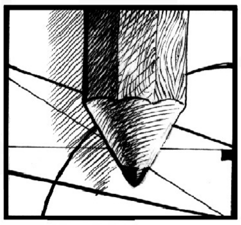
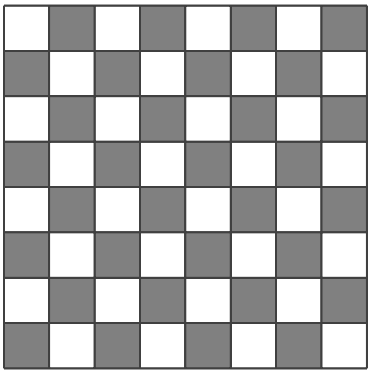


Mihin ruutuja tarvitaan?

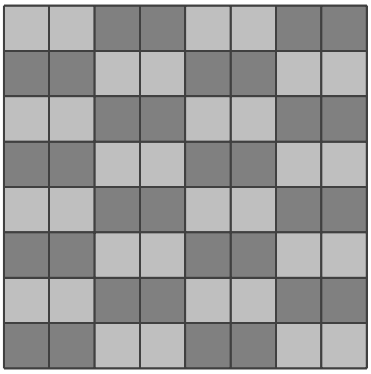
Kalle Nahkala
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Turun yliopisto



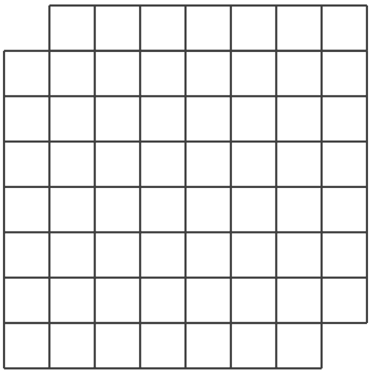
Shakkilaudan tuntee lähes jokainen. Jotkut voivat tuntea sen enemmän tammilautana tai ruutulippuna, mutta kuvio on joka tapauksessa useimmille tuttu. Ainakin shakin sääntöjen kannalta juuri tällainen ruudutus on ehkä hieman yllättävästi kuitenkin melko tarpeeton. Ruutujen värityksen voisi tehdä jollain toisella tavalla tai vaikka kokonaan unohtaa, ja peli jatkuisi silti aivan niin kuin ennenkin. Mihin ruutuja siis voisi tarvita?

Kyllä niitä tarvitaan

Laatoitusongelmissa yritetään selvittää, voiko tietyn muotoisen alueen peittää tietynlaisilla laatoilla. Esimerkiksi tavallisen kokoinen shakkilauta voidaan helposti peittää 2×1 -laatoilla:

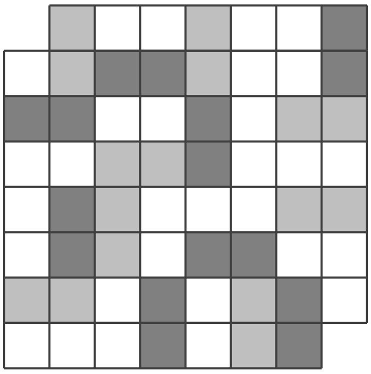


Jos samasta laudasta kuitenkin poistetaan kaksi ruutua vastakkaisista kulmista, tilanne mutkistuu:



Jos sopiva peittävä laatoitus on olemassa, tarvitaan siihen varmasti yksi 2×1 -laatta vähemmän, siis 31 laattaa. Kokonaisella laudalla sopiva laatoitus löytyy helposti kokeilemalla, mutta leikatulla laudalla erilaiset kokeilut osoittautuvat jo hieman pulmallisiksi; muutama ensimmäinen yritys lähes varmasti epäonnistuu. Herää helposti kysymys ”Kauanko tätä pitää vielä jatkaa?”

Jaetaan nyt lauta 14 samankokoiseen neliöön ja kahteen kulmista vajaaseen neliöön ja asetetaan vapaasti valiten jokaiseen neliöön yksi 2×1 -laatta. Mahdollisia asetelmia saadaan näin $4^{14} \times 2^2 = 1073741824$, sillä pienessä neliössä 2×1 -laatta voidaan asettaa neljään eri paikkaan ja kulmissa kahteen.



Eräs mahdollinen vajaa laatoitus.

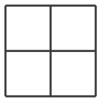
Vaikka osa vajaista laatoituksista onkin selvästi mahdottomia täydentää loppuun, on kokeiltavia vaihtoehtoja silti valtavasti, ehkä jopa liikaa raapusteltavaksi sivun marginaaleissa.

Tälle ongelmalle saadaan kuitenkin nopea päätös shakkiruudutuksella; shakkilaudalla yksi 2×1 -laatta peittää aina yhden mustan ja yhden valkoisen ruudun. Laudan vastakkaiset kulmat ovat kuitenkin samanväriset, jolloin kulmista leikatulla laudalla on 30 valkoista ja 32 mustaa ruutua. Peittävää laatoitusta ei siis ole olemassa.

Shakkilauta ja 2×1 -laatat eivät suinkaan ole mikään ainutlaatuinen ongelma. Lähinnä mielikuvitus on rajana keksittäessä erimuotoisia laattoja ja ruudutuksia. Tarkastellaan lähemmin vielä seuraavia laattoja:

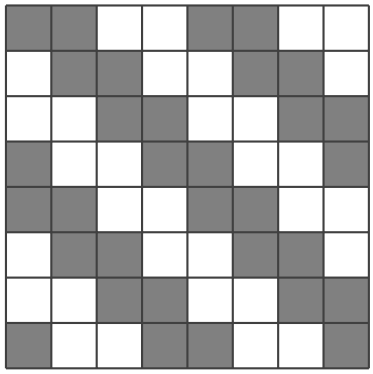
4×1 *-laatta*

ja



2×2 *-laatta*

$7 \times 4 + 9 \times 4 = 64$, joten seitsemän pitkää ja yhdeksän neliömäistä laattaa voisivat periaatteessa yhdessä peittää täydellisesti 8×8 -ruudukon. Shakkiruudutuksen sijaan valitaan nyt ruudukolle seuraava väritys:



Laudalla on yhteensä 32 mustaa ruutua. 4×1 -laatta peittää aina kaksi ja 2×2 -laatta aina joko yhden tai kolme mustaa ruutua. Merkitään yhden mustan peittävien neliölaattojen määrää muuttujalla a ja kolme peittäviä laattoja muuttujalla b. Seitsemällä pitkällä ja yhdeksällä neliölaatalla saadaan nyt yhtälö

$$\begin{aligned} 7 \times 2 + a + 3b &= 14 + (a + b) + 2b \\ &= 14 + 9 + 2b = 23 + 2b = 32. \end{aligned}$$

Yhtälö on ristiriitainen, sillä $23 + 2b$ on pariton ja 32 parillinen luku. Peittävää laatoitusta ei siis ole.

Käytetyn kaltainen päättely on erityisen tarpeellista, jos laatoitettava alue on suuri; pariteettia havainnollistavat yhtälöt pysyvät kaikenkokoisilla alueilla oleellisesti samanlaisina.

Avoimia matematiikan oppikirjoja verkossa

Osoitteesta `http://avoinoppikirja.fi` löytyy avoimia yläkoulun ja lukion matematiikan oppikirjoja.