplomit ovat toisistaan riippumattomia, aloittaa voi siltä tasolta, joka tuntuu kullekin parhaiten sopivan. Myös kertaus voi olla paikallaan. Diplomien numerointi ei vastaa suoraan luokan numeroa, esimerkiksi 5. luokkalainen voi hyvin aloittaa diplomi IV:stä. Viimeisistä diplomeista VII, VIII, IX löytyy miettimistä lukiolaisellekin. IX esittelee myös matematiikan aloja, joihin ei koulussa ehkä törmätä. Alaluokilla koko luokka näyttää selviävän innolla tehtävistä. Sen jälkeen, kun erot oppilaiden välillä ovat ennättäneet kasvaa, tehtäviä voi käyttää eriyttämiseen. On hienoa huomata, että opettaja ottaa huomioon vaikka yhdenkin oppilaansa muista poikkeavat tarpeet. Jos oppilas pitkästyy tunnilla, jonka asiat hän on jo ehtinyt omaksua, opettaja on valmis näkemään vaivaa saadakseen oppilaalle sopivan vaikeustason tehtäviä. Diplomit on yritetty tehdä niin, että opettajan lisätyö olisi mahdollisimman pieni, joten vastaukset on kirjoitettu hyvin yksityiskohtaisiksi. Tehtäviä voi käyttää myös kotitehtävinä, ellei tunnilla ole aikaa. Opettajalla on vapaus valita parhaiten sopiva tapa.

Tieto diplomeista on levinnyt opettajalta toiselle, Facebookin kautta, kirjoituksista mm. Dimensiossa ja Luokanopettaja-lehdessä. Erityisesti Oulun seutu on aktiivinen, kiitos diplomeista tietoa jakaneelle Oulun Luma-keskukselle!

Opettajien kommentit tuovat esille tarpeen kehittää lisää tapoja huolehtia näistä innokkaista vaikka kesäleirejä järjestämällä. Heille voisi myös olla hauskaa löytää toisensa, erityisesti, jos ovat samalta seudulta. Luma-keskukset ovat järjestäneet kerho- ja leiritoimintaa omilla paikkakunnillaan, myös ainelaitoksilla on tällaista toimintaa. Kokemuksia näistä ja tietoa tulevasta toiminnasta kerätään osoitteeseen `http://solmu.math.helsinki.fi` kohtaan Valmennus, kerhot, leirit ja pelit.

Diplomitehtävät voi tulostaa verkosta, joten niitä voi käyttää koko maan kouluissa. Ne eivät vaadi uusia kalliita välineitä. Tehtävät tehdään käsin ja näin harjoitetaan kovin pienelle huomiolle nykyisin jäävää, mutta tärkeää hienomotoriikkaa.



Koodaamista Ohkolan koululla

Sari Auramo[1]
Ohkolan koulu, Mäntsälä

OPS 2016 puhuttaa koulumaailmaa. Monet uudistukset otetaan helpottuneina ja tyytyväisinä vastaan, monet sen sijaan herättävät keskustelua ja epäilyä. Ja toki suhtautuminen eri asioihin riippuu henkilöstä.

Yksi mielipiteitä jakava ja keskustelua herättävä asia on tietotekniikan opetuksen lisääntyminen ja siinä ehkä erityisesti ohjelmoinnista ja koodaamisesta puhuminen. Koska koko tietotekniikan opettaminen ja hyödyntäminen koulumaailmassa on vielä hyvin riippuvaista yksittäisen opettajan omasta innostuksesta, joskin toki myös valtavasti käytettävissä olevasta laitekannasta, verkkojen toimivuudesta ja kouluttautumisen mahdollisuuksista, on tärkeää, että näitä tulevankin OPS:n sisältöjä puretaan tarpeeksi käytännönläheisiin osiin.

Opetus vuosiluokilla 1–2 -kohdasta OPS 2016 -luonnoksessa löytyy tämä teksti:

”Käytännön taidot ja oma tuottaminen: Koulutyössä harjoitellaan laitteiden, ohjelmistojen ja palveluiden käyttöä ja opetellaan niiden keskeisiä käyttö- ja toimintaperiaatteita. Samoin harjoitellaan näppäintaitoja sekä muita tekstin tuottamisen ja käsittelyn perustaitoja. Oppilaat saavat ja jakavat keskenään kokemuksia digitaalisen median parissa työskentelystä sekä ikäkaudelle sopivasta ohjelmoinnista.”

Opetus vuosiluokilla 3–6 -luonnoksessa puolestaan kirjoitetaan näin:

”Ohjelmointia kokeillessaan oppilaat saavat kokemuksia siitä, miten teknologian toiminta riippuu ihmisen tekemistä ratkaisuista.”

Täytyy myöntää, että olin itsekin näistä ensi kertaa kuullessani hämmentynyt. Onneksi olen kuitenkin saanut jo sen verran käytännön kokemuksia tästä, että enää ei huoleta. Päinvastoin, olen hyvin innostunut koodaamisesta koulussa. On ollut mielekästä aloittaa koodaamisen tai ohjelmoimisen harjoittelu jo nyt. En ole aina ihan varma, kumpaa termiä pitäisi käyttää. Sopivia sovelluksia on jo tarjolla internetissä paljon.

Mitä siis olemme tehneet? Olen luokanopettaja ja opetan viikoittain tietotekniikkaa kaikille alakoulun luokka-asteille 1–6. Kaikki oppilaamme ykkösistä kuutosiin ovat jo koodanneet jotain. Tämä on tapahtunut hyödyntämällä erilaisia ilmaisia sivustoja verkossa.

Koodaustunti-sivuja käytimme oppilaiden kanssa jo keväällä 2014. Silloin siinä oli vielä hassuja alkuvaikeuksia, eli ohjeet tulivat milloin milläkin kielellä. Se ei kuitenkaan haitannut, vaan oli ihan hauskaa.

Koodaustunti on yhden tunnin mittainen johdatus tietojenkäsittelytieteeseen, joka toteutetaan haluttuna ajankohtana. Koodaustunnin tarkoituksena on tutustuttaa ”koodaamiseen” ja tehdä sitä arkipäiväiseksi. Eli tämä on hyvä tapa aloittaa. Perustehtävät voi tehdä eri

[1]Kirjoittaja pitää blogia tieto- ja viestintätekniikan käytöstä koulussa osoitteessa `http://luokanopettajajatietotekniikka.blogspot.fi`

teemoilla: Angry Birds, Frozen tai Flappy Bird. Oppilaat on helppo motivoida näiden avulla. Perustehtävien kesto on noin tunti.

Tarjolla on myös lisäharjoituksia peräti 20 tunnille. Sieltä löytyy kursseja 4+ -ikäisille, vielä lukutaidottomille lapsille, 6+ -ikäisille lukutaitoisille oppilaille, 8+ -ikäisille tarkoitettu jatkokurssi ja vielä neljäskin yli 10-vuotiaille suunnattu kurssi. Kunkin kesto siis noin 20 tuntia. Koodaustunti tarjoaa siis todella paljon valmista materiaalia koodaamisen opetteluun alakoulussa. Opettaja pääsee helpolla ja oppii itsekin samalla.

Kerron aina kaikista tällaisista sivuista oppilaitteni huoltajille ja kysyn heiltä luvan heidän lapsensa rekisteröintiin, jolloin oppilaat pääsevät seuraamaan omaa edistymistään. Tehtäviä voi toki tehdä rekisteröitymättäkin. Koodaamistahan ei näillä sivuille tehdä millään ”tietokonekielellä”, vaan erilaisia käskyjä oikeaan järjestykseen laittamalla.

`http://koodaustunti.fi/`

Toinen hyvä, suomenkielinen sivusto on nimeltään Scratch. Sinnekin voi rekisteröityä, mutta harjoittelu onnistuu myös ilman sitä. Scratchissa ohjelmoidaan valitut hahmot tekemään haluttuja toimia. Minäkin huomasin syksyllä viettäneeni monta välituntia luokassa, kun yritin saada kissan ja koiran kommunikoimaan keskenään. Sivuilla voi katsoa muiden tekemiä esimerkkejä. Tätä olen käyttänyt lähinnä 4.-6. –luokkalaisten kanssa.

Löysin muuten äskettäin Avoinoppikirja.fi -sivustolta Matti Nelimarkan, Noora Vainion ja Nyyti Kinnusen julkaiseman oppaan ohjelmoinnin alkeista alakoululaisille ja heidän opettajilleen. Siinä esitellään nimenomaan Scratch-sovellusta. Opas on julkaistu avoimella CC-BY-SA-lisenssillä. Kannattaa tutustua, ohjeet ovat hyvin selkeät!

`http://scratch.mit.edu/`

Muita koodaamisen opetteluun sopivia sivuja ovat esimerkiksi

`http://www.codecademy.com/`
`http://lightbot.com/`

Käytäntö on opettanut, ettei koodaamista tarvitse pelätä. Harjoittelu alakoulussa sujuu tässä esiteltyjen tyylisten sivustojen avulla. Oppilaat ovat monesti opettajiaan taitavampia, joten opettajan ei tarvitse osata ja ymmärtää kaikkea ennen ensimmäistä koodaustuntia. On muuten hurjan mukava tunne, kun onnistuu saamaan possun kulkemaan reitin läpi tai kissan sanomaan ”miau”!

Verkko-Solmun oppimateriaalit

Osoitteesta `http://solmu.math.helsinki.fi/oppimateriaalit.html` löytyvät oppimateriaalit:

Ensiaskeleet Einsteinin avaruusaikaan, osa 1: Kinematiikka: aika, paikka ja liike (Teuvo Laurinolli)

Kilpailumatematiikan opas (Matti Lehtinen)

Geometrian perusteita (Matti Lehtinen)

Geometria (K. Väisälä)

Lukualueiden laajentamisesta (Tuomas Korppi)

Jaksolliset desimaaliesitykset algebrallisesta näkökulmasta (Jaska Poranen ja Pentti Haukkanen)

Algebra (Tauno Metsänkylä ja Marjatta Näätänen)

Algebra (K. Väisälä)

Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 1: Mekaniikkaa (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)

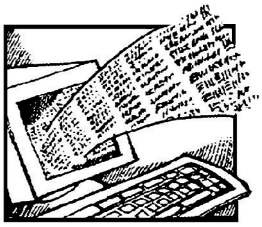
Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 2: Sähköoppia (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)

Lukuteorian helmiä lukiolaisille (Jukka Pihko)

Matematiikan peruskäsitteiden historia (Erkki Luoma-aho)

Matematiikan historia (Matti Lehtinen)

Reaalianalyysiä englanniksi (William Trench)



Hoi koodimaailma – vinkkejä aloittelevalle ohjelmoijalle

Tiina Romu[1]

Koodaus sisältyy vuonna 2016 voimaan tulevaan opetussuunnitelmaan. Monien muiden kouluaineiden tavoin koodauksen opettelun on tarkoitus olla yleissivistävää. Digitaalisten palveluiden nykyisinä ja tulevina käyttäjinä oppilailla on oikeus ymmärtää perusasioita palveluiden tuottamisesta. Kaikista ei siis tarvitse tulla koodareita vaan tarkoitus on tarjota peruskäsitteitä ja ymmärrystä ohjelmoinnista.

Ohjelmoinnin opetuksesta vastaavat todennäköisimmin luokanopettajat ja matematiikan aineenopettajat. Vaikka matematiikan sisältöjä uudessa opetussuunnitelmassa karsitaan, ei ohjelmoinnin opetus ole matematiikan tavoitteilta pois. Looginen ja abstrakti ajattelu sekä luovuus ovat tarpeen myös ohjelmoinnissa ja kehittyvät sen myötä.

Ohjelmointia tulevaisuudessa opettavilla opettajilla ei välttämättä itsellään ole kokemusta ohjelmoinnista. Vasta-alkajalle internet tarjoaa paljon valmiita materiaaleja ja opetusympäristöjä, mutta valinnan vaikeus voi olla suuri. Tärkeintä on vain rohkeasti aloittaa jostain. Ohjelmointia, kuten matematiikkaakin, oppii parhaiten tekemällä. Olen koonnut listan aloittelijoille sopivista sivustoista tekstin loppuun.

Valmistuttuani matematiikan opettajaksi vaihdoin kuitenkin saman tien alaa ja hakeuduin koodaamaan työkseni. Työurani alkumetreillä kirjoitin muutamia ajatuksia ylös koodauksen opettelusta. Toivon niiden olevan avuksi myös niille opettajille, joille koodaus ei ole entuudestaan tuttua mutta jotka haluavat itsekin oppia ohjelmoimaan.

Älä pelkää virheitä

Kun aloitat, älä turhaan pelkää koodia tai virheiden tekemistä. Harva pystyy kirjoittamaan matemaattisia todistuksia suoraan ilman suttupaperia tai erilaisia apukuvia. Sama koskee myös ohjelmointia. Harva, jos kukaan, pystyy kirjoittamaan suoraan toimivaa koodia. Virheet siis opettavat sinua eteenpäin.

Opettele tekemään pieniä asioita

Aloita pienestä ja yksinkertaisesta ja tee yksi asia kerrallaan. Tällöin saat palautetta nopeammin siitä, oletko etenemässä oikeaan suuntaan.

Tee yhdessä

Aloita opiskelu yhdessä kollegasi, ystäväsi tai miksei vaikka luokkasi kanssa. Koodauksen ei tarvitse olla yksin puurtamista vaan se voi olla myös yhdessä tekemistä. Apua saa kysyä ja kaikkea ei tarvitse tietää. Harvoin työelämässäkään koodia tehdään täysin yksin. Kysy aina, kun kysymys mieleesi tulee. Tyhmiä kysymyksiä ei ole.

Opettele lukemaan

Samalla kun opettelet kirjoittamaan koodia, opettele myös lukemaan sitä. Jos aloitat opiskelun esimerkiksi kollegasi kanssa voitte lukea toinen toistenne koodia.

[1] Kirjoittaja on koulutukseltaan matematiikan opettaja, mutta toimii ohjelmistosuunnittelijana Futuricella. Hän on ohjannut mm. koodikoulua lapsille.

Netistä löytyy myös paljon erilaisia esimerkkejä ja valmiita toteutuksia, joita voit lukea. On hyvä lukea niin vertaisilta kuin jo paljon koodia kirjoittaneilta.

Tee se, mikä pelottaa eniten

Heittäydy rohkeasti epämukavuusalueellesi. Ohjelmointi on pitkälti ongelmanratkaisua. Kun teet sen, mikä pelottaa sinua eniten, pääset myös eteenpäin. Ohjelmointi on välillä vaikeaa, joten ole ylpeä saavutuksistasi!

Linkkejä:

`http://koodikoulu.fi`
`http://scratch.mit.edu`
`http://csunplugged.org`
`http://www.codeschool.com`
`http://www.codecademy.com`
`http://code.org/learn`
`http://mooc.cs.helsinki.fi`
`http://stackoverflow.com`

Tehtäviä pohdittavaksi

Paperipino

A0-paperin mittasuhteet ovat $\sqrt{2} : 1$ ja pinta-ala yksi neliömetri. A1 on paperi, jossa A0 on leikattu kahtia pitemmän sivun keskeltä. A2 puolestaan on puolikas A1:stä jne. Laske kymmenesosamillimetrin tarkkuudella A4-paperin ympärysmitta.

Yksi konekirjoituspaperiarkki on paksuudeltaan noin 0,1 mm. Jos tavallisen A4-arkin paloittelisi pieniksi A50-kokoiseksi papereiksi, ja A50-arkit kasaisi pinoksi, niin kuinka korkea pinosta tulisi?

Väärän painoinen kolikko

12 kolikosta yksi on hieman eri painoinen kuin muut. Kuinka selvität käyttäen tasapainovaakaa, mikä kolikoista on eri painoinen, ja painaako se vähemmän vai enemmän kuin muut, käyttäen punnituskertoja mahdollisimman vähän?

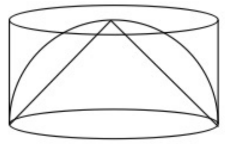
Viidesti jaollinen

1 on jaollinen vain yhdellä luvulla.
2, 3 ja 5 ovat jaollisia kukin kahdella luvulla.
4 on jaollinen kolmella luvulla.
6 on jaollinen neljällä luvulla.

Montako lukua on välillä 1–1000000, jotka ovat jaollisia täsmälleen seitsemällä luvulla?

Kreikkalainen hautausmaa

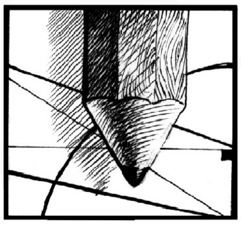
Kerrotaan, että erään kreikkalaisen matematikon hautakiveen on kaiverrettu oheisen kaltainen kuvio, jossa on ympyräpohjainen kartio, lieriö ja puolipallo. Kuinka suuria ovat puolipallon ja lieriön tilavuudet, jos kartion tilavuus on yksi litra?



Liukuportaat

Kahden kerroksen välille on asennettu liukuportaat. Kun virta oli poikki, havaitsin että kuljen kerroksesta toiseen 60 sekunnissa suunnasta riippumatta. Tänään liukuportaissa oli virta, ja niiden suunta oli yläkerrasta alas. Ylhäältä alas pääsin 40 sekunnissa kävellen samalla nopeudella kuin aiemminkin. Kauanko kuluisi, jos vain seisoisin portaissa ja antaisin liukuportaiden kuljettaa minua?

Tehtävät lähetti Aki Halme.



Summien arviointi integraalien avulla

Anne-Maria Ernvall-Hytönen
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Johdanto

Monenlaisia summia voi arvioida integraalien avulla. Integraaleilla saavutettava hyöty on se, että usein on paljon helpompi laskea integraalin arvo kuin kertoa mikä jonkin summan arvo on. Esimerkkinä otettakoon summa

$$\sum_{1\leq n\leq N}\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{N}},$$

jonka suuruudesta voi olla hankala sanoa mitään kovin konkreettista, mutta jota vastaavasta integraalista

$$\int_1^N \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

on helppo sanoa paljonkin. Tämä esimerkki on tekstin lopussa harjoitustehtävänä.

Tarkkoja arvoja tämä menetelmä ei yleensä anna, mutta varsin usein täysin riittäviä. Nyrkkisääntö on se, että kunhan funktio käyttäytyy suhteellisen kiltisti, arviointi toimii melko hyvin. Yksinkertaisuudessaan kyse on siitä, että valitaan sopiva funktio, jonka integraali sopivalla välillä on varmasti suurempi, ja jokin funktio, jonka integraali sopivalla välillä on varmasti pienempi kuin annettu summa. Jotta arvioinnissa olisi järkeä, vaaditaan luonnollisestikin, että suuruusluokka ei saa heittää kovinkaan paljon. Tämä on yksi esimerkki yleisemmästä ns. voileipäperiaatteesta, eli siitä, että litistetään tarkasteltava funktio joidenkin muiden, hyvin tunnettujen funktioiden väliin. Tarkasteltava funktio on siis kuvitteellinen juusto, ja vertailukohtina toimivat funktiot ovat kuvitteellisen sämpylän puolet.

Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan kaikkialla, että N on positiivinen kokonaisluku. Tämä ei ole rajoittava oletus, mutta yksinkertaistaa hieman notaatiota ja tarkastelujen yksityiskohtia.

Perusperiaate

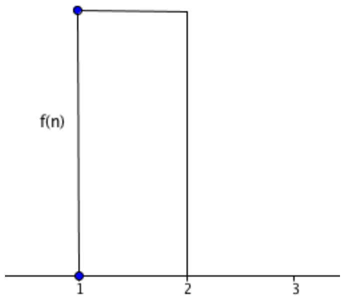
Halutaan tarkastella summaa

$$\sum_{n\leq N} f(n),$$

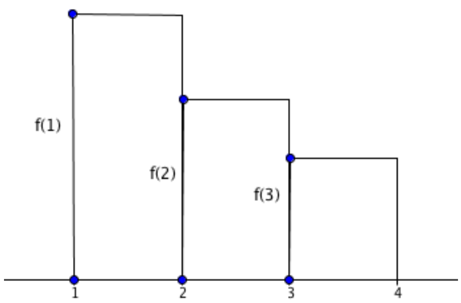
missä $f(x)$ on (positiivisilla) reaaliluvuilla määritelty positiivinen funktio. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan lisäksi, että $f(x)$ on kasvava tai laskeva (eli sen arvo ei saa heittelehtiä, vaan se on monotoninen).

Jokainen summattava voidaan ajatella muodossa $1\cdot f(n)$, eli sellaisen suorakulmion alana, jonka yksi sivu on 1 ja kohtisuora sivu on $f(n)$, ks. kuva[1]:

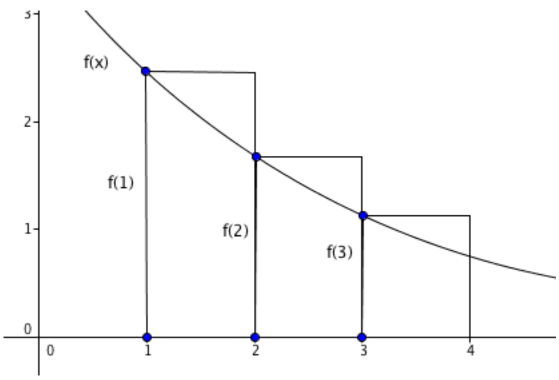
[1]Tämän kirjoituksen kuvat on tehty GeoGebralla, `http://www.geogebra.org`.



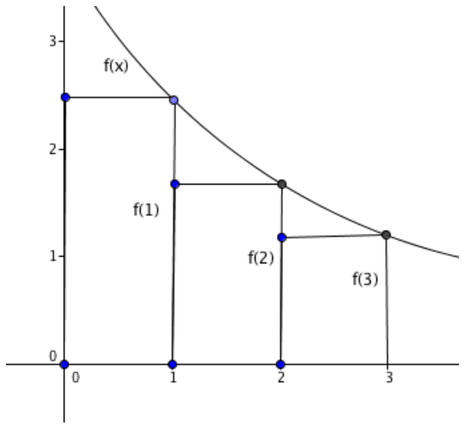
Jos halutaankin laskea summa $f(1)+f(2)+f(3)$, vastaa se seuraavan kuvion alan laskemista:



Tätä summaa voidaan arvioida alaspäin integroimalla funktiota $f(x)$ välin [1,4] yli, kuten seuraavasta kuvasta huomataan:



ja toisaalta, summaa voidaan arvioida ylöspäin integroimalla funktiota $f(x)$ välin [0,3] yli, kuten seuraavasta kuvasta huomataan:



Koska esimerkkifunktio on laskeva tällä välillä, saadaan summaa minoroitua integroiden summan lähtöpisteestä yhdellä lisättyyn loppupisteeseen. Sitä voidaan majoroida integroimalla pisteestä, joka on yksi vähemmän kuin summan alkupiste, pisteeseen, joka on summan loppupiste. Tämä voidaan muotoilla seuraavaksi lauseeksi:

Lause. *Jos reaaliluvuilla määritelty integroituva funktio $f(x)$ on laskeva, niin*

$$\int_1^{N+1} f(x)\,dx \le \sum_{1\le n\le N} f(n) \le \int_0^N f(x)\,dx.$$

Jos funktio on puolestaan nouseva, niin

$$\int_1^{N+1} f(x)\,dx \ge \sum_{1\le n\le N} f(n) \ge \int_0^N f(x)\,dx.$$

Todistus. Todistus on samanlainen sekä nousevalle että laskevalle funktiolle, joten keskitytään laskevan funktion tarkasteluun. Koska funktio on laskeva, pätee

$$f(y) \le f(n) \le f(x),$$

kun $y \ge n \ge x$, joten

$$\begin{aligned}\int_n^{n+1} f(x)\,dx &\le \int_n^{n+1} f(n)\,dx \\ &= f(n)\int_n^{n+1} 1\,dx = f(n)\end{aligned}$$

ja vastaavasti myös

$$f(n) \le \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx.$$

Siispä, funktion arvoa yhdessä pisteessä voidaan arvioida seuraavasti ylös- ja alaspäin:

$$\int_n^{n+1} f(x)\,dx \le f(n) \le \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx.$$

Summaamalla epäyhtälöketju saadaan

$$\begin{aligned}\sum_{1\le n\le N}\int_n^{n+1} f(x)\,dx &\le \sum_{1\le n\le N} f(n) \\ &\le \sum_{1\le n\le N}\int_{n-1}^{n} f(x)\,dx,\end{aligned}$$

ja koska

$$\sum_{1\le n\le N}\int_n^{n+1} f(x)\,dx = \int_1^{N+1} f(x)\,dx$$

ja

$$\sum_{1\le n\le N}\int_{n-1}^{n} f(x)\,dx = \int_0^{N} f(x)\,dx,$$

saadaan

$$\int_1^{N+1} f(x)\,dx \le \sum_{1\le n\le N} f(n) \le \int_0^{N} f(x)\,dx,$$

kuten väitettiinkin. Lause on todistettu. □

Siirrytään nyt tarkastelemaan esimerkkejä.

Harmoninen sarja

Harmoniseksi sarjaksi kutsutaan summaa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Tämä sarja hajaantuu, eli toisin sanoen, osasummat

$$\sum_{1\le n\le N}\frac{1}{n}$$

lähestyvät ääretöntä, kun N kasvaa. Tätä sarjaa on käsitelty esimerkiksi Alestalon kirjoituksessa [1]. Sarjan hajaantuminen on helppo todistaa. Käsitellään se ensin, ja analysoidaan sen jälkeen osasummien käytöstä hieman tarkemmin.

Lause. *Harmoninen sarja*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

hajaantuu.

Todistus. Jaotellaan sarja osiksi niin, että tiedetään kaikkien osien olevan suurempia kuin jokin annettu vakio. Jos tällaisia osia on ääretön määrä, on summan suuruudenkin pakko olla ääretön. Siispä, kirjoitetaan sarja uusiksi:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{2^k\le n<2^{k+1}}\frac{1}{n}.$$

Tarkastellaan pikkusummia

$$\sum_{2^k\le n<2^{k+1}}\frac{1}{n}.$$

Huomataan, että summassa on 2^k termiä. Lisäksi jokaisen termin suuruus on

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{2^{k+1}},$$

sillä $2^k \le n < 2^{k+1}$. Nyt summaa on helppo arvioida:

$$\sum_{2^k\le n<2^{k+1}}\frac{1}{n} > \sum_{2^k\le n<2^{k+1}}\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}.$$

Täten koko summaa voidaan arvioida

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{2^k\le n<2^{k+1}}\frac{1}{n} > \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2} = \infty.$$

Todistus on valmis. □

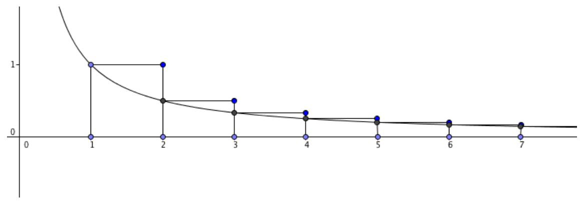
Yllä oleva todistus on alkeellinen ja yksinkertainen, mutta se ei kerro juuri mitään summan kasvuvauhdista. Tiedämme, että summa kasvaa rajatta, mutta hyvin vähän mitään muuta. Jos haluamme tietää, miten summa oikeasti käyttäytyy, on hyödyllistä käyttää yllä esiteltyä periaatetta.

Lause. *Harmonisen sarjan osasummille pätee*

$$\sum_{1\le n\le N}\frac{1}{n} = \ln N + g(N),$$

missä $0 < g(N) < 1$.

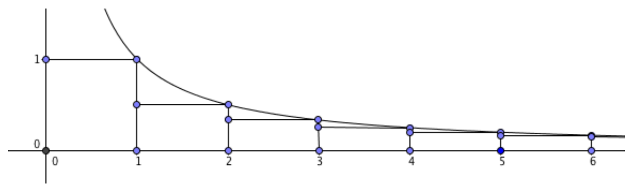
Todistus. Haetaan summalle integraalien avulla hyvä ylä- ja alaraja. Aloitetaan alarajasta. Edetään kuten edellä esitetyn periaatteen mukaan pitääkin. Kuvan alku näyttää tältä:



Alaraja on siis

$$\sum_{1\le n\le N}\frac{1}{n} > \int_1^{N+1}\frac{dx}{x} = [\ln x]_1^{N+1} = \ln(N+1).$$

Katsotaan seuraavaksi ylärajaa. Kuvan alku näyttää tällä kertaa tältä:



Ylärajaksi tulee siis

$$\sum_{1\le n\le N}\frac{1}{n} < \int_0^{N}\frac{dx}{x},$$

mutta näin arvioiminen on harvinaisen huono idea, sillä

$$\int_0^N \frac{dx}{x} = \infty.$$

Tämä arvio ei siis kerro mitään.

Ongelma voidaan kuitenkin kiertää poistamalla ensimmäinen termi, eli arvoa $n = 1$ vastaava termi, sillä silloin summaa

$$\sum_{2 \le n \le N} \frac{1}{n}$$

vastaava ylärajaintegraali onkin

$$\int_1^N \frac{dx}{x} = \ln N.$$

Siispä

$$\sum_{1 \le n \le N} \frac{1}{n} = 1 + \sum_{2 \le n \le N} \frac{1}{n} < 1 + \ln N.$$

Tiedämme nyt, että

$$\ln(N+1) < \sum_{1 \le n \le N} \frac{1}{n} < 1 + \ln N.$$

Lähdetään muokkaamaan alarajaa:

$$\ln(N+1) = \ln N + (\ln(N+1) - \ln N) > \ln N.$$

Siispä

$$\ln N < \sum_{1 \le n \le N} \frac{1}{n} < 1 + \ln N.$$

Tämä todistaa väitteen. □

Näin saatu arvio on jo erittäin hyvä. Tiedämme, että pientä vakiota vaille summa $\sum_{1 \le n \le N} \frac{1}{n}$ käyttäytyy kuin $\ln N$. Luonnollinen jatkokysymys tietenkin on: Voidaanko sanoa jotain erotuksesta

$$\sum_{1 \le n \le N} \frac{1}{n} - \ln N,$$

kun N lähestyy ääretöntä? Itse asiassa voidaan, ja tämän erotuksen raja-arvo tunnetaan Eulerin tai Eulerin ja Mascheronin vakiona, ja sen suuruuskin on hyvin tunnettu:

$$\lim_{N \to \infty} \left(\sum_{1 \le n \le N} \frac{1}{n} - \ln N \right) \approx 0{,}5772.$$

Tarkastellaan seuraavaksi toista esimerkkiä.

Logaritmien summa

Arvioidaan seuraavaksi summaa

$$\sum_{1 \le n \le N} \ln n.$$

On selvää, että jos $N \to \infty$, niin summakin lähenee ääretöntä, sillä myös summattavat kasvavat rajatta. Kiinnostavaa onkin siis selvittää, kuinka nopeasti tällaiset summat kasvavat.

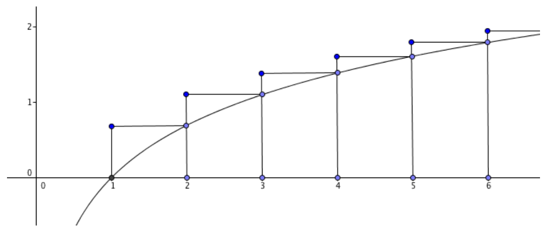
Lause. *Logaritmisummille pätee*

$$\sum_{1 \le n \le N} \ln n = N \ln N - N + h(N),$$

missä $1 < h(N) < \ln N - 2\ln 2 + 2$.

Todistus. Tilanne on nyt hieman erilainen kuin aiemmin: logaritmi on kasvava, ei laskeva funktio. Tämä ei kuitenkaan paljon vaikuta laskuihin. Ainoa eroavaisuus on se, että aiemmin ylärajan antaneet integraalit antavatkin nyt alarajan, ja aiemmin alarajan antaneet integraalit antavat ylärajan.

Aloitetaan alarajan määrittämisellä. Kuva näyttää tällaiselta:



Kannattaa huomioida, että $\ln 1 = 0$, joten summan ensimmäisestä termistä ei tarvitse välittää. Tämä on itse asiassa erinomainen asia, sillä jos integroisimme nollasta alkaen funktiota $\ln n$, olisimme arvioiden kanssa pulassa (logaritmi vaihtaa merkkiään ykkösessä, ja lähestyy miinus ääretöntä nollan läheisyydessä). Alaraja on

$$\sum_{1 \le n \le N} \ln n = \sum_{2 \le n \le N} \ln n > \int_1^N \ln x \, dx.$$

Seuraavaksi on integroitava $\ln x$. Tämä onnistuu helposti osittaisintegrointia käyttäen (jos osittaisintegrointi on vieras käsite, voi kaavan tarkistaa derivoimalla):

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C.$$

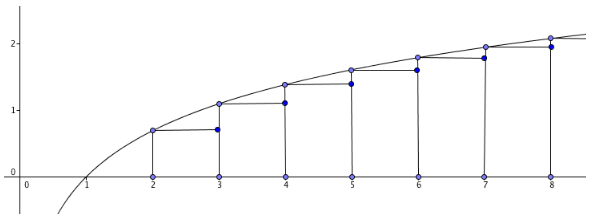
Integraalin arvoksi siis saadaan

$$\int_1^N \ln x \, dx = N \ln N - N + 1,$$

joten

$$\sum_{1 \le n \le N} \ln n > N \ln N - N + 1.$$

Määritetään nyt yläraja. Kuva näyttää tällä kertaa tällaiselta:



Laskujen helpottamiseksi kirjoitetaan

$$\sum_{1\le n\le N} \ln n = \sum_{2\le n\le N} \ln n = \ln N + \sum_{2\le n\le N-1} \ln n.$$

Ylärajaksi saadaan nyt

$$\begin{aligned}\sum_{1\le n\le N} \ln n &= \ln N + \sum_{2\le n\le N-1} \ln n \\ &< \ln N + \int_2^{N+1} \ln x\, dx\end{aligned}$$

ja integraalin arvoksi saadaan

$$\int_2^N \ln x\, dx = N\ln N - 2\ln 2 - N + 2.$$

Siispä

$$\sum_{1\le n\le N} \ln n < N\ln N - N - 2\ln 2 + 2 + \ln N$$

ja

$$\sum_{1\le n\le N} \ln n > N\ln N - N + 1.$$

Täten

$$\sum_{1\le n\le N} \ln n = N\ln N - N + h(N),$$

missä $1 < h(N) < \ln N - 2\ln 2 + 2$, kuten väitettiinkin. Todistus on valmis. □

Tämä arvio on itse asiassa jossain mielessä jopa hämmästyttävä, sillä pätee

$$\sum_{1\le n\le N} \ln N = N\ln N,$$

eli on melkein sama, summataanko logaritmit luvuista 1,2,…,N yhteen vai käytetäänkö pelkästään suurinta arvoa, eli arvoa $\ln N$.

Suorana seurauksena saadaan myös

$$\begin{aligned}N! &= \prod_{n=1}^{N} n = e^{\sum_{n=1}^{N} \ln n} \\ &= e^{N\ln N - N + h(N)} = \left(\frac{N}{e}\right)^N e^{h(N)},\end{aligned}$$

missä $1 < h(N) < \ln N - 2\ln 2 + 2$, eli

$$e\left(\frac{N}{e}\right)^N < N! < \frac{e^2 N}{4}\left(\frac{N}{e}\right)^N.$$

Stirlingin kaava antaa tälle tulolle vielä tarkemman arvion

$$N! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{N}{e}\right)^N,$$

missä $\sim$ tarkoittaa, että kaavan virhe on selvästi pienempi kuin annettu termi, eli virhetermin ja annetun termin osamäärä lähestyy nollaa luvun N lähestyessä ääretöntä. Suuruusluokka on kuitenkin jo alkeellisin tarkasteluin saamassamme kaavassa oikein.

Harjoitustehtäviä

Tehtävä 1. Suppeneeko vai hajaantuuko sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\,?$$

Tehtävä 2. Mitä voit sanoa osasummista

$$\sum_{1\le n\le N} \frac{1}{\sqrt{n}}\,?$$

Tehtävä 3. Riemannin ζ-funktioksi kutsutaan sarjaa

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

kun $\Re s > 1$ (reaaliluvuilla s tämä ehto yksinkertaisesti vain tarkoittaa $s > 1$). Tiedetään esimerkiksi, että

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Kuinka hyviä arvioita Riemannin ζ-funktion arvoista saadaan tarkastelemalla katkaistuja summia, eli osasummia

$$\sum_{1\le n\le N} \frac{1}{n^s}\,?$$

Vihje: tarkastele arvion virhettä, eli erotusta

$$\zeta(s) - \sum_{1\le n\le N} \frac{1}{n^s} = \sum_{n>N} \frac{1}{n^s}.$$

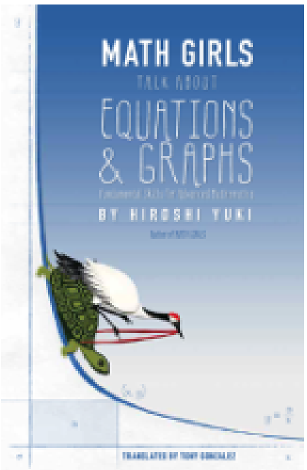
Viitteet

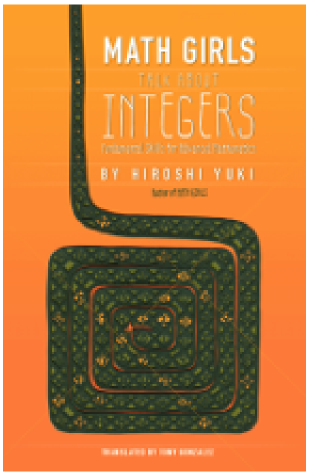
[1] P. Alestalo, *Harmoninen sarja.* Solmu 3/2014.

Math Girls -kirjoja

Tarja Shakespeare

Hiroshi Yuki: Math Girls Talk About Equations & Graphs, Bento Books, 2014, 162 sivua. **Math Girls Talk About Integers**, Bento Books, 2014, 220 sivua. Hinta Adlibris-verkkokirjakaupassa 15,90 euroa. Kirjojen kieli on englanti.





Lapsille on tarjolla monia matemaattisaiheisia kirjoja, mutta yläaste- ja lukiolaisille tarjonta kutistuu lähinnä oppikirjoihin.

Japanilainen Hiroshi Yuki julkaisi verkkosivuillaan mangana matematiikan alojen aiheita. Lukijat pyysivät häntä koostamaan näistä kirjan. Näin syntyivät Math Girls -kirjat. Monet lukijat kokivat nämä kirjat matemaattiselta sisällöltään liian haastaviksi, ja pyysivät Hiroshia kirjoittamaan korkeamman matematiikan perusteista. Näin saivat alkunsa Math Girls Talk About -kirjat, jotka sopivat yläaste- ja lukioikäisille.

Hiroshi painottaa, että matematiikka ei ole vain ongelmien ratkaisua. Se on määrätietoista työskentelyä ja syvällistä ajattelua. Se on kysymyksiä ja vastausten etsimistä. Hän opastaa miten ja miksi helponkin matematiikan tehtävän vastaus on kirjoitettava lukijalle helposti luettavaan selkeään muotoon. Matematiikka on kommunikointia.

Math Girls -kirjojen idea perustuu ystävien väliseen vuoropuheluun heidän pohtiessaan matemaattista ongelmaa tai keskustellessaan matemaattisesta aiheesta. Matemaattinen keskustelu, kuten arkipäiväinen säästä puhuminen, sisältää epäilyn, ymmärryksen, vastalauseen, kritiikin ja kiitoksen.

Kirjan päähenkilöt ovat samanikäiset matematiikkaa rakastava kertoja ja matematiikkanero Miruka, vuotta nuorempi kymmenesluokkalainen Tetra, sekä kertojan serkku kahdeksasluokkalainen Yuri.

Yhtälöitä rakastavalla kertojalla on usein tapana mennä koulunsa kirjastoon miettimään matematiikkaa koulun jälkeen. Usein Tetra on jo siellä ratkomassa omia matematiikan tehtäviä ja toisinaan pyytää apua käsitteiden selventämiseksi tai ongelman ratkaisemiseksi. Kertoja on Tetran apuopettaja, joiden välillä käydään keskustelua myös kynällä ja paperilla. Tetra on tavallinen koululainen, jolle matematiikan alkutaival vaatii työtä. Kertojan serkku Yuri saattaa yllättäen pistäytyä kertojan luona tekemään läksyjä. Yuri on huoleton ja suorasukainen tyttö eikä matematiikka kuulu hänen lempiaineisiin. Miruka on osittain mystinen henkilö, joka onnistuu ilmestymään muiden luo kuin aave, nappaa ilmasta keskusteluaiheen ja johdattelee kuulijansa matematiikan korkeampiin salaisuuksiin.

Kirjoissa ei ole varsinaista luvusta toiseen jatkuvaa tarinajuonta. Ylätason juoni on nuorten arkinen elämä, jossa kiinnostus matematiikkaan yhdistää heitä. Luvut ovat itsenäisiä kokonaisuuksia, jotka rakentuvat matemaattisesta aiheesta – esimerkiksi alkuluvut. Luku voi alkaa tapaamisesta kirjastossa ja päättyä kirjastovirkailija rouva Mizutanin kuulutukseen – ”Kirjasto on suljettu”.

Kirjat voi lukea säntillisesti etukannesta takakanteen tai lukija voi aloittaa lukemisen itselleen tutuimmasta aiheesta, vaikka kellomatematiikasta. Math Girls Talk About -kirjojen lukujen lopussa on muutamia tehtäviä ja vastaukset perusteluineen löytyvät niihin kirjan lopusta.

Kirjoissa nuorten keskustelu on onnistuttu kuvaamaan luonnollisesti sekä tasapainoisesti, jolloin matemaattinen asia ei huku nuorten yleiseen keskusteluun. Kääntäjä Tony Gonzalez on käyttänyt hyvää perusenglantia matemaattisessa keskustelussa. Nuorten tunneilmaisuissa on joitain haastavampia sanoja, mutta niiden ohittaminen ei riko lukukokemusta.

Hiroshi Yukin kirjojen matemaattinen ulkoasu on siisti ja helppolukuinen, ja oikolukuun on panostettu. Kertoja neuvoo Tetralle yhtälöiden ja yhtälöryhmien ratkaisemisen tarkasti ja perustellusti välivaiheineen. Hiroshi pitää tarkasti kiinni pedanttisesta tyylistään, joka kantaa läpi kirjojen. Kunpa peruskoulun matematiikan kirjoistakin löytyisi yhtä tasokasta tekstiä. Kun Tetra toteaa, että joku juttu on vain yksityiskohtia, joista ei tarvitse hänen mielestään välittää, kertoja napakasti perustellen oikoo Tetran käsityksiä kohti matemaattisen ajattelun vaatimuksia.

Miksi lukea? Jotta lukija ymmärtää, että matematiikka on luonteeltaan syvällistä ymmärtämistä, keskustelua ja että se voi olla mielenkiintoista varsinkin pienryhmässä, eikä vain ulkoa opittujen temppujen soveltamista. Itseopiskelukirjana se tarjoaa pohdittavia näkökulmia ja huomioita matemaattisiin yksityiskohtiin löyhän tarinan kuljettaessa lukijaa eteenpäin.

Equations and Graphs sisältää aihepiirit: Kirjaimet ja identtisyys, Yhtälöpari, Yhtälöt ja käyrät, Verranto ja kääntäen verrannollisuus sekä Leikkaukset ja tangentti.

Integers sisältää aihepiirit: Jaollisuus, Alkuluvut, Numeroarvaus ja mystinen 31, Kellomatematiikkaa sekä Matemaattinen induktio.

Sisällysluettelot ja näytesivut kirjoihin löytyvät kustantaja Bento Booksin verkkosivulta `http://www.bentobooks.com/publications/`

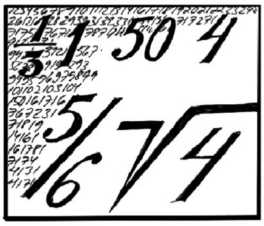
Solmun matematiikan verkkosanakirja

Solmun matematiikan verkkosanakirja on otettu käyttöön osoitteessa

`http://solmu.math.helsinki.fi/sanakirja/a.html`

Sekä sisältöä että tekniikkaa koskevat kokemukset ovat meille arvokkaita ja kaikenlaiset parannus- sekä korjausehdotukset tervetulleita. Palautetta voi lähettää osoitteella

toimitus(at)solmu.math.helsinki.fi



Riemannin ζ-funktio

Katja Kulmala
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Esa V. Vesalainen
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto

Riemannin ζ-funktio on matematiikan kiehtovimpia otuksia, ja erottamaton osa alkulukujen teoriaa. Se oli avainasemassa todistettaessa 1800-luvun matematiikan erästä loppuhuipennusta, alkulukulausetta, ja eräs tärkeimmistä nykyisistä matematiikan avoimista ongelmista, kysymys Riemannin hypoteesin paikkansa pitävyydestä, koskee ζ-funktion nollakohtien ominaisuuksia. Seuraavassa tarkoituksena on valottaa teoriaa kertomalla, mikä ζ-funktio on, millaisia yhteyksiä sillä on alkulukujen teoriaan, ja mistä Riemannin hypoteesissa on kysymys.

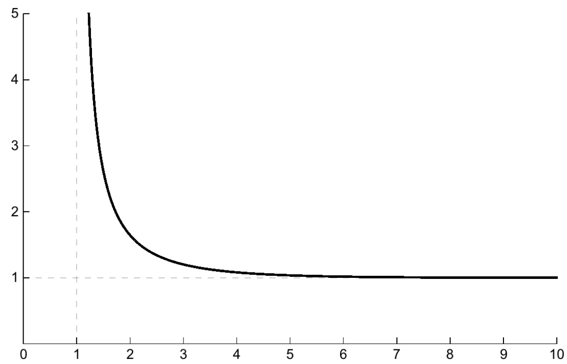
Riemannin ζ-funktio

Kun $s \in]1,\infty[$, määrittelemme Riemannin ζ-funktion äärettömänä sarjana

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Kirjaimen s käyttäminen muuttujana voi ehkä vaikuttaa kummalliselta, mutta sillä on niin pitkät perinteet ja se on tapana niin syvälle juurtunut, että lienee paikallaan kunnioittaa sitä.

Riemannin ζ-funktion käytös pistettä 1 lähestyttäessä osoittautuu tärkeäksi. Seuraava lause sanoo, että pistettä 1 lähestyttäessä $\zeta(s)$ käyttäytyy oleellisesti ottaen samoin kuin $1/(s-1)$. Lisäksi sen todistus takaa, että ζ-funktion määrittelevä ääretön sarja on ongelmaton ja antaa äärellisen lopputuloksen, kun $s \in]1,\infty[$.



Kuva 1. *Riemannin ζ-funktion $\zeta(s)$ kuvaaja, kun $s \in]1,10[$.*

Lause. *Kaikilla $s \in]1,\infty[$ pätee*

$$\frac{1}{s-1} < \zeta(s) < 1 + \frac{1}{s-1}.$$

Todistus. Todistetaan alaraja ensin. Funktio x^{-s} on muuttujan x suhteen aidosti vähenevä, joten kaikilla kokonaisluvuilla $n \geqslant 1$ pätee

$$\frac{1}{n^s} > \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^s}.$$

Tästä seuraa, että kaikilla kokonaisluvuilla $N \geqslant 1$ pätee

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} > \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^s} = \int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^s}.$$

Kun $N \longrightarrow \infty$, saadaan

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} > \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^s}.$$

Tässä oikean puolen integraalin voi kaikeksi onneksi laskea:

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^s} = \lim_{X \longrightarrow \infty} \int_1^{X} \frac{\mathrm{d}x}{x^s} = \lim_{X \longrightarrow \infty} \frac{1^{1-s} - X^{1-s}}{s-1} = \frac{1}{s-1}.$$

Yläraja voidaan todistaa samalla tavalla: Koska x^{-s} on aidosti vähenevä, pätee kokonaisluvuilla $n \geqslant 2$, että

$$\frac{1}{n^s} < \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x^s}.$$

Tätä käyttämällä voidaan arvioida

$$\zeta(s) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^s} = 1 + \frac{1}{s-1}.$$

Yhteys alkulukuihin

Seuraava tuloesitys osoittaa, että ζ-funktio on kiinteällä tavalla yhteydessä alkulukuihin. Tämän yhteyden löysi ensimmäisenä Euler 1737.

Eulerin tulo. *Kaikilla $s \in]1,\infty[$ pätee*

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}},$$

missä tulo otetaan kaikkien alkulukujen yli. Tai tarkemmin,

$$\lim_{X \longrightarrow \infty} \prod_{p \leqslant X} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \zeta(s),$$

missä tulo otetaan kaikkien niiden alkulukujen p yli, joille $p \leqslant X$.

Todistus. Pätee

$$\sum_{n \leqslant X} \frac{1}{n^s} \leqslant \prod_{p \leqslant X} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \dots\right),$$

missä p on alkuluku. Nimittäin, jos oikean puolen tulo kerrotaan auki, saadaan sarja, jossa on varmasti kaikki vasemman puolen termit, koska aritmetiikan peruslauseen nojalla jokainen positiivinen kokonaisluku $n \leqslant X$ on esitettävissä alkulukujen tulona ja nämä alkuluvut ovat $\leqslant X$. Lisäksi kaikki termit sekä vasemmalla että oikealla puolella ovat positiivisia.

Lisäksi pätee

$$\prod_{p \leqslant X} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \dots\right) \leqslant \zeta(s),$$

koska jos tässä kerrotaan tulo auki, saadaan sarja, jossa kaikki termit ovat muotoa n^{-s}. Kukin näistä termeistä esiintyy vain kerran alkutekijöihinjaon yksikäsitteisyyden nojalla, ja toisaalta kukin esiintyy myös sarjassa $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \zeta(s)$.

Nyt siis pätee

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \lim_{X \longrightarrow \infty} \sum_{n \leqslant X} \frac{1}{n^s} \\ &\leqslant \lim_{X \longrightarrow \infty} \prod_{p \leqslant X} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \dots\right) \leqslant \zeta(s),\end{aligned}$$

joten

$$\zeta(s) = \lim_{X \longrightarrow \infty} \prod_{p \leqslant X} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

geometrisen sarjan kaavan nojalla.

ζ-funktion lausekkeita

Todettakoon, että ζ-funktio on muutenkin läpeensä lukuteoreettinen otus. Esimerkiksi, kun $s \in]1,\infty[$, on

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s},$$

ja kun $s \in]2,\infty[$, on

$$\zeta(s)\,\zeta(s-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s} \quad \text{ja} \quad \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s},$$

missä $d(n)$ on luvun n (positiivisten) tekijöiden lukumäärä, $\sigma(n)$ tekijöiden summa, ja $\varphi(n)$ on Eulerin φ-funktio. Samanlaisilla lausekkeilla voi esittää yllättävän monia muitakin lukuteoreettisia funktioita. Lisäksi nämä esitykset eivät ole pelkkiä kuriositeetteja, vaan esim. tekijäfunktion $d(n)$ tutkimuksessa yhteys lausekkeeseen $\zeta^2(s)$ on varsin hyödyllinen.

Sarjakehitelmä logaritmille

Pian demonstroimme, miten ζ-funktion ominaisuuksista voi johtaa alkulukujen äärettömyyden, mutta sitä ennen tarvitsemme seuraavan irrallisen tuntuisen mutta hyödyllisen potenssisarjakehitelmän.

Lause. *Kaikilla* $x \in \,]-1,1[$ *pätee*

$$\log \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Tässä log *tarkoittaa luonnollista logaritmia, jota myös toisinaan merkitään* ln.

Todistus. Osoittautuu, että oikealla puolella oleva sarja on mielekäs ja hyvin määritelty ja sitä voi jopa derivoida termeittäin. Varmuuden vuoksi varoituksena todettakoon, että **tällaiset operaatiot äärettömillä sarjoilla ovat hyvin delikaatteja ja niiden kanssa on oltava hyvin varovainen**. Olemme tässä yksinkertaisuuden nimissä varsin huolimattomia. Kuitenkaan ei saa unohtaa sitä, että maailma on täynnä matematiikan suurten avoimien ongelmien ratkaisuita, jotka ovat täydellisiä lukuun ottamatta jotakin kohtaa, jossa huolettomasti derivoidaan jotakin termeittäin vaikkei saisi, tai lasketaan äärettömillä sarjoilla, joiden arvo ei olekaan äärellinen, tai muuta surullista.

Joka tapauksessa, derivoimalla oikeaa puolta termeittäin saadaan

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.\end{aligned}$$

Vasemman puolen derivaataksi saadaan

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log \frac{1}{1-x} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log(1-x) = \frac{1}{1-x}.$$

Integraalilaskennan peruslause sanoo, että jos kahden funktion derivaatat ovat samat, niin kyseiset funktiot ovat vakiotermiä vaille samat. Siten on olemassa vakio $C \in \mathbb{R}$, jolle

$$\log \frac{1}{1-x} = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

kaikilla $x \in \,]-1,1[$. Kun $x = 0$, on vasen puoli $\log 1 = 0$, ja oikea puoli C. Siten $C = 0$, ja väite on todistettu termeittäin derivoimisen oikeuttamista vaille.

Alkulukuja on äärettömän monta

Nyt voimme todistaa ζ-funktion avulla Eulerin hengessä, että alkulukuja on äärettömän monta. Itse asiassa saamme jopa vahvemman tuloksen, nimittäin:

Lause. *Alkulukujen käänteislukujen sarja hajaantuu:*

$$\sum_p \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \ldots = \infty.$$

Erityisesti, alkulukuja on äärettömän paljon.

Tämä on vahvempi tulos kuin alkulukujen lukumäärän äärettömyys. Esimerkiksi lukuja $2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$ on äärettömän monta, mutta kuitenkin niiden käänteislukujen sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

on äärellinen.

Huomautus. Kun myöhemmin kirjoitamme vaikkapa

$$f(x) = g(x) + O(h(x)),$$

niin tarkoitamme, että kaikilla relevanteilla muuttujan x arvoilla $f(x)$ ja $g(x)$ eroavat toisistaan enintään vakio kertaa lausekkeen $h(x)$ verran, eli tarkemmin:

$$|f(x) - g(x)| \leqslant Ch(x),$$

missä C on jokin (yleensä tuntematon) positiivinen reaaliluku, joka ei riipu muuttujan x arvosta.

Erotamme todistuksen ytimen omaksi lemmakseen:

Lemma. Kun $s \in \,]1,2[$, pätee

$$\sum_p \frac{1}{p^s} = \log \frac{1}{s-1} + O(1). \tag{1}$$

Toisin sanoen, vasemman puolen sarja $\sum_p p^{-s}$ ja lauseke $\log(1/(s-1))$ eroavat toisistaan jokaisella $s \in \,]1,2[$ enintään jonkin vakion verran, ja kyseisen vakion voi valita niin, ettei se riipu muuttujan s arvosta.

Lauseen todistus. Koska

$$\log \frac{1}{s-1} \longrightarrow \infty, \quad \text{kun} \quad s \longrightarrow 1,$$

on lemman nojalla oltava

$$\sum_p \frac{1}{p^s} \longrightarrow \infty, \quad \text{kun} \quad s \longrightarrow 1.$$

Toisaalta, jos sarja $\sum_p p^{-1}$ olisi äärellinen, olisi

$$\sum_p \frac{1}{p^s} < \sum_p \frac{1}{p} < \infty,$$

mikä tuottaisi ristiriidan. Siispä todistettava lause seuraa lemmasta.

Lemman todistus. Hyvä, seuraavaksi on todistettava (1). Kun $s \in]1{,}2[$, logaritmien ottaminen puolittain Eulerin tulossa antaa

$$\begin{aligned}\log\zeta(s) &= \sum_p \log\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum_p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{p^s}\right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_p\frac{1}{p^{sn}} = \sum_p\frac{1}{p^s} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_p\frac{1}{p^{sn}}.\end{aligned}$$

Jälkimmäistä termiä voi arvioida esimerkiksi seuraavasti:

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_p\frac{1}{p^{sn}} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{1}{m}\right)^{sn} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{m}\right)^{sn} = \frac{1}{2}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m^{2s}}\frac{1}{1-\frac{1}{m^s}} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m^{2s}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \leqslant \zeta(2s) \leqslant \zeta(2).\end{aligned}$$

Siispä, kun $s \in]1{,}2[$, pätee

$$\log\zeta(s) = \sum_p \frac{1}{p^s} + O(1). \tag{2}$$

Toisaalta, koska

$$\frac{1}{s-1} < \zeta(s) < 1 + \frac{1}{s-1} = \frac{s}{s-1},$$

on kaikilla $s \in]1{,}2[$

$$\log\frac{1}{s-1} < \log\zeta(s) < \log\frac{1}{s-1} + \log s,$$

ja kun $s \in]1{,}2[$, on varmasti $\log s = O(1)$, ja siis pätee myös

$$\log\zeta(s) = \log\frac{1}{s-1} + O(1). \tag{3}$$

Kaava (1) seuraa nyt kaavoista (2) ja (3).

Alkulukulause

Järjestetään alkuluvut kasvavaan jonoon

$$2, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 11, \quad 13, \quad \ldots,$$

ja merkitään

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 3, \quad p_3 = 5, \quad p_4 = 7 \quad \text{jne.}$$

Merkitään myös reaaliluvuilla x symbolilla $\pi(x)$ niiden alkulukujen p lukumäärää, joille $p \leqslant x$. Esim. $\pi(1) = 0$, $\pi(5{,}7) = 3$ ja $\pi(14) = 6$.

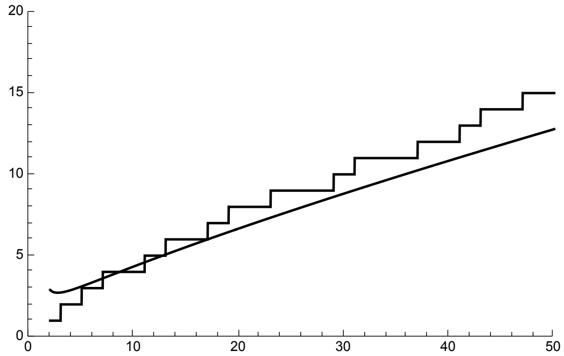
Eräs klassinen lukuteorian ongelma on ymmärtää alkulukujen *jakaumaa*. Eräs matematiikan kruununjalokivistä on tulos nimeltä *alkulukulause*, jonka ensimmäisenä todistivat toisistaan riippumattomasti Hadamard ja de la Vallée Poussin 1896:

Alkulukulause. *Alkulukujen lukumäärälle pätee*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad \textit{kun} \quad x \longrightarrow \infty,$$

eli

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1.$$



Kuva 2. *Lausekkeiden $\pi(x)$ ja $x/\log x$ kuvaajat, kun $x \in [2{,}50]$.*

Monista syistä johtuen suureen $\pi(x)$ arviointi on mielekkäämpää kuin n. alkuluvun p_n arviointi. Kuitenkin, tässä suuripiirteisimmässä muodossaan alkulukulauseen voi muotoilla yksinkertaisemminkin:

Alkulukulause, vaihtoehtoinen muotoilu. *Pätee*

$$p_n \sim n\log n, \quad \textit{kun} \quad n \longrightarrow \infty,$$

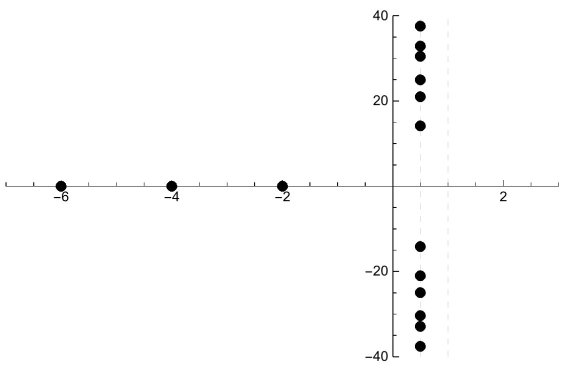
eli

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{p_n}{n\log n} = 1.$$

Tämä tarkoittaa sitä, että p_n on suurin piirtein $n\log n$, ja suhteellinen virhe menee nollaan (vaikka absoluuttinen virhe ei mene), kun n kasvaa. Esimerkiksi, riittävän isoilla (itse asiassa *todella* isoilla) luvun n arvoilla lauseke $n\log n$ antaa alkuluvun p_n miljoona ensimmäistä numeroa (vasemmalta lukien) oikein. Vieläkin isompiin luvun n arvoihin rajoittumalla $n\log n$ antaa alkuluvun p_n miljardi ensimmäistä numeroa oikein, ja niin pois päin.

Syvemmälle teoriaan

Jotta Riemannin ζ-funktion yhteyden alkulukuihin voisi ymmärtää paremmin, on sen määrittelyaluetta jatkettava reaalilukuvälin $]1,\infty[$ ulkopuolelle. Riemann oivalsi ensimmäisenä, että lausekkeen $\zeta(s)$ voi määritellä yksikäsitteisellä mielekkäällä tavalla kaikille kompleksiluvuille $s \neq 1$, ja että tällä jatkolla on monia jännittäviä ominaisuuksia. Erityisesti, sillä on kompleksisia nollakohtia, joilla on varsin läheinen yhteys alkulukujen jakautumiseen. Nämä ajatukset esiintyivät ensimmäisen kerran Riemannin ainoassa lukuteoreettisessa artikkelissa [13] vuonna 1859.



Kuva 3. *Riemannin ζ-funktion nollakohdat. Pisteistä $-2, -4, -6, \ldots$ löytyy nollakohdat, joita kutsutaan triviaaleiksi nollakohdiksi. Loput nollakohdat sijaitsevat pystysuoralla kriittisellä nauhalla $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$.*

Yksinkertaisin esimerkki yhteydestä on seuraava: alkulukulause muodossa

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

on ekvivalentti sen kanssa, että

$$\zeta(1 + it) \neq 0$$

kaikilla reaaliluvuilla $t \neq 0$. (Kun s on kompleksiluku, on arkea tapana piristää kirjoittamalla $s = \sigma + it$.) Toisin sanoen, alkulukulause eräässä mielessä tarkoittaa sitä, että ζ-funktiolla ei ole nollakohtia kompleksitason suoralla $\sigma = 1$. Ja itse asiassa kaikkein helpoimmat todistukset alkulukulauseelle perustuvatkin juuri tähän seikkaan.

Yhteys nollakohtien ja alkulukujen välillä osoittautuu paljon monisyisemmäksi. On nimittäin mahdollista johtaa eksplisiittisiksi kaavoiksi kutsuttuja identiteettejä, joista toinen puoli koskee pelkästään alkulukuja, ja toinen puoli ainoastaan ζ-funktion nollakohtia. Näiden kaavojen eräs seuraus on, että mitä kauemmas vasemmalle suorasta $\sigma = 1$ nollakohtavapaata aluetta voi laajentaa, sitä tarkemmin alkulukujen käytös tunnetaan.

Nykyisin oleellisesti ottaen paras tulos tähän suuntaan on Vinogradovin ja Korobovin jo yli puoli vuosisataa vanha arvio: $\zeta(s) \neq 0$, kun t on riittävän iso ja

$$\sigma \geqslant 1 - c(\log t)^{-2/3}(\log\log t)^{-1/3},$$

missä c on jokin pieni positiivinen reaalivakio. Vastaava paras arvio alkulukujen jakaumalle on

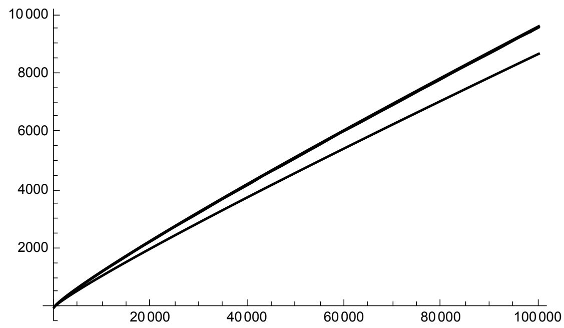
$$\pi(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t} + O(x\, e^{-d(\log x)^{3/5}(\log\log x)^{-1/5}})$$

jollakin positiivisella reaalivakiolla d.

Tässä kohtaa on syytä huomauttaa, että oikealla puolella esiintyvä integraali on tarkempi arvio lausekkeelle $\pi(x)$ kuin $x/\log x$. Aiemmissa alkulukulauseen muotoiluissamme asialla ei ollut suurta merkitystä, koska

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t} \sim \frac{x}{\log x}, \quad \text{kun } x \longrightarrow \infty,$$

joten yksinkertaisempi lauseke on tavanomaisempi. Osoittautuu kuitenkin, että erotus $\pi(x) - x/\log x$ on suuruusluokkaa $x/\log^2 x$, ja $\int_2^x \mathrm{d}t/\log t$ on silmin nähden lähempänä arvoa $\pi(x)$. Seuraava kuva valaissee asiaa:



Kuva 4. *Ylemmässä kuvaajassa on sekä lausekkeiden $\pi(x)$ että $\int_2^x \mathrm{d}x/\log x$ kuvaajat, alemmassa lausekkeen $x/\log x$ kuvaaja.*

Eräs yksinkertaisempi yhteys nollakohtien ja alkulukujen jakauman välillä on seuraava: Olkoon $\beta \in \,]0,1[$. On mahdollista todistaa, että $\zeta(s) \neq 0$, kun $\sigma > \beta$, jos ja vain jos

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t} + O(x^\gamma)$$

kaikilla $\gamma > \beta$. Koska ζ-funktiolla varmasti on nollakohtia suoralla $\sigma = 1/2$, on pienin mahdollinen β siis $1/2$, jolloin saataisiin oleellisesti ottaen paras mahdollinen arvio alkulukujen jakaumalle.

Riemannin hypoteesi. Kaikki ei-reaaliset Riemannin ζ-funktion nollakohdat sijaitsevat kriittisellä suoralla $\sigma = 1/2$.

Riemannin hypoteesi, vaihtoehtoinen muotoilu. Jokaisella $\gamma > 1/2$ pätee

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t} + O(x^\gamma), \quad \text{kun } x \longrightarrow \infty.$$

Millaisia asioita nollakohdista tiedetään?

Nyt kun ζ-funktion nollakohtien ja alkulukujen välinen yhteys on esitelty, on luonnollista seuraavaksi tutustua tarkemmin joihinkin nollakohdista jo tiedettyihin asioihin, erityisesti siihen, millaisia tuloksia Riemannin hypoteesin suuntaan tiedetään.

Luonnollinen ensimmäinen askel olisi laskea joitakin nollakohtia ja katsoa, ovatko ne tosiaan kriittisellä suoralla. Riemann itse kehitti riittävästi teoriaa voidakseen tarkistaa, että muutamalle pienimmälle kompleksiselle nollakohdalle näin tosiaan on. Näitä laskuja on tietenkin parannettu merkittävästi, ja nykyisin tiedetään jo mm., että ensimmäiset 10^{13} kompleksista nollakohtaa ovat kriittisellä suoralla Gourdonin ja Demichelin tietekonelaskujen nojalla.

Nollakohdista voi myös todistaa monia eri asioita. On järkevää laskea nollakohtia $\rho = \beta + i\gamma$, missä imaginaariosa γ kuuluu välille $]0,T[$ ja siis $\beta \in]0,1[$, ja tutkia, mitä tapahtuu, kun T kasvaa. Näiden nollakohtien lukumäärää merkitään $N(T)$. Riemannin ja von Mangoldtin perustavanlaatuinen tulos aiheesta sanoo, että

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T), \quad \text{kun } T \longrightarrow \infty.$$

Tästä seuraa, että jos kompleksitason ylemmän puolitason nollakohdat asettaa järjestykseen kasvavan imaginaariosan mukaan, niin n. nollakohdan imaginaariosa on $\sim \pi n/\log n$, kun $n \longrightarrow \infty$.

Eräs ensimmäisistä tuloksista nollakohdista nimenomaan kriittisellä suoralla oli Hardyn tulos vuodelta 1914, joka sanoo, että kriittisellä suoralla on äärettömän monta nollakohtaa. Itse asiassa löytyy vähintään cT nollakohtaa $1/2 + \gamma i$, joille $0 < \gamma < T$, missä c on pieni positiivinen reaalilukuvakio.

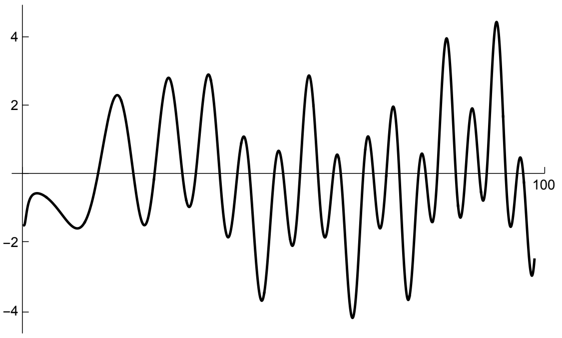
Seuraava suuri edistysaskel oli Selbergin tulos vuodelta 1942, jonka mukaan kriittisellä suoralla näitä nollakohtia on vähintään $cT\log T$ kappaletta, jälleen jollakin positiivisella reaalilukuvakiolla c. Useimmiten tämä tulos muotoillaan niin, että "positiivinen osuus kriittisen nauhan nollakohdista on kriittisellä suoralla".

Luonnollisesti olisi mielenkiintoista tietää, kuinka suureksi tämän positiivisen osuuden voi osoittaa. Levinson sai 1974 ensimmäisen konkreettisen lukuarvon vakiolle c: enemmän kuin kolmasosa kriittisen nauhan nollakohdista on kriittisellä suoralla. Conrey paransi tätä 1989 yli kahteen viidesosaan.

Toisenlainen lähestymistapa on laskea niiden nollakohtien lukumäärää, joiden reaaliosa β ei ole välttämättä tasan $1/2$, mutta jollakin tietyllä välillä $[1/2 - \delta, 1/2 + \delta]$. Bohrin ja Landaun lause vuodelta 1914 sanoo, että millä tahansa δ, muiden nollakohtien osuus kaikista nollakohdista lähestyy nollaa, kun $T \longrightarrow \infty$.

ζ-funktion arviointia

Tarkastelkaamme lopuksi erästä mielenkiintoista ja tärkeää ongelmaa, joka tarjoaa toisenlaisen yhteyden ζ-funktion ja alkulukujen välille, ja ohimennen myös kertoo jotakin Riemannin hypoteesin vaikeudesta.



Kuva 5. *Hardyn Z-funktion $Z(t)$ kuvaaja, kun $t \in [0,98]$. Oleellista on, että $|Z(t)| = |\zeta(1/2 + it)|$, ja siis että Z-funktion koko ja nollakohdat vastaavat ζ-funktion kokoa ja nollakohtia kriittisellä suoralla.*

Kysymys koskee sitä, kuinka isoja arvoja ζ-funktio voi saada kriittisellä suoralla. Ensimmäinen tulos tähän suuntaan on, että

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right| = O(t^{1/4}),$$

kun $t \longrightarrow \infty$, ja seuraava kysymys luonnollisesti kuuluu, kuinka paljon tätä arviota voi parantaa?

Tämän ylärajan parantamisella on seuraava mielenkiintoinen yhteys alkulukuihin: Hoheiselin ja Inghamin ansiosta tiedetään, että jos

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right| = O(t^{\vartheta+\varepsilon})$$

miten pienelle $\varepsilon > 0$ tahansa, niin silloin peräkkäisten alkulukujen välisille erotuksille pätee

$$p_{n+1} - p_n = O(p_n^{\beta+\varepsilon})$$

miten pienelle $\varepsilon > 0$ tahansa, missä $\beta = \frac{1+4\vartheta}{2+4\vartheta}$.

Esimerkiksi, 1921 Hardy ja Littlewood todistivat, että eksponentti $\vartheta = 1/6$ on kelvollinen. Tällöin vastaava eksponentti β tulee olemaan $5/8$. Erityisesti siis $p_{n+1} - p_n = O(p_n^{5/8+\varepsilon})$, mistä seuraa vaikkapa, että riittävän isoilla kuutioilla kahden peräkkäisen kuutioluvun välissä on aina alkuluku.

Ongelmalla on myös tärkeä yhteys Riemannin hypoteesiin. Lindelöfin hypoteesi sanoo, että yllä voi valita $\vartheta = 0$. Osoittautuu, että Riemannin hypoteesista seuraa Lindelöfin hypoteesi. Toisaalta, kukaan ei ole osannut johtaa Riemannin hypoteesiä Lindelöfin hypoteesista, eli tietyssä mielessä kysymys Lindelöfin hypoteesin paikkansa pitävyydestä vaikuttaa helpommalta ongelmalta kuin Riemannin hypoteesin.

Lindelöfin hypoteesi on kuitenkin siitä hauskempi, että eksponentti ϑ sallii kvantifioida sen parissa saavutetun edistyksen. Ensimmäinen arvio on noin vuosisadan ikäinen $\vartheta = 1/4$, joka seuraa tietystä ζ-funktion perusominaisuudesta ja yleisistä kompleksimuuttujan funktioiden ominaisuuksista. Ensimmäinen vaikeampi arvio oli jo yllä mainittu eksponentti $\vartheta = 1/6$ vuodelta 1921.

Eksponenttia ϑ on sittemmin pienennetty varsin ahkerasti. Eräs luettelo erinäisistä tuloksista on seuraava:

ϑ	Kenen ja milloin?
163/988	Walfisz, 1924
27/164	Titchmarsh, 1931
229/1392	Phillips, 1933
19/116	Titchmarsh, 1942
15/92	Min, 1949
6/37	Haneke, 1962–3
173/1067	Kolesnik, 1973
35/216	Kolesnik, 1982
139/858	Kolesnik, 1985
9/56	Bombieri & Iwaniec, 1986
89/560	Watt, 1989
17/108	Huxley & Kolesnik, 1991
89/570	Huxley, 1993
32/205	Huxley, 2005
53/342	Bourgain, 2014

Taulukko. *Eksponentin ϑ parannuksia vuosien varrelta. Riemannin hypoteesista seuraisi, että $\vartheta = 0$ kävisi.*

On mielenkiintoista, että eksponentista 1/6 on melkein vuosisadan aikana onnistuttu vähentämään vain reilu sadasosa, eli reilut 7 %. On hyvä huomata myös, että suurin osa yllä mainituista parannuksista perustuu uusiin ideoihin ja oivalluksiin; pelkällä raa'alla työllä eksponentin arvoa ei voi parantaa. Jos Riemannin hypoteesi sattuu pitämään paikkansa, niin tämä epäilemättä kertoo jotakin siitä, kuinka vaikeaa sen todistaminen saattaa lopulta olla...

Lopuksi

Lopuksi todettakoon, että ζ-funktio on vain yksi esimerkki niin sanotuista L-funktioista; lukuteoriassa on lukemattomia muita saman henkisiä toinen toistaan monimutkaisempia otuksia, kuten Dirichlet'n L-funktiot, elliptisten käyrien L-funktiot, lukukuntien Dedekindin ζ-funktiot ja Hecken L-funktiot, holomorfisten kärkimuotojen L-funktiot, Maassin muotojen L-funktiot, yleisemmät automorfiset L-funktiot...

Kirjallisuus ja lähteet

Useimmat yllä mainitut tulokset ja historialliset detaljit löytyvät aiheen perusteoksista, kuten [2, 4, 7, 8, 9, 12, 14], sekä (muutamassa tapauksessa) seuraamalla niistä löytyviä viitteitä tutkimusartikkeleiden viidakkoon. Riemannin kuuluisa artikkeli [13] löytyy (englanniksi käännettynä) vaikkapa teoksista [2, 4]. Yllä mainittujen teosten lisäksi myös pieni artikkeli [15] ansaitsee tulla mainituksi. Varoituksena todettakoon, että näillä lähteillä on taipumus olettaa lukijalta yliopistollisia esitietoja.

Riemannin ζ-funktiosta ja sitä sivuavista aiheista on toki olemassa populaarikirjallisuuttakin, kuten suomeksikin käännetty [3], josta on myös olemassa kirja-arvostelu [11].

Yllä ohimennen mainitut otukset $d(n)$ ja $\sigma(n)$ ovat kiehtovia tutkimuskohteita, joihin voi tutustua tarkemmin vaikkapa artikkeleista [5, 6].

Lopuksi, toivottavasti yllä kuvatut ilmiöt vakuuttavat kompleksilukuja tuntemattoman lukijan niiden tärkeydestä. Perustietoa kompleksiluvuista löytää esim. artikkelista [10].

Viitteet

[1] Auberg, K. E., E. Bombieri, ja D. Goldfeld: *Number Theory, Trace Formulas and Discrete Groups. Symposium in Honor of Atle Selberg. Oslo, Norway, July 14–21, 1987*, Academic Press, 1989.

[2] Borwein, P., S. Choi, B. Rooney ja A. Weirathmueller: *The Riemann Hypothesis: A Resource for the Afficionado and Virtuoso Alike*, CMS Books in Mathematics, 27, Springer, 2008.

[3] Derbyshire, J.: *Alkulukujen lumoissa*, Terra Cognita, 2006.

[4] Edwards, H. M.: *Riemann's Zeta Function*, Dover Publications, 2001.

[5] Ernvall-Hytönen, A.-M.: *Tekijäfunktio ja muita lukuteoreettisia otuksia*, Solmu, 2/2010, 24–26.

[6] Ernvall-Hytönen, A.-M.: *Täydellisyyttä etsimässä*, Solmu, 1/2011, 6–8.

[7] Ivić, A.: *The Riemann Zeta-Function*, Dover Publications, 2003.

[8] Ivić, A.: *The Theory of Hardy's Z-Function*, Cambridge Tracts in Mathematics, 196, Cambridge University Press, 2013.

[9] Karatsuba, A. A. ja S. M. Voronin: *The Riemann Zeta-Function*, de Gruyter Expositions in Mathematics, 5, Walter de Gruyter & Co., 1992.

[10] Lehtinen, M.: *Kaikki tarpeellinen kompleksiluvuista*, Solmu, 1/2006, 17–22.

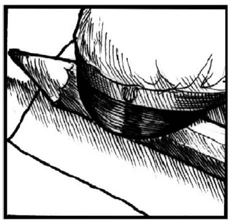
[11] Lehtinen, M.: *Riemannin hypoteesi ymmärrettäväksi*, Solmu, 1/2007, 30–31.

[12] Narkiewicz, W.: *The Development of Prime Number Theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2000.

[13] Riemann, B.: *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebener Größe*, Monatsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Berliini, marraskuu 1859, 671–680.

[14] Titchmarsh, E. C.: *The Theory of the Riemann Zeta-function*, Oxford University Press, 1986.

[15] Weil, A.: *Prehistory of the zeta-function*, teoksessa [1], 1–9.



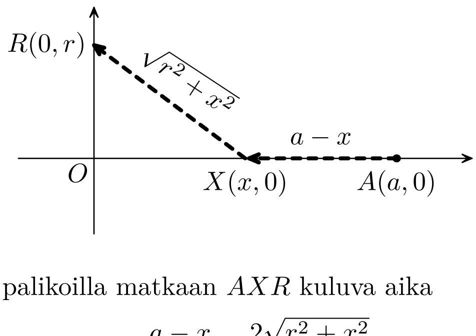
Vuoden 1934 ylioppilaskoetehtävä

Lehtori K.

Solmussa 3/2013 jäimme pohtimaan vuoden 1934 keväällä ylioppilaskokeessa ollutta kakkostehtävää. Tuolloin ei lukiossa opiskeltu differentiaalilaskentaa, mutta ääriarvoja kuitenkin määritettiin. Tehtävä oli seuraava:

”Piste P liikkuu vakinaisella nopeudella pitkin x-akselia origoa kohti, kunnes se saapuu pisteeseen Q, josta se nopeudella, joka on puolet edellisestä, jatkaa matkaansa y-akselilla olevaa annettua pistettä R kohti. Missä kohdassa pisteen Q tulee sijaita, jotta piste P mahdollisimman pian saapuisi pisteeseen R? Piirrä kuvio ja merkitse pisteen Q oikea paikka.”

Olkoon lähtöpiste $A(a,0)$, päätepiste $R(0,r)$ ja poikkeamispiste toistaiseksi tuntematon $X(x,0)$. Reitti näyttää seuraavalta:



Näillä palikoilla matkaan AXR kuluva aika

$$t = \frac{a-x}{c} + \frac{2\sqrt{r^2+x^2}}{c}, \tag{1}$$

missä c on pisteen nopeus x-akselilla. On siis löydettävä pienin mahdollinen $t = t_{\min}$ siten, että yhtälöllä (1) on reaalinen ratkaisu x. Yhtälö sievenee muotoon

$$(ct-a) + x = 2\sqrt{r^2+x^2}. \tag{2}$$

Selvästi $ct - a > 0$ ja $x > 0$, joten yhtälön (2) molemmat puolet ovat positiivisia. Neliöimällä saamme sievennysten jälkeen

$$3x^2 - 2(ct-a)x + 4r^2 - (ct-a)^2 = 0.$$

Diskriminanttiehto sievenee epäyhtälöksi

$$(ct-a)^2 - 3r^2 \geq 0,$$

mistä seuraa

$$ct \leq a - r\sqrt{3} \quad \text{tai} \quad ct \geq a + r\sqrt{3}.$$

Näistä oikeanpuoleinen toteuttaa ehdon $ct > a$, joten

$$t_{\min} = \frac{a + r\sqrt{3}}{c},$$

ja sitä vastaava poikkeamiskohta

$$x = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Siis

$$Q = \Big(\frac{r}{\sqrt{3}}, 0\Big).$$

Pisteen Q paikantaminen onnistunee yksinkertaisimmin piirtämällä aluksi origokeskeinen r-säteinen ympyrä. Erotetaan sitten R:stä alkavan halkaisijan toisesta päätepisteestä S koordinaatiston neljänteen neljännekseen 60°:een kaari ST. Jana RT leikkaa x-akselin etsityssä pisteessä Q.

Elämysten matematiikka -näyttely Turun Logomossa innostaa pähkäilemään

Turun Logomossa avataan 4. toukokuuta 2015 vuorovaikutteinen Elämysten matematiikka -näyttely matematiikan ja loogisen ajattelun maailmasta. Näyttely saapuu Suomeen Saksan Gießenissä sijaitsevasta Mathematikum-matematiikkamuseosta, jossa se on kehitetty yhdessä matematiikan opiskelijoiden kanssa. Suosittu näyttely on kiertänyt ympäri maailmaa ja innostanut yli miljoona kävijää kokeilun ja päättelyn pariin. Turussa se on esillä 5.-24.5.2015. Näyttely on suunnattu kaikenikäisille – erityisesti perheille ja koululaisille.

Näyttely koostuu yhteensä 25 kokeilemaan innostavasta näyttelyesineestä, kuten salakoodista, jonka viestin ratkaisemiseksi vaaditaan loogista ajattelua. Kävijät pääsevät myös rakentamaan Leonardo da Vincin kehittelemää siltaa puupaloista ilman minkäänlaisia kiinnitysvälineitä ja kokeilemaan, miltä Mozartin sävellys kuulostaa, kun sen 16 tahtia sekoitetaan eri järjestykseen.

Näyttelyyn järjestetään kierroksia paitsi suomeksi ja ruotsiksi, myös saksaksi ja englanniksi. Kävijät pääsevät ratkaisemaan kieltä ja matemaattista ajattelua vaativia pähkäilytehtäviä. Ryhmille tarjotaan myös pidempiä työpajoja, joissa esimerkiksi kaksi koulua pääsevät kilpailemaan yhteistyötaidoissa, loogisessa ajattelussa ja vieraalla kielellä työskentelyssä.

Ainerajat ylittävässä projektissa on mukana useita toimijoita niin luonnontieteellisiltä aloilta kuin kielenopetuksen puolelta. Näyttely innostaa lapsia ja nuoria matematiikan pariin sekä tarjoaa heille jännittäviä ja odottamattomia ilmiöitä luokkahuoneen ulkopuolelta ja täten lisää heidän uteliaisuuttaan matemaattisia ilmiöitä kohtaan. Vieraskieliset, aktiivisesti osallistumaan kannustavat kierrokset ja työpajat tarjoavat kävijöille mahdollisuuden oppia kieltä käytännössä. Näyttelyn oheismateriaali antaa opettajille välineitä osallistavan ja innostavan opetuksen suunnitteluun.

Järjestäjä: Elämysten matematiikka ja muuta jännittävää ry
Yhteistyökumppanit: Goethe-Institut Finnland, Turun kaupunki, Visit Turku, Saksan suurlähetystö, Suomalais-saksalainen yhdistys Turku, Sunborn Catering Oy, DB Schenker, Opetus.tv sekä Turun yliopiston Kieli- ja käännöstieteiden laitos (saksan kieli) sekä LUMA-keskus.

Goethe-Institut Finnland järjestää yhteistyössä hankeryhmän kanssa näyttelyyn liittyen täydennyskoulutusta opettajille. Tilaisuudet tarjoavat niin kielen- kuin luokanopettajille välineitä lähestyä kieltä loogisen ajattelun ja omakohtaisen kokeilun kautta.

Lisätietoja näyttelystä: `http://opetus.tv/extrat/elamysten-matematiikka/` tai
info@elamystenmatematiikka.com tai Maria Lahdenranta, puh: +358 44 2523812.
Sisäänpääsymaksu 3,8/5/7 €.

Näyttelyssä voi vierailla myös osana Visit Turun retkipakettia. Lisää tietoa löytyy osoitteesta `http://www.visitturku.fi/elamysten-matematiikkaa-ja-historian-havinaa_fi`.

Interaktiivinen näyttely matematiikan jännittävästä maailmasta koululaisille, opiskelijoille ja perheille!

mathematikum
Mathematik zum Anfassen.

ELÄMYSTEN MATEMATIIKKA

Maths to touch / Mathematik zum Anfassen

5. - 24.5.2015

LOGOMO, Logi 3
os. Köydenpunojankatu 14, Turku

Ma – Pe klo 9 - 15 / **La** klo 10 - 16
(Paitsi torstaina 14.5. klo 11 - 16)

X+Y
=XD

1+1=

"MA-TE-MA-TIIK-KA TEKEE (!!!) ILOISEKSI!"
- Pythagoras

PÄÄSYMAKSUT

Ryhmät, Koululaiset (6 - 16 v)	3,8 € / hlö
Opiskelijat, Eläkeläiset	5 € / hlö
Aikuiset	7 € / hlö
Perhelippu (2 aik. ja 2-3 lasta)	16 € / perhe

Retkipaketit koululuokille ja muille ryhmille:
www.visitturku.fi/ryhmille/koululaisretket

Yhteydenotot ja varaukset:
info@elamystenmatematiikka.com
www.logomo.fi/fi/tapahtumat

<3

Järj. Elämysten Matematiikka ja muuta jännittävää ry