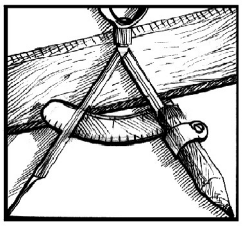


Sotapäällikkö ja geometria

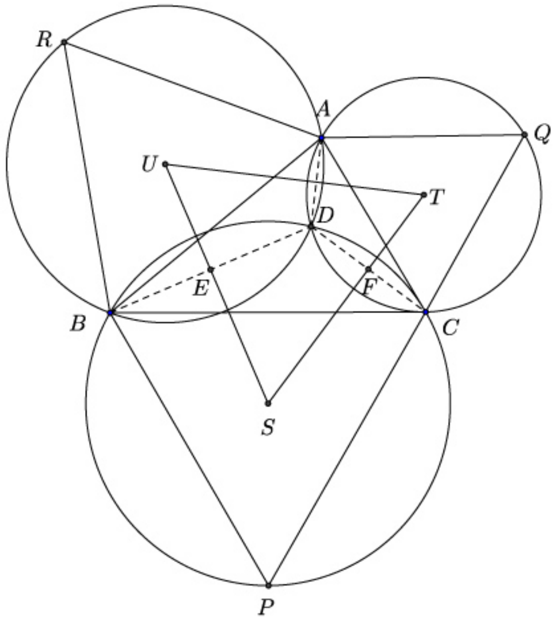
Matti Lehtinen

Valtiomiehiä tai sotapäälliköitä ei yleensä yhdistetä matematiikkaan. Poikkeuksia tietysti on. Suomen kenttätykistön luojana pidettyä tykistönkenraali *Vilho Petter Nenosta* (1883–1960) kunnioitettiin nerokkaana tykistömatemaatikkona. Eläkepäivinään hän tiettävästi innostui Fermat'n ongelmasta ja aiheutti matematiikan professori Pekka Juhana Myrbergille kiusallisiakin tilanteita, kenraalin ratkaisuyritykset kun olivat aika epäonnisia, mutta Myrberg ei tätä olisi oikein kehdannut suurmiehelle suoraan sanoa.

Henkilö voidaan ikuistaa matematiikkaan liittämällä hänen nimensä matemaattiseen tulokseen. Pythagoras on kuolematon. Luultavasti ainoa sotapäällikkö ja valtiomies, joka tämän kunnian on osakseen saanut, on itse keisari Napoleon. *Napoleonin lause* on geometrian tulos, joka yksinkertaisimmassa muodossaan on seuraava:

Jos (mielivaltaisen) kolmion sivut kantoina piirretään kolmion ulkopuolelle tasasivuiset kolmiot, niin niiden keskipisteet ovat tasasivuisen kolmion kärjet.

Napoleonin lause voidaan todistaa monin eri tavoin – tästä vakuuttuu vaikkapa Google-haun avulla. Seuraava todistus on melko helppo (kuva 1). Olkoon ABC kolmio, jossa suurin kulma $\angle CAB < 120°$, ja BPC, CQA ja ARB kolmion ABC sivut kantoina piirretyt tasasivuiset kolmiot. Olkoot S, T ja U näiden kolmioiden keskipisteet. (Tasasivuisen kolmion keskijanojen, korkeusjanojen, kulmanpuolittajien ja sivujen keskinormaalien leikkauspiste on sama, joten keskipiste on oikeutettu nimitys.) Kolmioiden ARB ja CQA ympärysympyrät leikkaavat, paitsi pisteessä A, myös pisteessä D kolmion ABC sisällä. Koska $\angle ARB = \angle CQA = 60°$, niin jännenelikulmioista $ARBD$ ja $CQAD$ nähdään, että $\angle ADB = \angle ADC = 120°$. Mutta silloin $\angle CDB = 360° - 2 \cdot 120° = 120°$. Koska $\angle BPC = 60°$, $BPCD$ on jännenelikulmio. Piste D on siis myös kolmion BPC ympärysympyrällä. Leikatkoot US ja BD pisteessä E ja TS ja DC pisteessä F. Heti nähdään, että US on BD:n keskinormaali ja ST on DC:n keskinormaali.



Kuva 1.

Kulmat $\angle DES$ ja $\angle DFS$ ovat siis suoria kulmia. Koska $\angle EDF = 120°$, on kulman $\angle ESF$ oltava $60°$. Samoin nähdään, että kolmion STU kärjissä T ja U olevat kulmat ovat $= 60°$, joten kolmio STU on tasasivuinen kolmio. – Jos $\angle CAB \geq 120°$, niin piste D joko yhtyy pisteeseen A tai on kolmion ABC ulkopuolella. Todistuksen kannalta olennainen asia, $\angle CDB = 120°$, toteutuu näissäkin tapauksissa.

Ei ole olemassa mitään todisteita siitä, että Napoleonin lause olisi juuri Napoleonin keksintöä. On arveltu, että Napoleonin matemaattiset taidot eivät olisi riittäneetkään tällaiseen saavutukseen. Varmuudella Napoleonin nimi tiedetään liitetyn lauseeseen 1820-luvun puolivälissä, Napoleonin jo poistuttua näyttämöltä. Napoleon vietti vuodet 1815–21 vankina St. Helenan saarella, jossa hän kuolikin.

Napoleon oli kuitenkin matemaattisesti orientoitunut. Jo upseerikoulussa hänen mieliaineensa olivat matematiikka ja historia, ja myöhemmin hän oli vakuuttunut matematiikan tärkeydestä. Ajan johtavat matemaatikot kuten *Laplace, Fourier* ja *Monge* olivat hänen lähipiiriään. Ja sanotaan, että Napoleon oli intohimoinen laskija: ajaessaan keisarina vaunuissaan Pariisissa hän tapasi laskea talojen ikkunoiden lukumääriä – toimi, johon autoilla liikkuvat nykyjohtajat eivät helposti voisikaan ryhtyä. Historiasta toki tiedämme, että Napoleon ei lopulta osannut laskea riittävän hyvin. Sotaretki Venäjälle vuonna 1812 oli katastrofiin päättynyt virhearvio.

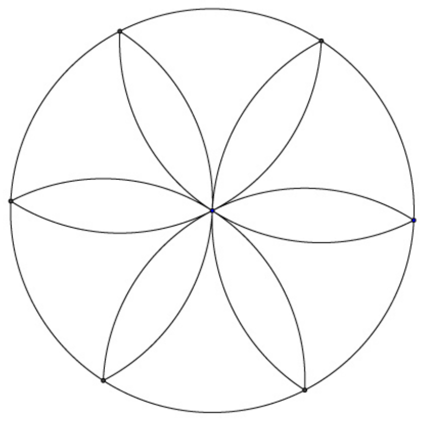
Vuonna 1796 Napoleon Bonaparte oli vielä nuori ja eteenpäin pyrkivä kenraali. Hän sai johtaakseen sotajoukon, jonka oli määrä taistella Italiassa Ranskan tuolloisia vihollisia Itävaltaa ja Sardiniaa vastaan. Sotaretkellä Napoleon tapasi italialaisen matemaatikon *Luigi Mascheronin* (1750–1800). Mascheroni oli kehittänyt uudenlaisen tavan suorittaa geometriset piirustustehtävät, jotka antiikista periytyvän tradition mukaan tuli tehdä kahta työkalua, harppia ja viivoitinta käyttäen. Mascheroni pystyi osoittamaan, että kaikki se, mikä on mahdollista harpilla ja viivoittimella, voidaan tehdä myös pelkällä harpilla (pois lukien tietysti suoran piirtäminen). Mascheroni ei tiennyt, että saman keksinnön oli tehnyt jo tanskalainen *Georg Mohr* (1640–97) yli sata vuotta aikaisemmin. Mohr ja hänen teoksensa *Euclides curiosus* olivat täysin unohtuneet. Mohrin kirja löytyi sattumalta antikvariaatista vasta vuonna 1928. Nykyään puhutaan *Mohrin–Mascheronin geometriasta.* Ja Tanskan lukiolaisten vuotuinen matematiikkakilpailu on *Georg Mohr -kilpailu.*

Mascheronin ja Napoleonin tapaamisella oli seurauksia. Mascheroni omisti vuonna 1797 Paviassa julkaisemansa kirjan *Geometria del compasso* eli *Harpin geometria* Napoleonille, ja Napoleon, palattuaan Pariisiin ennen kirjan ilmestymistä, kiusasi ranskalaisia matemaatikkoystäviään Mascheronilta oppimallaan ongelmalla. Se on sittemmin tullut tunnetuksi *Napoleonin ongelmana*: *On etsittävä pelkästään harppia käyttäen ympyrän sisään piirretyn neliön kärkipisteet.*

Jos Mascheronin teoria pitää paikkansa – ja pitäähän se, niin kuin voidaan esimerkiksi ns. *inversiokuvauksen* ominaisuuksien perusteella osoittaa – tehtävä voidaan varmasti ratkaista. Mutta tässä ei tarvita kaikkia keinoja.

Jos ympyrän säde on r, niin sen sisään piirretyn neliön lävistäjä on ympyrän halkaisija $2r$. Neliön sivun pituus on siis $r\sqrt{2}$, ja tällainen pituus olisi siis saatava harpin kärkien väliin. Jos r ja $r\sqrt{2}$ olisivat suorakulmaisen kolmion kateetit, hypotenuusa olisi Pythagoraan lauseen nojalla $r\sqrt{3}$. Jos toisaalta löydämme suorakulmaisen kolmion, jonka hypotenuusa on $r\sqrt{3}$ ja toinen kateetti r, niin kolmion toinen kateetti antaa ongelman ratkaisun.

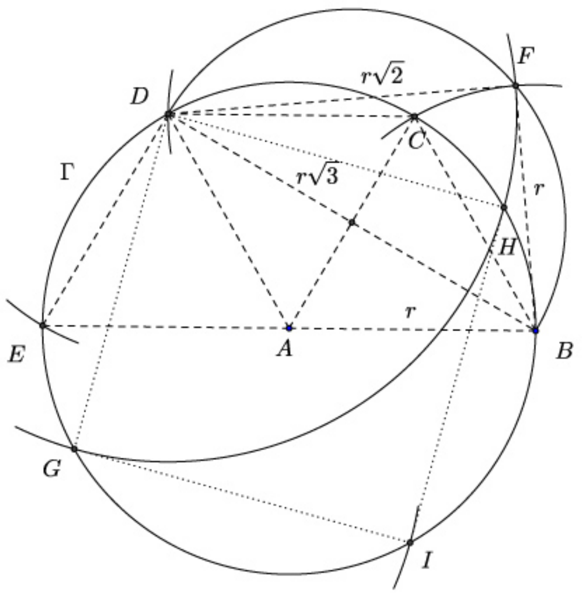
Lähes jokainen harpilla leikitellyt on varmaan joskus piirtänyt "kuusiterälehtisen kukan", joka syntyy, kun piirretään 6 ympyränkaarta, joiden säde on sama kuin alkuperäisen ympyrän, mutta keskipisteet ovat alkuperäisen ympyrän ja piirrettyjen kaarien leikkauspisteitä (kuva 2). Tämä yksinkertainen kuvio on avain Napoleonin ongelman ratkaisuun.



Kuva 2.

Olkoon nyt AB jana, jonka pituus on r ja Γ A-keskinen ja B:n kautta kulkeva ympyrä (kuva 3). Piirretään B keskipisteenä r-säteinen ympyrä, joka leikkaa Γ:n pisteessä C ja edelleen C-keskinen r-säteinen ympyrä, joka leikkaa Γ:n pisteessä D. Koska $AC = AD = r$, kolmiot ABC ja ACD ovat tasasivuisia. Pisteet B ja D ovat janan AC keskinormaalilla, joten $BD \perp AC$. Janan BD pituus on siten kaksi r-sivuisen tasasivuisen kolmion korkeusjanan pituutta, eli $r\sqrt{3}$. Jos nyt piirrämme puoliympyrän, jonka halkaisija on BD ja merkitsemme F:llä puoliympyrän ja B-keskisen r-säteisen ympyrän leikkauspistettä, niin Thaleen lauseen nojalla $\angle BFD$ on suora kulma. DBF on sellainen suorakulmainen kolmio, jonka tarvitsemme, $DF = r\sqrt{2}$ ja D-keskisen F:n kautta kulkevan ympyrän ja Γ:n leikkauspisteet G ja H ovat kaksi halutun neliön kärkeä.

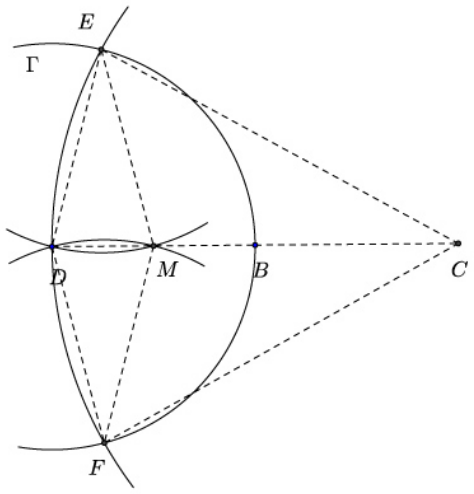
Yksi kärki on tietysti D ja neljäs kärki I löytyy Γ:n ja G-keskisen D:n kautta kulkevan ympyrän leikkauspisteenä.



Kuva 3.

On kuitenkin yksi mutta. Miten piirretään se puoliympyrä, jonka halkaisija on DB? Sitä varten on löydettävä janan DB keskipiste. Yllättävää saattaa olla, että janan puolittaminen pelkällä harpilla vaatii esityökseen janan kaksinkertaistamisen. Kuusiterälehtisen kukan konstruktio kertoo heti, miten jana kaksinkertaistetaan. Jos kuvassa 3 piirretään vielä yksi ympyrä, nyt D keskipisteenä ja pisteen C kautta, niin tämän ja Γ:n toinen leikkauspiste E on sellainen, että $BE = 2 \cdot BA$. Nythän nimittäin myös ADE on tasasivuinen kolmio, joten $\angle BAE = 3 \cdot 60° = 180°$, joten E on suoralla AB ja $AE = BA$, joten $BE = 2 \cdot BA$.

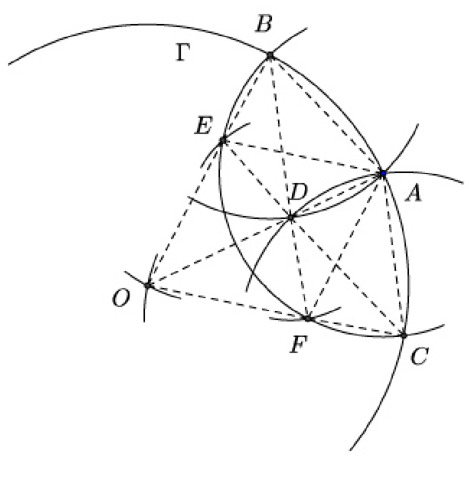
Etsitään nyt pelkin harppitempuin piste, joka on annettujen kahden pisteen, esimerkiksi B ja D, välisen janan keskipiste (kuva 4). Tätä varten piirretään D keskipisteenä B:n kautta ympyrä Γ. Edellisessä kappaleessa selostetulla tavalla löydetään piste C, joka on Γ:n ulkopuolella ja jolle $DC = 2 \cdot DB$. Piirretään nyt C keskipisteenä ympyrä D:n kautta. Se leikkaa Γ:n pisteissä E ja F. Kolmiot CED ja CDF ovat nyt tasakylkisiä kolmioita, ja erityisesti sellaisia kolmioita, joiden kylki on kaksi kertaa niin pitkä kuin kanta. Piirretään vielä E ja F keskipisteinä D:n kautta kulkevat ympyrät. Ne leikkaavat toisensa myös pisteessä M. Piirroksien mukaan pisteet D, M ja C ovat janan EF keskinormaalin pisteitä. M on siis suoralla DC. Mutta myös B on suoralla DC. Tästä seuraa, että tasakylkisillä kolmioilla CED ja EDM on yhteinen kantakulma $\angle EDM$. Kolmiot ovat siis yhdenmuotoisia. Mutta silloinhan pienemmänkin kolmion kanta eli DM on puolet sen kyljestä DE. DE ja DB ovat molemmat Γ:n säteitä, joten DM on puolet DB:stä. Janan keskipiste löytyy pelkkää harppia käyttäen, joten Napoleonin ongelma on ratkaistu.



Kuva 4.

Vaan hetkinen vielä! Janan, jonka pituus on $r\sqrt{3}$, määrittämisessä käytettiin hyväksi pistettä A, alkuperäisen ympyrän keskipistettä. Entäpä jos tehtävässä vastassa olisikin vain ympyräviiva Γ ilman tietoa ympyrän säteestä tai keskipisteestä? Jos löydämme Γ:n keskipisteen vain harppia käyttäen, voimme edelleen ratkaista Napoleonin ongelman.

Voimme tehdä näin (kuva 5). Otetaan jokin Γ:n piste A ja piirretään A-keskinen ympyrä. Sen ja Γ:n leikkauspisteet olkoot B ja C. Piirretään B ja C keskipisteinä ympyrät A:n kautta; ne leikkaavat paitsi A:ssa myös pisteessä D. Sitten piirretään D keskipisteenä ympyrä A:n kautta. Se leikkaa A-keskisen ja B:n ja C:n kautta piirretyn ympyrän pisteissä E ja F. Piirretään vielä E ja F keskipisteinä ympyrät A:n kautta. Ne leikkaavat myös pisteessä O. Nyt O on Γ:n keskipiste!



Kuva 5.

Miksi? Riittää, kun osoitamme, että O on yhtä etäällä Γ:n pisteistä A, B ja C. Osoitetaan ensin, että $OB = OC$. Käytetään taas tietoja keskinormaaleista. Selvästi $AE = AF$, joten A on janan EF keskinormaalin piste. Myös $EO = EA = FA = FO$, joten O on EF:n keskinormaalin piste. Mutta E ja F ovat molemmat D-keskisen ympyrän pisteitä, joten myös D on EF:n keskinormaalin piste. O, D ja A ovat siis kaikki samalla suoralla, joka on EF:n keskinormaali. Mutta sekä A että D ovat yhtä etäällä myös pisteistä B ja C, joten AD on myös janan BC keskinormaali. Koska O on suoralla AD, on oltava $OB = OC$. Jotta todistus tulisi valmiiksi, on vielä osoitettava, että $OA = OB$. Tähän tarvitaan hiukan yhdenmuotoisia kolmioita. Piirrokset on tehty niin, että $EO = EA$ ja $DE = DA$. Kolmiot EOA ja DAE ovat siis tasakylkisiä. Edellä huomattiin jo, että D on janalla OA. Näillä tasakylkisillä kolmioilla on siis yhteinen kulma $\angle EAD$, joten ne ovat yhdenmuotoisia. Näin ollen

$$\frac{OA}{AE} = \frac{EA}{AD}.$$

Mutta $AE = AB$, joten pätee myös

$$\frac{OA}{AB} = \frac{AB}{AD}. \qquad (1)$$

Koska D on janalla AO, kolmioilla OAB ja BAD on yhteinen kulma kärjessä A. Suhdeyhtälöstä (1) seuraa, että kolmiot ovat yhdenmuotoisia (sks). Koska kolmio BAD on tasakylkinen, myös kolmio OAB on tasakylkinen. Siis todellakin $OA = OB$, ja olemme osoittaneet, että harpin avulla löytynyt piste O on Γ:n keskipiste.

Napoleonin ja Mascheronin tapaamisen seuraukset Mascheronille eivät olleet yhtä harmittomia kuin Napoleonille. Yksi Ranskan vallankumouksen kauaskantoisimmista seurauksista oli 1790-luvulla kehitetty metrijärjestelmä. Napoleon värväsi Mascheronin viemään järjestelmää Italiaan, ja Mascheroni matkusti Pariisiin perehtymään tähän uuteen asiaan. Sotaonnen vaihtelut estivät häntä palaamasta kotiseudulleen Milanon tienoille. Pariisissa Mascheroni vilustui, sairastui vakavasti ja kuoli.

Napoleonin lausetta on käsitelty Solmussa aiemminkin

Simo Kivelä: Solmu 2/1997
Geometriakulma: Napoleonin lause
`http://matematiikkalehtisolmu.fi/1997/2/napoleon.html`
(Todistus annetaan harjoitustehtävänä lukijalle, yleistyksiäkin pohdittavaksi.)

Simo Kivelä: Solmu 1/1998
Geometriakulma: Algebran käyttö geometriassa eli Napoleonin lause uudelleen
`http://matematiikkalehtisolmu.fi/1998/1/geomkulma/`

Matti Lehtinen: Matematiikan historia
Ranskan vallankumouksen ajan matematiikkaa
`http://matematiikkalehtisolmu.fi/2000/mathist/pdf/ranska.pdf`

Matematiikan verkkosanakirja, N (niinkuin Napoleon)
`http://matematiikkalehtisolmu.fi/sanakirja/n.html`

Lukiolaisellekin sopivia, avoimia ja maksuttomia matematiikan ja tilastotieteen MOOC-kursseja

- Johdatus yhteiskuntatilastotieteeseen Helsingin yliopistossa. Kurssi on käynnissä maaliskuulle 2016, mukaan pääsee milloin tahansa:

  `http://mooc.helsinki.fi`

- Matriisilaskennan MOOC 2016 Aalto-yliopistossa. Kurssi alkaa 4.1.2016:

  `http://mooc.math.aalto.fi`