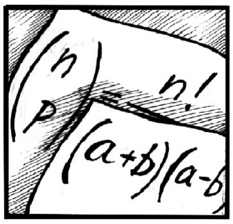


Neperin luvun kahdet kasvot

Pekka Alestalo
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Johdanto

Kirjoitin Solmu-lehden numerossa 2/2013 binomikaavasta

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

kun $n \in \mathbf{N}$ ja $a, b \in \mathbf{R}$, ks. [1]. Tämän kirjoituksen tarkoituksena on esittää kaavan sovelluksena suoraviivainen perustelu sille, että Neperin luvun määrittelevä jono (e_n),

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

on nouseva ja ylhäältä rajoitettu. Jonon suppeneminen seuraa silloin helposti. Samalla nähdään, että Neperin lukuun päädytään kahden erilaisen raja-arvon kautta:

$$\begin{aligned} e &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad (1) \\ &= 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Tätä tietoa käytettiin mm. viime vuoden viimeisessä Solmun numerossa, jossa todistettiin luvun e irrationaalisuus, ks. [2, s. 13].

Jono (e_n) on nouseva

Tarkastellaan lauseketta $7!/3!$. Kun kertomat lasketaan auki, niin saadaan

$$\frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4,$$

koska $3 \cdot 2$ supistuu pois. Samalla periaatteella nähdään, että

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1),$$

koska nimittäjä supistaa pois osoittajan loppuosan.

Sovelletaan tätä havaintoa binomikaavan yleiseen termiin, kun lauseke $(1 + 1/n)^n$ lasketaan auki. Näin saadaan

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{1}{n}\right)^k &= \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k} \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} \\ &= \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Tällöin siis

$$\begin{aligned} e_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \\ &\quad \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right), \qquad (2) \end{aligned}$$

jolloin tietysti

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \\ &\quad \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \\ &\quad \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \qquad (3) \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right). \qquad (4) \end{aligned}$$

Jokaisella $j = 1, 2, \ldots, k-1$ on voimassa

$$\frac{j}{n} > \frac{j}{n+1}, \quad \text{joten} \quad 1 - \frac{j}{n} < 1 - \frac{j}{n+1}.$$

Tämän vuoksi jokainen summan (2) termi on pienempi kuin vastaava summan (3) termi, kun $k = 0, 1, \ldots, n$. Lisäksi e_{n+1}-summassa on yksi ylimääräinen positiivinen termi (4), joka vastaa viimeistä summausindeksiä $k = n+1$. Johtopäätös: $e_n < e_{n+1}$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$, joten jono (e_n) on nouseva.

Jono (e_n) on ylhäältä rajoitettu

Merkitään

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Koska $1 - j/n < 1$ kaikilla $j = 1, \ldots, n-1$, niin arvoilla $n \geq 1$ yhtälöstä (2) saadaan epäyhtälö $e_n < s_n$. Arvoilla $k \geq 3$ on voimassa

$$k! = k(k-1)(k-2)\ldots 2 > 2^{k-1},$$

koska tulon termit viimeistä lukuun ottamatta ovat suurempia kuin 2. Geometrisen sarjan ($q = 1/2$) summakaavan avulla saadaan

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &< \frac{5}{2} + \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 3 \end{aligned}$$

kaikilla n. Yhdistämällä tulokset todetaan, että

$$e_n \leq s_n < 3 \qquad (5)$$

kaikilla n, joten jono (e_n) on ylhäältä rajoitettu.

Tehtävä. (vrt. kevään 2015 pitkän matematiikan YO-tehtävä 15) Perustele edellä saatu tulos käyttämällä epäyhtälöä $k! > k(k-1)$, kun $k \geq 3$.

Neperin luku

Jono (e_n) on siis nouseva ja ylhäältä rajoitettu. Reaalilukujen aksiomista seuraa silloin, että raja-arvo

$$e = \lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (6)$$

on olemassa. Tämä on kirjoitelman päähenkilö *Neperin luku e*. Koska $e_1 = 2$, niin sivutuotteena saimme myös arviot $2 < e < 3$.

Kaavan (5) perusteella jono (s_n) on ylhäältä rajoitettu ja selvästi myös nouseva. Lisäksi

$$\lim_{n\to\infty} s_n \geq \lim_{n\to\infty} e_n = e.$$

Osoitetaan vielä, että tässä on voimassa yhtäsuuruus, jolloin kaava (1) on kokonaan todistettu.

Tarkastellaan uudelleen yhtälöä (2). Valitaan kiinteä indeksi n ja tarkastellaan sen jälkeen indeksin arvoja $m > n$. Tällöin

$$e_m > \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\left(1 - \frac{k-1}{m}\right),$$

koska summan lopusta on jätetty pois indeksejä $k = n+1, \ldots, m$ vastaavaat positiiviset termit. Pidetään edelleen indeksi n kiinteänä, mutta otetaan epäyhtälön molemmista puolista raja-arvo, kun $m \to \infty$. Koska äärellisen summan termeistä voidaan ottaa erikseen raja-arvo, niin tuloksena on epäyhtälö $e \geq s_n$, joka pätee kaikilla n. Kun tästä otetaan raja-arvo $n \to \infty$, saadaan

$$\lim_{n\to\infty} s_n \leq e.$$

Käänteinen epäyhtälö todistettiin jo aikaisemmin, joten kaava (1) on tosi.

Pohdintoja

Kaikissa vanhemmissa yliopistojen oppikirjoissa Neperin lukua käsitellään joko yllä mainitulla tai sitä hyvin lähellä olevalla tavalla; ks. viitteet [3], [4] ja [5]. Uudemmissa kirjoissa tästä on luovuttu. Syynä lienee se, ettei sarjoja haluta käsitellä vielä näin aikaisessa vaiheessa differentiaali- ja integraalilaskennan kurssia.

Oman kokemukseni mukaan sarjojen välttely kurssin alussa on aivan turhaa, koska ne on kuitenkin käsiteltävä jossakin vaiheessa ja toisaalta niiden avulla voidaan yksinkertaistaa monia kohtia. Erityisen selvästi tämä tulee esille eksponenttifunktion e^x kohdalla, josta ajattelin jatkaa jossakin seuraavista numeroista.

Viitteet

[1] P. Alestalo: Binomikaava. Solmu 2/2013, s. 18–20.

[2] A.-M. Ernvall-Hytönen: Rationaalisia, irrationaalisia, algebrallisia ja transkendenttisiä otuksia. Solmu 3/2014, s. 12–15.

[3] E. Lindelöf: Johdatus analyysiin. Mercatorin Kirjapaino 1942 (s. 204 alkaen)

[4] P.J. Myrberg: Differentiaali- ja integraalilaskennan oppikirja. Otava 1952 (s. 119 alkaen)

[5] K.A. Poukka: Korkeamman matematiikan alkeiskurssi. WSOY 1953 (s. 211 alkaen)

`http://fi.wikipedia.org/wiki/John_Napier`

Tehtäviä Helsingin seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailusta 9.–13.2.2015

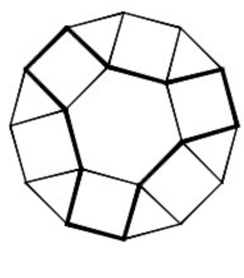
6. Luku 100 kirjoitetaan kahden peräkkäisen kokonaisluvun summana. Mikä on luvuista suurempi?

   a) 15 b) 50 c) 51 d) 75 e) Lukua 100 ei voi kirjoittaa kahden peräkkäisen kokonaisluvun summana.

11. Ankkalinnan ja Hanhivaaran välillä kulkevia junia lähtee kummassakin kaupungissa tunnin välein tasatunnein. Matka kestää tasan 4 tuntia. Matti matkusti junalla Ankkalinnasta Hanhivaaraan ja katseli junan ikkunasta koko matkan ajan. Montako Hanhivaarasta Ankkalinnaan matkalla olevaa junaa hän näki matkansa aikana? (Tässä mahdollisia juuri Ankkalinnaan saapumassa olevia tai Hanhivaarasta lähdössä olevia junia ei oteta huomioon.)

    a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

12. Seuraavassa kuviossa on säännöllinen kuusikulmio, neliöitä ja tasasivuisia kolmioita. Kuinka suuri osuus kuvion pinta-alasta on paksun viivan sisällä?

    a) 45 % b) 50 % c) 55 % d) 60 % e) 65 %