ENSIASKELEET EINSTEININ AVARUUSAIKAAN

Matemaattinen johdatus suhteellisuusteorian perusteisiin

OSA 2

Dynamiikka: liikelait, liikemäärä ja energia

(v1)

Teuvo Laurinolli

2015

teuvo.laurinolli@gmail.com

ALKULAUSE

Tämä kirjanen on toinen osa sarjassa **Ensiaskeleet Einsteinin avaruusaikaan**, *Matemaattinen johdatus suhteellisuusteorian perusteisiin*. Ensimmäinen osa[1], jonka alaotsikko on *Kinematiikka: aika, paikka ja liike*, julkaistiin 2014 sähköisenä kirjana Matematiikkalehti Solmun oppimateriaaliosastossa (http://matematiikkalehtisolmu.fi/oppimateriaalit.html). Käsillä oleva toinen osa julkaistaan samalla foorumilla. Sen alaotsikko *Dynamiikka: liikelait, liikemäärä ja energia* kertoo, että suppeaan suhteellisuusteoriaan perehtymistä jatketaan siitä, mihin ensimmäinen osa päättyi.

Kirjoittajan motiivi tähän työhön on ollut kahtalainen: ensiksi syventää omaa ymmärrystään aiheesta ja toiseksi viitoittaa nuorille – ja miksei vanhemmillekin – lukijoille kulkukelpoinen polku erääseen fysiikan kiehtovimmista ajatusrakennelmista. Olen pyrkinyt varustamaan polulle riittävän yksityiskohtaisen ja ymmärrettävän tiekartan, mutta pyrkinyt samalla näyttämään laajemmankin maiseman. Tiekarttaa ei voi laatia ilman matematiikkaa – luonnonlakien kieltä. Tätä varten joudumme jonkin verran laajentamaan matemaattista välineistöämme, vaikka lukion pitkän matematiikan oppimäärään sisältöjä ei juuri tarvitse ylittää. Aiheesta kiinnostunut ja uuden oppimista pelkäämätön lukija voi taivaltaa tämän polun paljon vähäisemmilläkin perustiedoilla, sillä tarvittava matematiikka (vektorilaskenta sekä differentiaali- ja integraalilaskenta) on kerrattu perusteellisesti kirjan alkuosassa. Jos lukija arvelee jo hallitsevansa nämä, hän voi siirtyä suoraan lukuun 4 ja palata tarvittaessa kertaamaan eteen tulevia matemaattisia käsitteitä.

Kiitän Jouko Lahtelaa ja Riitta Laurinollia, jotka ovat pyynnöstäni lukeneet käsikirjoituksen ja esittäneet useita arvokkaita huomautuksia. Kiitän tohtori Ralph F. Baierleinia (Northern Arizona University) sekä professori J. S. Dunhamia (Middlebury College, Vermont), joilta olen saanut hyviä neuvoja kiihtyvän liikkeen relativistisessa käsittelyssä. Kiitän päätoimittaja Anne-Maria Ernvall-Hytöstä mahdollisuudesta julkaista tämä kirjanen matematiikkalehti Solmun verkkosivuilla. Lämmin kiitos Juha Ruokolaiselle, joka on tietoteknisillä taidoillaan nytkin hoitanut MS Wordilla tehdyn käsikirjoitukseni konvertoimisen pdf-muotoon. Lopuksi kiitän Niilo Helanderin säätiötä kirjoitustyöhön myönnetystä apurahasta.

Oulussa, 30.5.2015
Teuvo Laurinolli

[1] Siihen viitataan tekstissä lyhenteellä EEA1.

1. JOHDANTO

Tämän johdantoluvun jälkeen kirja jakautuu neljään perusosaan: matemaattinen valmistelu (Luvut 2 ja 3), klassisen mekaniikan kertaus (Luku 4), suhteellisuusteoreettisen dynamiikan käsittely (Luvut 5 ja 6) ja liitteet (Liitteet 1, 2 ja 3).

Luku 2 (Vektorit) kirjan aloittaa tarpeellisen matemaattisen välineistön esittelyn käymällä melko perusteellisesti läpi tason ja avaruuden vektoreiden teoriaa erityisesti fysikaalisesta näkökulmasta. Luvussa 3 (Differentiaali- ja integraalilaskentaa) tutustutaan toiseen fysiikan kannalta keskeisen tärkeään matematiikan alueeseen. Lähestymistapa on tässäkin luvussa fysikaalinen ja saattaa poiketa – merkintätapojenkin osalta – jonkin verran lukiokurssien esitystavasta, vaikka samasta asiasta onkin kysymys. Lukion pitkän tai lyhyenkin matematiikan opinnot hyvin suorittaneelle lukijalle nämä luvut eivät tuo paljonkaan uutta pohdittavaa, mutta kertauksenomainen selailu ei varmaankaan ole haitaksi. Differentiaali- ja integraalilaskennan luvussa tutustutaan esimerkkien kautta differentiaaliyhtälöihin (fyysikkojen perustyökaluja), joita ei yleensä käsitellä pitkänkään matematiikan lukiokursseissa.

Luvussa 4 (Klassista mekaniikkaa) käydään läpi Newtonin mekaniikan perusasiat, jotka lienevät lukiofysiikan opintoja harjoittaneelle pääosin tuttuja. Esitystapa saattaa tässäkin luvussa poiketa koulukursseista, sillä kahden edellisen luvun esittelemä matemaattinen kalusto (vektorit ja derivaatat) otetaan tässä luvussa tehokäyttöön mekaniikan peruskäsitteiden määrittelyssä ja lakien muotoilussa. Tässä luvussa rakennetaan myös tukeva käsitteellinen pohja seuraavien lukujen suhteellisuusteoreettiselle (relativistiselle) mekaniikalle.

Luvussa 5 (Suppean suhteellisuusteorian kertaus) nimensä mukaisesti kerrataan kirjasarjan osassa 1 läpikäydyt suhteellisuusteorian perusasiat: avaruusaikakoordinaatistot, Lorentz-muunnos, intervalli ja sen invarianssi ja ominaisaika. Luvun viimeisessä kappaleessa 5.4. käydään läpi hieman vaativampi avaruusmatka, jonka analysoimisessa differentiaalilaskentaakin joudutaan hyödyntämään tehokkaasti.

Luvussa 6 (Vektorit ja nelivektorit) päästään viimein kirjan ydinteemaan: suhteellisuusteorian dynamiikkaan. Luvussa 2 esiteltyjä avaruusvektoreita mallina käyttäen määritellään tärkeä nelivektorin käsite, jonka sisäistäminen ei ole aivan helppoa. Siihen kannattaa kuitenkin varata aikaa ja voimia. Luvun sisältöä ei kannata ahmia kiireisesti, vaan pureksia suupala kerrallaan varmistuen, että ymmärrys seuraa mukana. Tässä luvussa myös käsittelyn matemaattinen intensiteetti nousee selvästi. Jotkut päättelyketjut voivat olla aika pitkiä, mutta askeleet on sovitettu lyhyiksi. Niihin kannattaa syventyä rauhassa ja ehkä päivän, parin tai jopa viikon kuluttua uudelleen. Niin kirjoittajakin on usein tehnyt.

Luvun 6 loppupuolella (kappaleessa 6.5.) tehdään jälleen avaruusmatka, mutta hieman eri tavalla kuin kappaleessa 5.4. Luvun 6 viimeisessä kappaleessa 6.6. kirjanen kruunataan johtamalla Einsteinin tunnettu energiayhtälö.

Loppuun sijoitetuissa liitteissä perustellaan tarkemmin muutamia päättelyjä, jotka sujuvuuden parantamiseksi hypättiin tekstissä yli.

Johdannon lopuksi muutama sana käytetyistä merkintätavoista, joissa on pääosin noudatettu vakiintuneita käytäntöjä, jos kohta muutamia poikkeaviakin linjauksia on tehty. Vektorien osalta olen merkinnyt tavallisia taso- tai avaruusvektoreita (ns. kaksi- tai kolmivektoreita) pienillä lihavoiduilla kirjaimilla $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{f}, \ldots$. Tätä linjaa olen noudattanut myös voimavektorin $\boldsymbol{f}$ merkitsemisessä (vastoin yleistä käytäntöä merkitä voimaa kirjaimella $\boldsymbol{F}$). Isot lihavoidut kirjaimet $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{F}$, olen varannut yksinomaan nelivektoreille. Vektoreiden komponentteja olen merkinnyt samalla kirjaimella (indeksoituna) ilman lihavointia, esimerkiksi 3-voima $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)$ tai 4-nopeus $\boldsymbol{U} = (U_0, U_1, U_2, U_3)$. Vektoreiden skalaarituloa olen 3-vektoreilla merkinnyt yleensä $\boldsymbol{ab}$ tai joskus $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ ja 4-vektoreilla[1] $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{U}$.

Kirjan luvut on numeroitu (1-6), samoin niiden kappaleet (esim. 5.2.) ja alakappaleet (esim. 6.1.3.). Tekstissä esiintyvät yhtälöt ja kaavat on numeroitu pääsääntöisesti lukukohtaisesti, vaikka joskus on käytetty yhtälön merkitykseen viittaavia tunnusmerkkejä (esim. (Lvc) tarkoittaa Lorentz-muunnoskaavaa, jossa valon nopeus c esiintyy eksplisiittisesti).

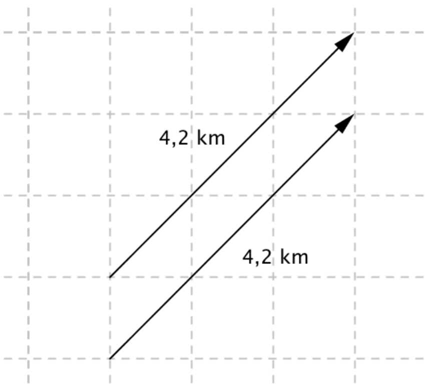
[1] Kaksi-, kolmi- ja nelivektoreita kutsutaan lyhyemmin myös 2-, 3- ja 4-vektoreiksi.

2. VEKTORIT

2.1. Skalaarisuureet ja vektorisuureet

Fysikaalisen *suureen* (aika, massa, pituus, vauhti jne.) arvo saadaan mittaamalla tai laskujen tuloksena. Tulos ilmoitetaan *mittaluvun* ja *yksikkösymbolin* avulla (aika 45,71 s; massa 0,329 kg; pituus 1609 m; vauhti 19,2 m/s). Suureen arvo on siis reaaliluvun ja yksikön *tulo* (esim. massa 0,329 kg on reaaliluvun 0,329 ja yksikön kg tulo. Yksikkö puolestaan on joko *perusyksikkö* tai *johdannaisyksikkö* sen mukaan onko kyseinen suure *perussuure* vai *johdannaissuure*. Tämä luokittelu taas perustuu sopimukseen. Kansainvälisessä *SI-järjestelmässä*[1] pituus, aika ja massa ovat perussuureita ja niiden yksiköt m, s ja kg ovat perusyksiköitä. Vauhti on johdannaissuure ja sen yksikkö m/s on johdannaisyksikkö. Johdannaisyksiköt ovat perusyksikköjen tuloja tai osamääriä. *Luonnollisessa yksikköjärjestelmässä* (ks. EEA1, s. 14) sekä matkan että ajan yksikkönä on metri, jolloin vauhdin yksikkönä on m/m = 1. Vauhti ilmaistaan siis paljaana lukuna.

Edellä mainitut suureet (aika, massa, pituus, vauhti) ovat esimerkkejä *skalaarisuureista*. Usein on kuitenkin välttämätöntä ottaa huomioon myös vaikutuksen suunta. Merellä liikkuessamme ei riitä, että tiedämme veneen kulkeneen lähtöpaikasta matkan, jonka pituus on 12,5 km (skalaarisuure), myös *kulkusuunta* on tunnettava voidaksemme selvittää sijaintimme. Tällöin on hyödyllistä yhdistää matkan pituus ja kulkusuunta yhdeksi suureeksi: *siirtymäksi*. Tällaisia suunnattuja suureita kutsutaan *vektorisuureiksi*.



KUVIO 1. Karttalehdelle piirretyt kahta siirtymää osoittavat nuolet eli *vektorit*. Näiden siirtymien pituudet eli *itseisarvot* (4,2 km) ja *suunnat* (koilliseen) ovat samat. Kyseessä on siis yksi ja sama siirtymä, vaikka lähtöpisteet ovatkin eri paikoissa.

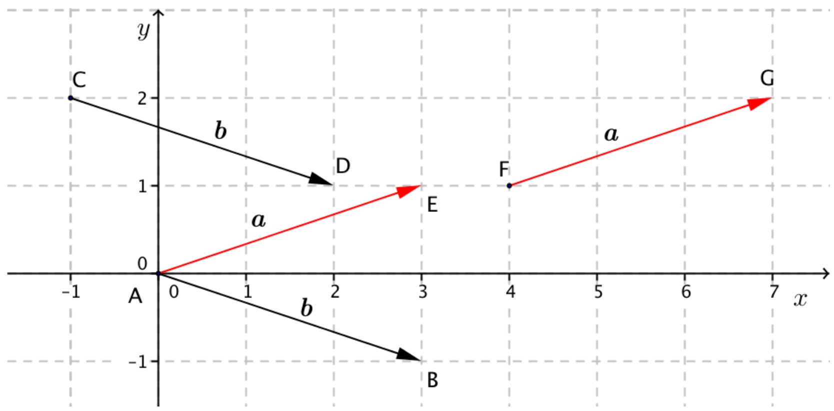
---

[1] *Système international d'unités,* kansainvälinen yksikköjärjestelmä, joka perustuu Ranskassa 1700-luvun lopulla käyttöön otettuun metrijärjestelmään.

Siirtymän lisäksi vektorisuureita ovat mm. *nopeus* (vauhdin ja suunnan yhdistelmä[1]) ja *voima* (jännityksen ja suunnan yhdistelmä). Seuraavissa kappaleissa tutustumme vektorisuureiden matemaattiseen käsittelyyn eli *vektorilaskentaan*.

2.2. Vektorit koordinaatistossa

Tyypillisinä vektorisuureina tarkastelemme siirtymiä[2], joita voidaan esittää suorakulmaisessa *xy*-tasokoordinaatistossa[3] nuolina kuten edellä Kuviossa 1. Samanpituiset ja –suuntaiset nuolet kuvaavat tällöin samaa siirtymää eli *samaa vektoria*. Tiettyä vektoria $\boldsymbol{a}$ kuvaavan nuolen alkupiste voidaan siis sijoittaa mihin tahansa tason pisteeseen.



KUVIO 2. Vektori $\boldsymbol{a}$ sijoitettuna koordinaatiston pisteisiin A ja F. Vektori $\boldsymbol{b}$ sijoitettuna pisteisiin A ja C. Huomaa, että $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$, vaikka $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = \sqrt{10}$.

Erotukseksi lukuarvoja eli *skalaareja* tarkoittavista kirjainsymboleista $a, b, c, a_1, c_2, \ldots$ merkitsemme *vektoreita* lihavoiduilla pienillä kirjaimilla $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b_2}, \ldots$ tai joskus alku- ja loppupisteen avulla $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{FG}, \ldots$. Käsin kirjoitettaessa vektoreita merkitään myös

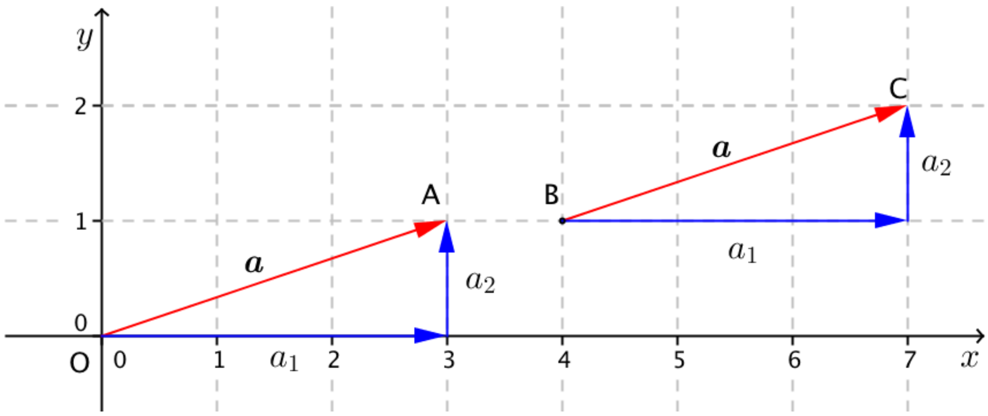
[1] Termiä *nopeus* käytetään arkikielessä skalaarisessa merkityksessä *vauhti*. Näin tehdään usein fysiikassakin (myös tässä kirjassa), jolloin asiayhteydestä käy ilmi kumpi merkitys on kyseessä. Tässä kirjasessa merkitysero osoitetaan myös symbolilla: ”nopeus $\boldsymbol{v}$” tarkoittaa vektoria, mutta ”nopeus v” tarkoittaa skalaaria eli $v = |\boldsymbol{v}|$.
[2] Tarkastelu pätee myös muille vektorisuureille (voima, nopeus, kiihtyvyys jne).
[3] Näin myös kolmiulotteisessa *xyz*-avaruuskoordinaatistossa, jonka visuaalinen esittäminen vaatisi ”rautalankamallia” tai 3D-kuvatekniikkaa.

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots$ eli kirjainsymbolilla, jonka yläpuolella on ”vektoriviiva”. Kuvioon 2 piirretyille vektoreille pätee $\boldsymbol{a} = \overline{AE} = \overline{FG}$ ja $\boldsymbol{b} = \overline{AB} = \overline{CD}$.

Vektorin *pituutta* (koordinaatiston yksiköillä mitattuna) eli *itseisarvoa* merkitään tutuilla itseisarvomerkeillä. Kuviossa 2 on $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = \sqrt{10} \approx 3{,}2$, kuten Pythagoraan lauseen avulla helposti nähdään. Silti $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$, sillä näillä vektoreilla on eri suunta. Vastaavat siirtymät *eivät ole samat*, vaikka ovatkin samanpituiset. Vektoriyhtälö $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ on tosi vain silloin, kun vektoreilla $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ on sama itseisarvo ja sama suunta.

2.3. Vektorin koordinaattiesitys

xy-koordinaatistossa tapahtuvat siirtymät voidaan ajatella suoritetuksi kahdessa vaiheessa kuvion 3 mukaisesti.



KUVIO 3. Vektoria $\boldsymbol{a}$ vastaava siirtymä tason pisteestä O pisteeseen A (tai pisteestä B pisteeseen C) voidaan suorittaa kahdessa vaiheessa. *Vaihe 1*: siirrytään alkupisteestä vaakasuunnassa +3 askelta. *Vaihe 2*: siirrytään pystysuunnassa +1 askelta. Vektoria $\boldsymbol{a}$ vastaava *x*-siirtymä $a_1 = 3$ ja *y*-siirtymä $a_2 = 1$. Vektorin koordinaattiesitys on $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) = (3{,}1)$. Kun vektori $\boldsymbol{a}$ sijoitetaan origoon O, niin sen loppupisteellä A = (3,1) on samat koordinaatit kuin vektorilla.

Tasokoordinaatistossa olevan siirtymävektorin $\boldsymbol{a}$ *koordinaattiesitys* on lukupari (a_1, a_2), joka saadaan jakamalla vektorin osoittama siirtymä koordinaattiakselien suuntaisiin[1] vaiheisiin kuvion 3 esittämällä tavalla. Luku a_1 ilmaisee siirtymän *x*-suunnassa ja luku a_2 ilmaisee siirtymän *y*-suunnassa. Näitä lukuja kutsutaan vektorin $\boldsymbol{a}$ koordinaateiksi eli *skalaarikomponenteiksi*. Jos kahdella vektorilla $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ ja $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ on samat

[1] Koordinaattiakselien suuntia kutsumme kuvaannollisesti *vaaka*- ja *pystysuunnaksi*.

skalaarikomponentit ($a_1 = b_1$ ja $a_2 = b_2$), niin niillä on sama suunta ja sama itseisarvo eli $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

Huomautus 2.3.1. Origoon sijoitetun vektorin skalaarikomponentit

Origoon sijoitetun vektorin skalaarikomponentit ovat samat kuin vektorin loppupisteen koordinaatit.

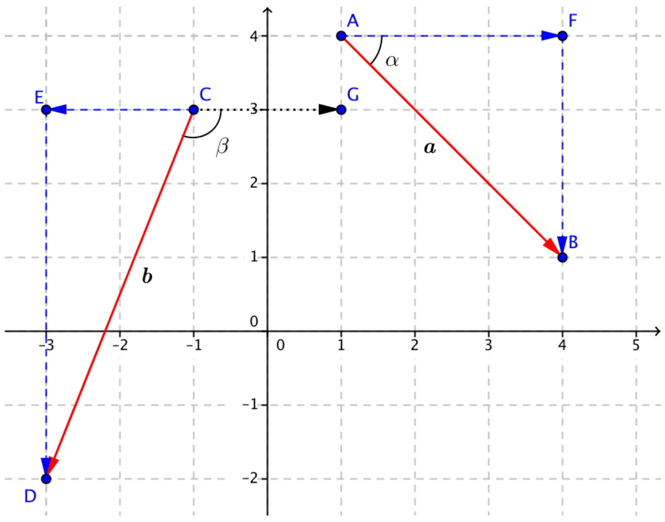
Huomautus 2.3.2. Vektorit avaruuskoordinaatistossa

Myös kolmiulotteisen *xyz*-koordinaatiston pisteiden välinen siirtymä voidaan jakaa akselien suuntaisiin vaiheisiin, jolloin saadaan siirtymää osoittavan avaruusvektorin koordinaattiesitys $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Huomautus 2.3.3. Koordinaattiesitys vektorin täydellisenä kuvauksena

Vektorin koordinaattiesitys on vektorin täydellinen kuvaus, johon sisältyy tieto sekä vektorin pituudesta että suunnasta. Kun koordinaattiesitys tunnetaan, niin siitä voidaan Pythagoraan lauseen avulla laskea vektorin itseisarvo ja trigonometrian avulla vektorin suuntakulma (vektorin ja positiivisen *x*-suunnan välinen kulma). Kääntäen, jos vektorin itseisarvo ja suuntakulma tunnetaan, niin vektorin skalaarikomponentit voidaan laskea. Seuraavat esimerkit ja lauseet valaisevat asiaa.

Esimerkki 2.3.4. Laske alla olevan kuvioon 4 piirrettyjen vektoreiden $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ pituudet ja suuntakulmat.



KUVIO 4. Vektorit $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ sekä niiden skalaarikomponentit. Vektorien itseisarvot eli pituudet saadaan suorakulmaisista kolmioista Pythagoraan lauseen avulla. Vektorien suuntakulmat α ja β (vektorien ja positiivisen *x*-suunnan väliset kulmat) saadaan samoista kolmioista trigonometrian avulla.

Kuviosta näemme, että vektoreiden $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ koordinaattiesitykset ovat

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) = (3, -3)$$
$$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2) = (-2, -5)$$

Huomaa, että skalaarikomponentit a_1, b_1 ja b_2 ovat negatiivisia, koska ne tarkoittavat siirtymää koordinaattiakselin negatiiviseen suuntaan. Pythagoraan lauseen mukaan on

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}2$$

ja

$$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} \approx 5{,}4\ .$$

Kolmiosta ABF saadaan $\tan \alpha = 3/3 = 1$, joten kulman α suuruus[1] $= \tan^{-1}(1) = 45°$. Vektorin $\boldsymbol{a}$ suuntakulmana sille on kuitenkin annettava negatiivinen etumerkki[2] eli $\alpha = -45°$, koska vektorin $\boldsymbol{a}$ suunta saadaan kiertämällä x-akselin suuntaa AF negatiiviseen kiertosuuntaan. Samasta syystä myös vektorin $\boldsymbol{b}$ suuntakulman β etumerkki on miinus. Kolmiosta CDE saadaan kulman DCE tangentiksi $5/2 = 2{,}5$ ja kulman suuruudeksi 68,2°. Näin ollen suuntakulma $\beta = -(180° - 68{,}2°) = -111{,}8°$.

Yhteenveto laskujen tuloksista:

Vektorin $\boldsymbol{a}$ itseisarvo on $|\boldsymbol{a}| = 3\sqrt{2} \approx 4{,}2$ ja suuntakulma $-45°$.

Vektorin $\boldsymbol{b}$ itseisarvo on $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{29} \approx 5{,}4$ ja suuntakulma $-111{,}8°$.

Edellisen esimerkin menetelmä voidaan yleistää lauseeksi.

Lause 2.3.5: Vektorin $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ pituus on $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$ ja suuntakulman α itseisarvo on $|\alpha| = \tan^{-1}(a_2/a_1)$, missä $0 \leq |\alpha| \leq 180°$. Suuntakulman merkki päätellään erikseen sen mukaan, miten vektorin suunta poikkeaa positiivisen x-akselin suunnasta.

Kääntäen pätee: jos vektorin pituus ja suunta tunnetaan, sen komponentit voidaan laskea.

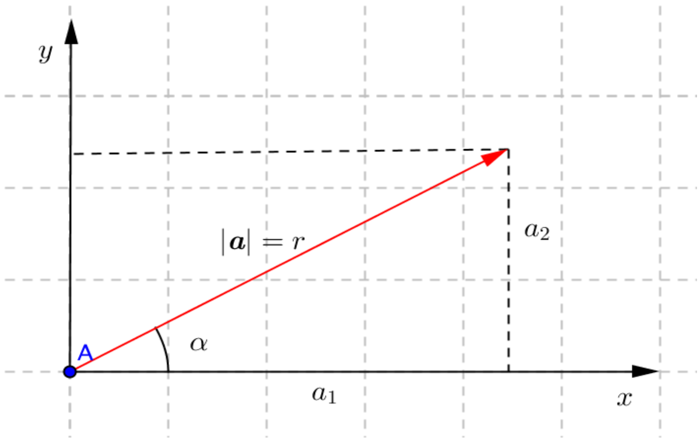
---

[1] Tässä $\tan^{-1}(x)$ tarkoittaa tangenttifunktion käänteisfunktiota $\arctan(x)$ eikä potenssia, kuten merkinnöissä $\tan^2(x)$ tai $\sin^2(x)$.

[2] Tasovektorin suuntakulman α vaihteluväli on sopimuskysymys. Tässä noudatetaan sopimusta $-180° < \alpha \leq 180°$. Yhtä hyvin kelpaisi esim. väli $0° < \alpha \leq 360°$.

Lause 2.3.6: Jos vektorin $\boldsymbol{a}$ pituus on r ja suuntakulma on α, sen skalaarikomponentit ovat $a_1 = r\cos\alpha$ ja $a_2 = r\sin\alpha$.

<u>Todistus:</u> Alla oleva kuvio esittää tilannetta, kun suuntakulma $0° \leq \alpha \leq 90°$.



KUVIO 5. Vektori $\boldsymbol{a}$, jonka pituus on r ja suuntakulma on α.

Kuvioon muodostuu suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusan pituus on $|\boldsymbol{a}| = r$ ja kateettien pituudet ovat a_1 ja a_2. Tästä kolmiosta näemme, että $a_1/r = \cos\alpha$ ja $a_2/r = \sin\alpha$, joten $a_1 = r\cos\alpha$ ja $a_2 = r\sin\alpha$ ja väite on siten todistettu. Lause pätee myös tapauksessa $90° < \alpha \leq 180°$, jolloin $\cos\alpha$ ja a_x ovat negatiivisia. Vastaavat päätelmät voidaan tehdä myös tapauksissa $-90° \leq \alpha < 0°$ ja $-180° < \alpha < -90°$.
MOT.

Huomautus 2.3.7. Nollavektori.
Vektoria, jonka koordinaattiesitys on $(0, 0)$, kutsutaan nollavektoriksi ja merkitään symbolilla $\mathbf{0}$. Nollavektorin alkupiste ja loppupiste yhtyvät eli $\mathbf{0} = (0, 0) = \overline{AA} = \overline{BB}$ jne.

2.4. Vektorialgebraa

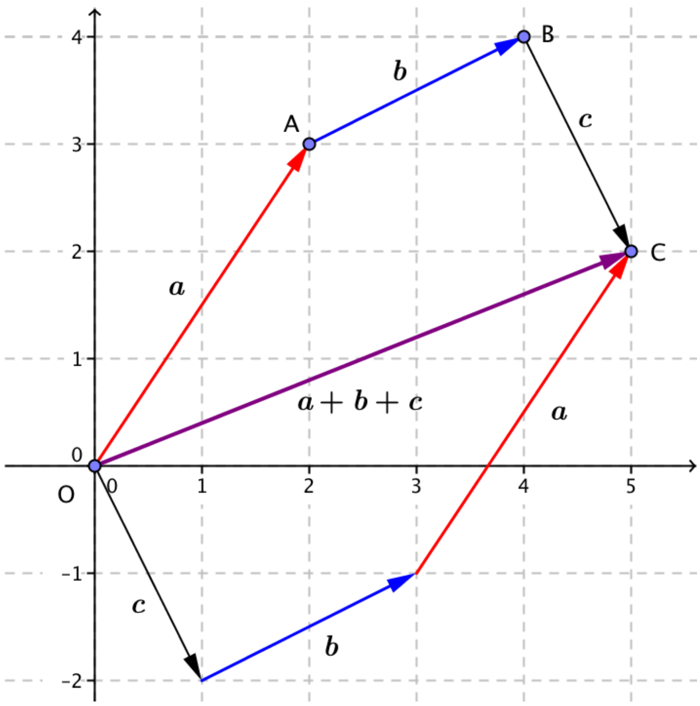
Aritmetiikka käsittelee lukujen laskutoimituksia ja niihin liittyviä sääntöjä. Jos lisäksi käytetään kirjainsymboleita ja -lausekkeita, niin puhumme *algebrasta*. Reaalilukujen aritmetiikka ja algebra on tuttua peruskoulun matematiikan opinnoista.

*Vektorialgebrass*a on kysymys vektoreilla suoritettavista laskutoimituksista, joista tärkeimmät ovat:

a) kahden tai useamman vektorin summa $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \cdots$
b) kahden vektorin erotus $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$
c) luvun ja vektorin tulo $p\boldsymbol{a}$
d) kahden vektorin skalaaritulo $\boldsymbol{ab}$

a) <u>VEKTORISUMMA</u>

Siirtymävektoreiden $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots$ summavektori $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \cdots$ on se kokonaissiirtymä, joka saadaan suorittamalla perätysten yhteenlaskettavien vektoreiden tarkoittamat siirtymät.



KUVIO 6. Summavektori saadaan asettamalla yhteenlaskettavat vektorit perätysten $\boldsymbol{a} = \overline{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overline{AB}$ ja $\boldsymbol{c} = \overline{BC}$. Summavektori $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \overline{OC}$ saadaan yhdistämällä ensimmäisen vektorin alkupiste O viimeisen vektorin loppupisteeseen C. Alempi reitti $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ osoittaa, että vektorien yhteenlasku noudattaa *vaihdantalakia*, sillä summavektori pysyy samana vaikka yhteenlaskettavien vektorien järjestystä vaihdellaan. Myös järjestykset $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ antavat saman summavektorin $\overline{OC}$.

Koordinaattimuodossa annettujen vektorien summa saadaan helposti laskemalla vastaavat koordinaatit yhteen.

Esimerkki 2.4.1. Laske kuvion 6 vektorisumma $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ koordinaattimuodossa.

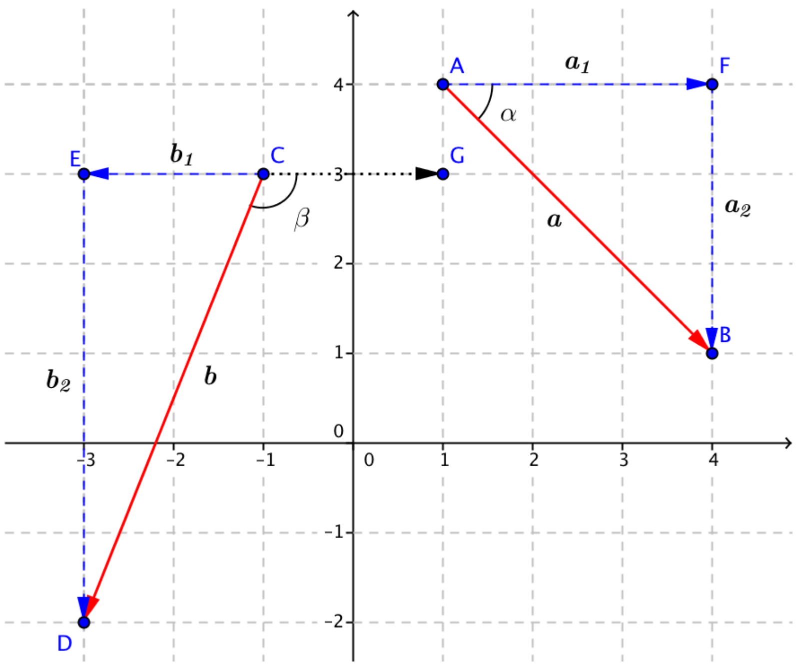
Kuviosta näemme, että $\boldsymbol{a}=(2,3), \boldsymbol{b}=(2,1)$ ja $\boldsymbol{c}=(1,-2)$. Saamme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} &= (2,3)+(2,1)+(1,-2)\\ &= (2+2+1, 3+1-2)\\ &= (5,2)\,.\end{aligned}$$

Tulos täsmää kuvion 6 kanssa.

Huomaa, että koordinaattimuotoa käytettäessä vektorien yhteenlaskun vaihdantalaki seuraa suoraan lukujen yhteenlaskun vaihdantalaista.

Huomautus 2.4.2. Vektorikomponentit.
Vektorin $\boldsymbol{a}$ koordinaattimuoto $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$ ilmaisee, miten vektori $\boldsymbol{a}$ saadaan vaaka- ja pystysuuntaisten vektoreiden summana. Alla oleva kuvio valaisee asiaa. Siinä vektori $\boldsymbol{a}$ on *x*-suuntaisen vektorin $\boldsymbol{a_1}$ ja *y*-suuntaisen vektorin $\boldsymbol{a_2}$ summa eli $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{a_2}$. Akselien suuntaiset vektorit $\boldsymbol{a_1}$ ja $\boldsymbol{a_2}$ ovat vektorin $\boldsymbol{a}$ *vektorikomponentit*. Vektorin $\boldsymbol{b}$ vektorikomponentit ovat $\boldsymbol{b_1}$ ja $\boldsymbol{b_2}$, sillä $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b_1}+\boldsymbol{b_2}$.

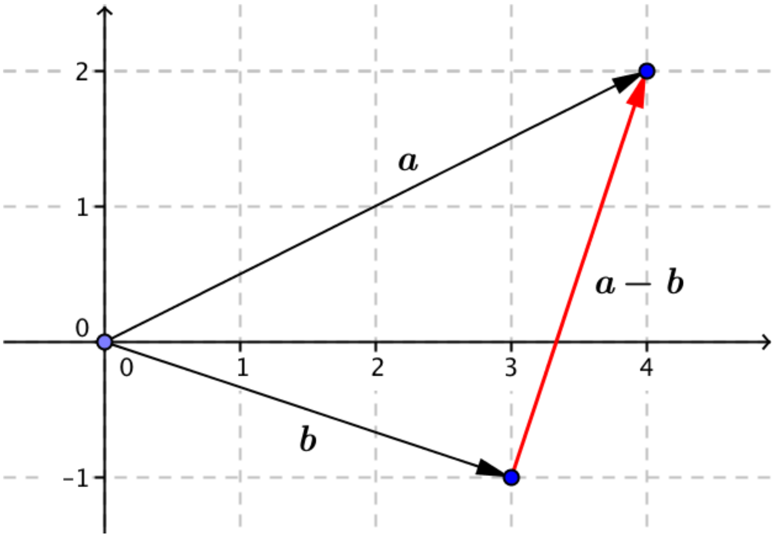


KUVIO 4u. Vektorin $\boldsymbol{a}$ vektorikomponentit ovat $\boldsymbol{a_1}=\overline{AF}$ ja $\boldsymbol{a_2}=\overline{FB}$. Vektorin $\boldsymbol{b}$ vektorikomponentit ovat $\boldsymbol{b_1}=\overline{CE}$ ja $\boldsymbol{b_2}=\overline{ED}$. Tällöin on $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{a_2}$ ja $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b_1}+\boldsymbol{b_2}$.

Huomaa, että skalaarikomponentit ovat vektorikomponenttien pituuksia varustettuna sopivalla etumerkillä.

b) <u>KAHDEN VEKTORIN EROTUS</u>

Vektoreiden $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ erotus $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ on se vektori $\boldsymbol{c}$, joka lisättynä vektoriin $\boldsymbol{b}$ antaa tulokseksi vektorin $\boldsymbol{a}$. Toisin sanoen $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$, jos $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$.

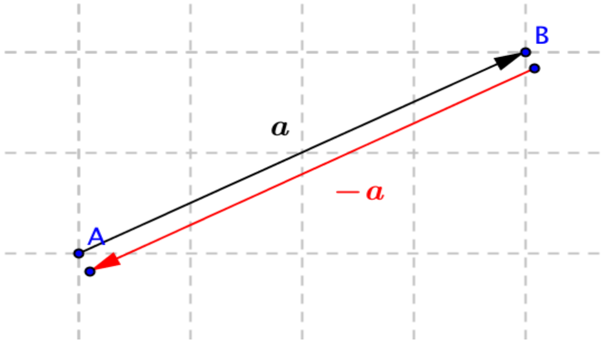


KUVIO 7. Vektoreiden $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ erotusvektori $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ saadaan sijoittamalla vektorit $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ samaan pisteeseen (tässä origoon) ja yhdistämällä vektorin $\boldsymbol{b}$ loppupiste vektorin $\boldsymbol{a}$ loppupisteeseen. Saatu vektori toteuttaa erotusvektorilta vaaditun ehdon $\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}$.

Myös erotusvektori saadaan helposti koordinaattien avulla. Esimerkiksi kuviossa 7 on $\boldsymbol{a}=(4,2)$ ja $\boldsymbol{b}=(3,-1)$, joten $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(4,2)-(3,-1)=(4-3,2+1)=(1,3)$. Tulos täsmää kuvion kanssa.

Huomautus 2.4.3. Nollavektori ja vastavektori.

Nollavektori $\mathbf{0}$ käyttäytyy vektorialgebrassa samoin kuin luku 0 lukujen algebrassa eli $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}-\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$. V*astavektori* $-\boldsymbol{a}$ määritellään yhtälöllä $-\boldsymbol{a}=\mathbf{0}-\boldsymbol{a}$ eli samoin kuin vastaluku määritellään lukualgebrassa. Vektorin ja vastavektorin summa on nollavektori: $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$. Toisin sanoen jos $\boldsymbol{a}=\overline{AB}$, niin $-\boldsymbol{a}=\overline{BA}$ ja $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\overline{AB}+\overline{BA}=\overline{AA}=\mathbf{0}$.



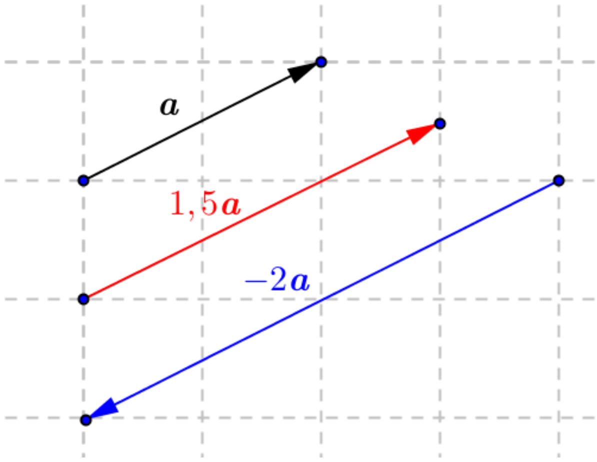
KUVIO 8. Vektori $\boldsymbol{a} = \overline{AB}$ ja sen vastavektori $-\boldsymbol{a} = \overline{BA}$ sijoitettuina perätysten (selvyyden vuoksi hieman erillään). Summavektori $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AA} = \mathbf{0}$.

Vastavektorin koordinaattimuoto saadaan yksinkertaisesti vaihtamalla koordinaatit vastaluvuiksi. Esimerkiksi kuviossa 8 on $\boldsymbol{a} = (4, 2)$ ja $-\boldsymbol{a} = (-4, -2)$.

Huomautus 2.4.4. Erotus summana.
Lukujen a ja b erotus voidaan ajatella summana $a + (-b)$. Piirroksen avulla voi helposti todeta, että sama pätee myös vektoreille eli erotusvektori $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ saadaan lisäämällä edelliseen vektoriin jälkimmäisen vastavektori eli $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$.

c) <u>LUVUN JA VEKTORIN TULO</u>

Positiivisen reaaliluvun p ja vektorin $\boldsymbol{a}$ tulo $p\boldsymbol{a}$ on vektori, jonka suunta on <u>sama</u> kuin vektorilla $\boldsymbol{a}$, mutta pituus on p-kertainen. Negatiivisen reaaliluvun $-p$ ja vektorin $\boldsymbol{a}$ tulo $-p\boldsymbol{a}$ on vektori, jonka suunta on <u>vastakkainen</u> vektorille $\boldsymbol{a}$, mutta pituus on p-kertainen.



KUVIO 9. Vektorit $\boldsymbol{a}$; 1,5$\boldsymbol{a}$ ja $-2\boldsymbol{a}$

Koordinaattimuotoa käytettäessä vektorin kertominen luvulla[1] onnistuu helposti kertomalla vektorin koordinaatit tällä luvulla. Esimerkiksi kuviossa 9 on $\boldsymbol{a} = (2, 1)$, joten $1{,}5\boldsymbol{a} = (3; 1{,}5)$ ja $-2\boldsymbol{a} = (-4, -2)$.

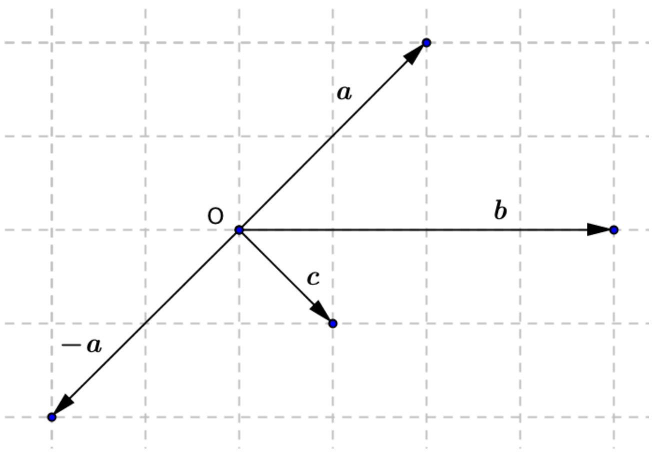
d) <u>KAHDEN VEKTORIN SKALAARITULO</u>

Vektoreiden $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ ja $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ *skalaaritulo* $\boldsymbol{ab}$ on reaaliluku $a_1b_1 + a_2b_2$. Skalaaritulon[2] arvo on siis luku eli skalaari.

Esimerkki 2.4.5. Vektoreiden $\boldsymbol{a} = (3, 1)$ ja $\boldsymbol{b} = (2, -1)$ skalaaritulo on

$$\begin{aligned}\boldsymbol{ab} &= a_1b_1 + a_2b_2 \\ &= 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \\ &= 6 - 1 \\ &= 5\,.\end{aligned}$$

Esimerkki 2.4.6. Laske alla olevassa kuviossa 10 vektorin $\boldsymbol{a}$ skalaaritulot muiden kuvioon piirrettyjen vektoreiden kanssa.



KUVIO 10. Koordinaattiruudukossa samaan pisteeseen O sijoitetut vektorit $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ ja $-\boldsymbol{a}$. Ruudun sivun pituus = 1.

Luemme kuviosta 10 siihen piirrettyjen vektoreiden koordinaattiesitykset

---

[1] Luvulla kertomista sanotaan myös *skalaarilla* kertomiseksi.
[2] Kahden vektorin skalaaritulosta käytetään myös nimityksiä *pistetulo* tai *sisätulo*. Skalaaritulosta käytetään (tässäkin kirjassa) myös merkintää $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$. Huomaa, että skalaaritulo on *eri asia* kuin skalaarilla kertominen. Edellisessä molemmat tekijät ovat vektoreita ja tulos on luku. Jälkimmäisessä tekijöinä ovat luku ja vektori ja tulos on vektori.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= (a_1, a_2) = (2, 2), \\ -\boldsymbol{a} &= (-2, -2), \\ \boldsymbol{b} &= (b_1, b_2) = (4, 0), \\ \boldsymbol{c} &= (c_1, c_2) = (1, -1). \end{aligned}$$

Niiden avulla saamme skalaaritulot

$$\boldsymbol{ab} = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 8\,,$$

$$\boldsymbol{ac} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 0\,,$$

$$\boldsymbol{a}(-\boldsymbol{a}) = 2 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) = -8\,.$$

Esimerkki 2.4.7. Laske kuviossa 10 olevien vektoreiden skalaaritulot itsensä kanssa.

Vektorin skalaarituloa itsensä kanssa merkitään usein tutulla neliömerkinnällä.

$$\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{aa} = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 8\,,$$

$$\boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{bb} = 4 \cdot 4 + 0 \cdot 0 = 16\,,$$

$$\boldsymbol{c}^2 = \boldsymbol{cc} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 2\,,$$

$$(-\boldsymbol{a})^2 = (-\boldsymbol{a})(-\boldsymbol{a}) = (-2) \cdot (-2) + (-2) \cdot (-2) = 8.$$

Edellisen esimerkin yleistyksenä voimme todistaa seuraavan tuloksen:

Lause 2.4.8: Vektorin $\boldsymbol{a}$ skalaaritulo itsensä kanssa on sama kuin vektorin itseisarvon neliö eli $\boldsymbol{a}^2 = |\boldsymbol{a}|^2$ tai myös $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2}$.

Todistus: Jos $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$, niin skalaaritulon määritelmän ja lauseen 2.3.1 perusteella on

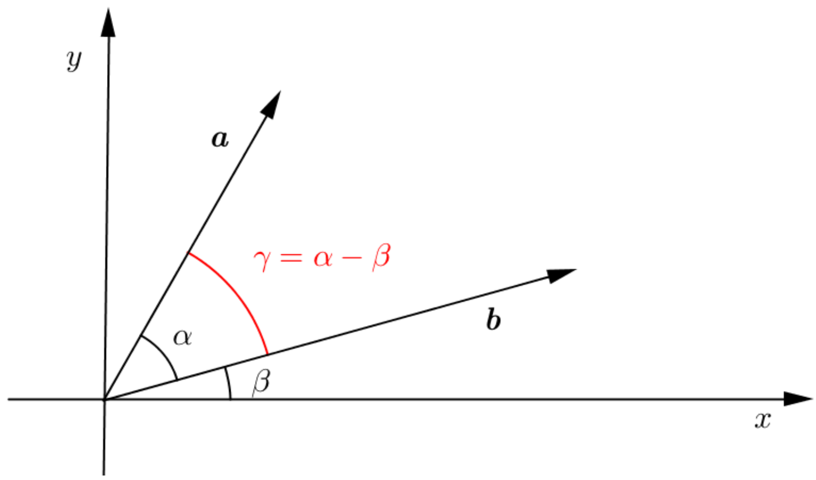
$$\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{aa} = a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 = {a_1}^2 + {a_2}^2 = |\boldsymbol{a}|^2.$$

MOT.

Skalaaritulon hyödyllisin ominaisuus kiteytyy seuraavaan tulokseen.

Lause 2.4.9: Vektorien $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ skalaaritulo saadaan kertomalla keskenään vektorien pituudet sekä niiden välisen kulman γ kosini. Toisin sanoen $\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\gamma$.

Todistus: Alla oleva kuvio havainnollistaa tilannetta.



KUVIO 11. Origoon sijoitetut vektorit $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$, joiden pituudet ovat $|\boldsymbol{a}|$ ja $|\boldsymbol{b}|$ ja suuntakulmat α ja β. Vektoreiden välinen kulma on $\gamma = \alpha - \beta$.

Lauseen 2.3.2 perusteella vektoreiden $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ komponentit voidaan esittää vektorien pituuksien ja suuntakulmien avulla seuraavasti:

$$a_1 = |\boldsymbol{a}| \cos \alpha \;\; ; \quad a_2 = |\boldsymbol{a}| \sin \alpha$$
$$b_1 = |\boldsymbol{b}| \cos \beta \;\; ; \quad b_2 = |\boldsymbol{b}| \sin \beta$$

Silloin näiden vektoreiden skalaaritulo on määritelmän mukaan

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{ab} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \\
&= |\boldsymbol{a}| \cos \alpha \cdot |\boldsymbol{b}| \cos \beta + |\boldsymbol{a}| \sin \alpha \cdot |\boldsymbol{b}| \sin \beta \\
&= |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\
&= |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos(\alpha - \beta) \qquad\qquad [\text{koska } \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta] \\
&= |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos \gamma \, .
\end{aligned}$$

MOT.

Edellisestä seuraa välittömästi:

Seurauslause 2.4.10: Vektorien $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ välisen kulman γ kosini on

$$\cos \gamma = \frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \text{skalaaritulo jaettuna pituuksien tulolla.}$$

Esimerkki 2.4.11. Laske kuvioon 7 piirrettyjen vektoreiden $\boldsymbol{a} = (4,2)$ ja $\boldsymbol{b} = (3, -1)$ välinen kulma γ.

Nyt on

$$\boldsymbol{ab} = 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) = 10\,,$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\,,$$

$$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}\,,$$

joten seurauslauseen 2.4.10 perusteella saamme

$$\cos\gamma = \frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{10}{2\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{10}{2\sqrt{50}} = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ja edelleen (laskimella tai geometrisella päättelyllä)

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45°\,.$$

Seuraava lause osoittaa, että vektoreiden skalaaritulo noudattaa tavallisia lukujen kertolaskun sääntöjä. Olennaisena erona on se, että lukuja kerrottaessa tuloskin on luku, mutta vektoreita kerrottaessa[1] *tulos ei ole vektori* vaan luku.

Lause 2.4.12: Vektorien skalaaritulo noudattaa seuraavia laskulakeja:

(i) $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$

(ii) $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac}$

(iii) $\boldsymbol{a0} = \boldsymbol{0a} = 0$

(iv) Jos $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, niin $\boldsymbol{ab} = 0$.

(v) Jos $\boldsymbol{ab} = 0$, niin joko $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ tai $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ tai $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

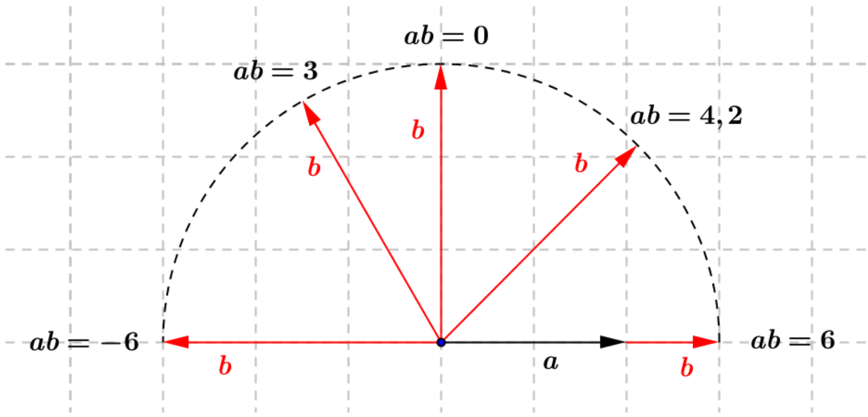
<u>Todistus:</u> Kohdat (i)-(iii) seuraavat suoraan vastaavista lukujen kertolaskua koskevista säännöistä, kun vektorit esitetään koordinaattimuodossa. Kohta (iv) seuraa lauseesta 2.3.4, koska $\cos 90° = 0$. Kohta (v) seuraa kohdista (iii) ja (iv).

MOT.

[1] Vektorialgebrassa esiintyy myös toisenlainen vektorien kertolasku $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, jossa tulos onkin vektori. Tätä laskutoimitusta – *vektorituloa* eli *ristituloa* – emme tässä kirjasessa tarvitse.

Huomautus 2.4.13. Vakiopituisten vektoreiden skalaaritulon vaihteluväli.

Olettakaamme, että kahden vektorin $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ pituudet pidetään vakioina $|\boldsymbol{a}| = 2$ ja $|\boldsymbol{b}| = 3$, mutta niiden välistä kulmaa γ vaihdellaan välillä $0° \leq \gamma \leq 180°$. Tällöin $\cos\gamma$ vaihtelee välillä $-1 \leq \cos\gamma \leq 1$ ja skalaaritulon $\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\gamma$ arvo vaihtelee välillä $-6 \leq \boldsymbol{ab} \leq 6$. Skalaaritulon suurin arvo $\boldsymbol{ab} = 6$ saadaan, kun $\gamma = 0°$ (vektorien ollessa samansuuntaiset) ja pienin arvo $\boldsymbol{ab} = -6$, kun $\gamma = 180°$ (vektorien ollessa vastakkaissuuntaiset). Arvo $\boldsymbol{ab} = 0$ saadaan, kun $\gamma = 90°$ (vektorien ollessa kohtisuorassa). Alla oleva kuvio 12 havainnollistaa asiaa.



KUVIO 12. Vakiopituiset vektorit $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$. Edellisen pituus on 2 ja jälkimmäisen 3. Vektori $\boldsymbol{a}$ pysyy paikallaan. Vektori $\boldsymbol{b}$ on alkuasennossa samansuuntainen kuin $\boldsymbol{a}$, mutta kiertyy positiiviseen kiertosuuntaan, kunnes on loppuasennossa $\boldsymbol{a}$:lle vastakkaissuuntainen. Kierron aikana skalaaritulon $\boldsymbol{ab}$ arvo pienenee arvosta 6 ja arvoon –6. Samoin kävisi, jos $\boldsymbol{b}$ kiertyisi negatiiviseen kiertosuuntaan.

Huomautus 2.4.14. Skalaaritulo fysiikassa.

Vektorien skalaaritulo saattaa tuntua keinotekoisesti määritellyltä laskutoimitukselta, mutta fyysikot ovat eri mieltä. Seuraavassa esimerkissä käsittelemme erästä skalaaritulon fysikaalista sovellusta.

Esimerkki 2.4.15. Voiman tekemä siirtotyö.

Voiman tekemä *siirtotyö* määritellään voiman suuruuden ja siirtymän pituuden tulona kuvion 13 esittämässä tilanteessa, jossa voimavektori[1] $\boldsymbol{f}$ ja siirtymävektori $\boldsymbol{s}$ ovat samansuuntaiset.

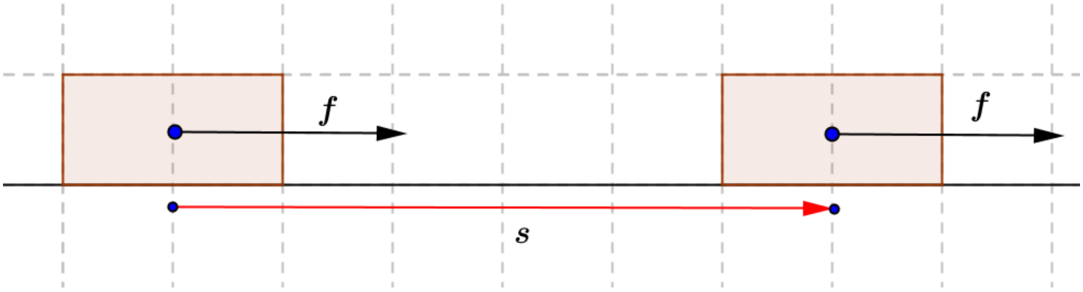
---

[1] Kirjallisuudessa voimavektoria merkitään yleensä symbolilla $\boldsymbol{F}$, jonka varaamme tässä kirjassa ns. nelivoiman (ks. kappale 6.6.2.) symboliksi.

Tällöin voiman suuruus on $|\boldsymbol{f}|$ ja siirtymän pituus[1] on $|\boldsymbol{s}|$ ja voiman tekemä siirtotyö on $W = |\boldsymbol{f}| \cdot |\boldsymbol{s}|$. Huomaamme, että tämä siirtotyö on sama kuin voimavektorin $\boldsymbol{f}$ ja siirtymävektorin $\boldsymbol{s}$ skalaaritulo eli $W = \boldsymbol{fs}$, sillä vektoreiden välinen kulma $\gamma = 0°$, joten lauseen 2.4.4 nojalla niiden skalaaritulo on

$$\boldsymbol{fs} = |\boldsymbol{f}| \cdot |\boldsymbol{s}| \cdot \cos\gamma = |\boldsymbol{f}| \cdot |\boldsymbol{s}| \cdot \cos 0° = |\boldsymbol{f}| \cdot |\boldsymbol{s}| \cdot 1 = |\boldsymbol{f}| \cdot |\boldsymbol{s}| = W.$$

Työ W on siis massan kaltainen skalaarisuure, jolla ei ole suuntaa vaan ainoastaan suuruus. Työn yksikkö on voiman yksikkö kertaa siirtymän yksikkö eli SI-järjestelmässä Nm, jolle on annettu oma nimi *joule* (J).

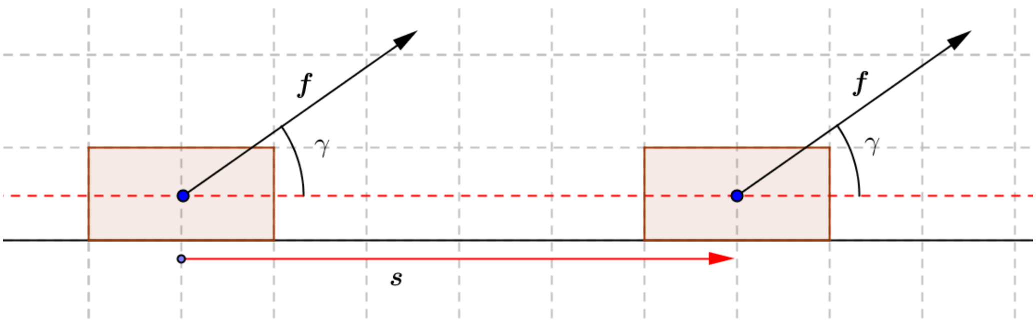


KUVIO 13. Voimavektori $\boldsymbol{f}$ tekee työtä siirtämällä vaakasuoralla alustalla olevaa kappaletta siirtymävektorin $\boldsymbol{s}$ osoittaman matkan. Koska voimavektori ja siirtymävektori ovat samansuuntaiset, niin tehty työ $W = |\boldsymbol{f}| \cdot |\boldsymbol{s}| = \boldsymbol{fs}$.

Alla olevan kuvion 14 esittämässä yleisessä tilanteessa voimavektori $\boldsymbol{f}$ ja siirtymävektori $\boldsymbol{s}$ ovat erisuuntaiset, mutta voiman tekemä työ saadaan nytkin skalaaritulona $W = \boldsymbol{fs}$, joka on

$$W = \boldsymbol{fs} = |\boldsymbol{f}| \cdot |\boldsymbol{s}| \cdot \cos\gamma,$$

missä γ on vektoreiden $\boldsymbol{f}$ ja $\boldsymbol{s}$ välinen kulma.



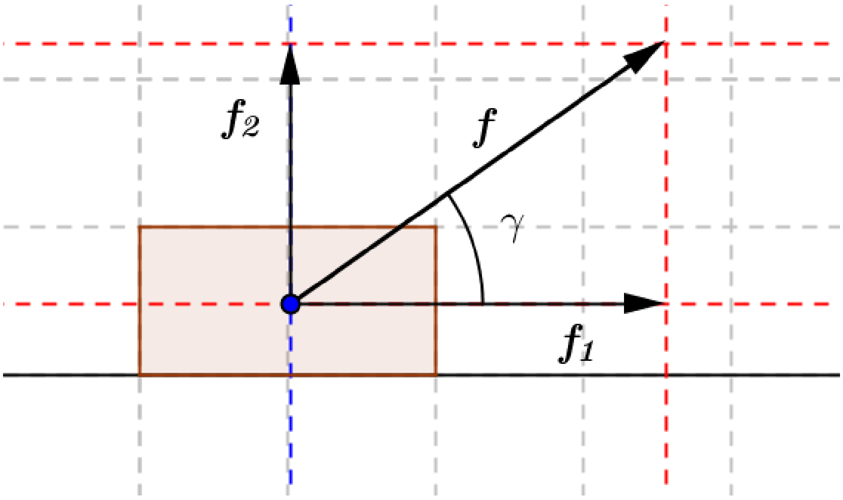
KUVIO 14. Voimavektori $\boldsymbol{f}$ tekee työtä siirtämällä vaakasuoralla alustalla olevaa kappaletta siirtymävektorin $\boldsymbol{s}$ osoittaman matkan. Tehty työ W on nytkin voimavektorin ja siirtymävektorin skalaaritulo eli $W = \boldsymbol{fs} = |\boldsymbol{f}| \cdot |\boldsymbol{s}| \cdot \cos\gamma$.

[1] Vektorin itseisarvoa kutsutaan usein – kuten tässäkin – *suuruudeksi* tai *pituudeksi*.

Toisaalta työtä tekevä voima $\boldsymbol{f}$ voidaan jakaa vektorikomponentteihin $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f_1} + \boldsymbol{f_2}$ (ks. kuvio 15 alla), missä $\boldsymbol{f_1}$ on siirtymän suuntainen ja $\boldsymbol{f_2}$ on siirtymää vastaan kohtisuora komponentti. Tällöin voiman $\boldsymbol{f}$ tekemä siirtotyö on

$$
\begin{aligned}
W &= \boldsymbol{fs} \\
&= (\boldsymbol{f_1} + \boldsymbol{f_2})\boldsymbol{s} && [\text{koska } \boldsymbol{f} = \boldsymbol{f_1} + \boldsymbol{f_2}] \\
&= \boldsymbol{f_1 s} + \boldsymbol{f_2 s} && [\text{skalaaritulon laskulakien perusteella}] \\
&= \boldsymbol{f_1 s} + 0 && [\boldsymbol{f_2 s} = 0, \text{ koska vektorit } \boldsymbol{f_2} \text{ ja } \boldsymbol{s} \text{ ovat kohtisuorassa}] \\
&= |\boldsymbol{f_1}| \cdot |\boldsymbol{s}| && [\text{koska vektorit } \boldsymbol{f_1} \text{ ja } \boldsymbol{s} \text{ ovat samansuuntaiset}]
\end{aligned}
$$

Toteamme, että kuvion 14 tilanteessa voiman $\boldsymbol{f}$ tekemä siirtotyö on sama kuin sen siirtymän suuntaisen komponentin $\boldsymbol{f_1}$ tekemä työ. Siirtymää vastaan kohtisuora komponentti $\boldsymbol{f_2}$ ei siis tee lainkaan työtä.



KUVIO 15. Voima $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f_1} + \boldsymbol{f}$ ja sen vektorikomponentit $\boldsymbol{f_1}$ ja $\boldsymbol{f_2}$. Vain komponentti $\boldsymbol{f_1}$ tekee siirtotyötä, kun kappale siirtyy vaakasuunnassa.

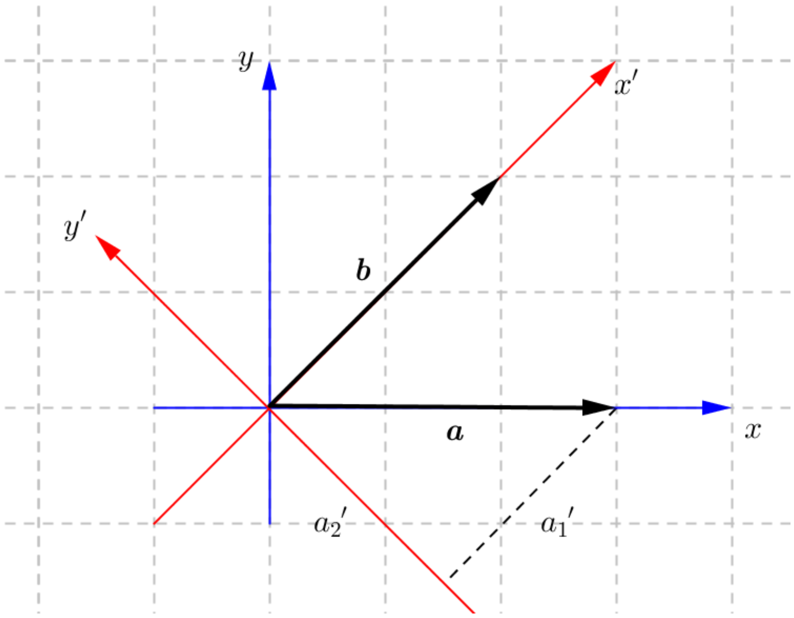
Yhteenvetona voimme todeta, että kun voima f siirtää kappaletta siirtymävektorin $\boldsymbol{s}$ verran, niin voiman tekemä siirtotyö on voimavektorin ja siirtymävektorin skalaaritulo, joka on sama kuin voiman f siirtymän suuntaisen komponentin $\boldsymbol{f_1}$ tekemä työ. Toisin sanoen

$$W = \boldsymbol{fs} = \boldsymbol{f_1 s} = |\boldsymbol{f_1}| \cdot |\boldsymbol{s}|\ .$$

2.5. Vektorit koordinaattimuunnoksissa

Tämän kirjan edellisen osan (EEA1) luvussa 6 tarkastelimme koordinaattimuunnoksia toistensa suhteen *levossa* olevien avaruusaikakoordinaatistojen $\mathrm{K}(t, x, y, z)$ ja $\mathrm{K}'(t', x', y', z')$ välillä. Osoitimme, että ns. *euklidinen intervalli* (kahden pisteen välinen etäisyys[1]) säilyy muuttumattomana eli *invarianttina* siirryttäessä koordinaatistosta K koordinaatistoon K'. Tämä invarianssi pätee myös kahden vektorin $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ skalaaritulolle $\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\gamma$. Ovathan pituudet $|\boldsymbol{a}|$ ja $|\boldsymbol{b}|$ juuri vektoreiden alku- ja loppupisteiden välisiä euklidisia intervalleja ja siten invariantteja. Lisäksi vektorien välinen kulma γ säilyy muuttumattomana. Skalaaritulot ovat siis invariantteja näissä muunnoksissa, vaikka vektorien koordinaatit $a_x, a_y, \ldots$ muuttuvatkin[2].

Esimerkki 2.5.1. Vektoreilla $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ on koordinaatistossa K esitykset $\boldsymbol{a} = (3, 0)$ ja $\boldsymbol{b} = (2, 2)$. Koordinaatisto K' saadaan kiertämällä K:ta 45° positiiviseen kiertosuuntaan. Laske vektoreiden $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ koordinaattiesitykset K':ssa sekä niiden skalaaritulo K':ssa.



KUVIO 16. Vektoreiden $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ koordinaatit kierretyssä koordinaatistossa $\mathrm{K}'(x', y')$ ovat $a_1' = 3/\sqrt{2}$, $a_2{}' = -3/\sqrt{2}$ sekä $b_1' = 2\sqrt{2}$, $b_2{}' = 0$.

[1] Tarkkaan ottaen määrittelimme (EEA1, s. 19) termin *euklidinen intervalli* tarkoittamaan pisteiden välisen etäisyyden *neliötä*, mutta yhtä hyvin se voi tarkoittaa itse etäisyyttä. Molemmissa tapauksissa euklidinen intervalli säilyy invarianttina koordinaattimuunnoksissa levossa olevien koordinaatistojen välillä.

[2] Aikakoordinaatit ovat tässä yhteydessä epäolennaisia, koska näissä koordinaatistoissa on sama aika ($t = t'$). Euklidisen intervallin invarianssi liittyy vain paikkakoordinaatteihin.

Kuviosta 16 näemme, että' vektoreiden $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ koordinaattiesitykset ovat

koordinaatistossa $\mathrm{K}(x, y)$: $\quad \boldsymbol{a} = (3, 0)$ ja $\boldsymbol{b} = (2, 2)$

ja

koordinaatistossa $\mathrm{K}(x', y')$: $\quad \boldsymbol{a} = (3/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2})$ ja $\boldsymbol{b} = (2\sqrt{2}, 0)$.

Vektoreiden skalaaritulo on laskettuna

K-koordinaattien avulla: $\quad \boldsymbol{ab} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 2 = 6$

ja

K'-koordinaattien avulla: $\quad \boldsymbol{ab} = (3/\sqrt{2}) \cdot 2\sqrt{2} + (-3/\sqrt{2}) \cdot 0 = 6.$

eli molemmissa tapauksissa sama.

Huomautus 2.5.2. Skalaaritulon invarianssista.
Edellisessä esimerkissä tarkistettiin pistokoeluonteisesti skalaaritulon säilyminen kierrettäessä *xy*-tasokoordinaatistoa 45°. Vastaavat laskelmat voidaan suorittaa yleisille vektoreille $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ ja $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ sekä yleiselle kiertokulmalle φ. Tulos on sama eli skalaaritulolle $\boldsymbol{ab}$ saadaan sama arvo laskettiinpa se kumpien tahansa koordinaattien avulla. Näinhän täytyy välttämättä ollakin. Vaikka vektoreiden skalaaritulo $\boldsymbol{ab}$ määriteltiinkin aluksi (kappale 2.4. kohta d) koordinaattien avulla $\boldsymbol{ab} = a_1 b_1 + a_2 b_2$, niin todistimme pian (Lause 2.4.9), että $\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\gamma$, joka osoittaa skalaaritulon olevan *riippumaton* koordinaateista. Vektorien pituudet ja niiden välinen kulma määräävät skalaaritulon arvon. Riippuvuus koordinaateista on näennäistä.

Vektorien pituudet ja niiden keskinäinen asento edustavat fysikaalisen todellisuuden kohteiden ominaisuuksia. Koordinaatistot ovat näiden ominaisuuksien tutkimista varten sovittuja matemaattisia mittausjärjestelmiä – fysikaalisen todellisuuden päälle asetettuja ruudukkoja. Invarianssissa on kyse siitä, että ruudukon vaihtaminen toiseen (siirtyminen toiseen koordinaatistoon) ei muuta tutkittavien kohteiden ominaisuuksia. Esimerkissä 2.4.15 laskimme skalaaritulolla siirtotyön $W = \boldsymbol{fs}$, jonka voima $\boldsymbol{f}$ tekee vetäessään kappaletta siirtymän ***s*** verran. Tämä skalaaritulo ilmaisee fysikaalisen realiteetin, joka ei riipu voimavektorin ja siirtymävektorin esittämiseen käytetyistä koordinaateista.

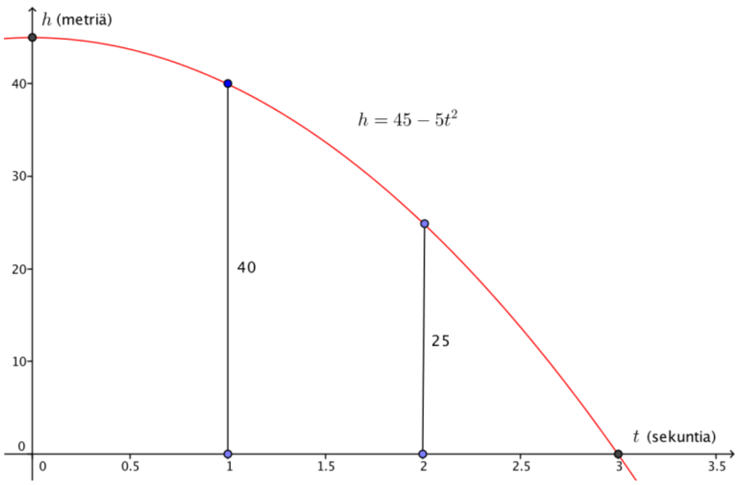
3. DIFFERENTIAALI- JA INTEGRAALILASKENTAA

Tässä luvussa käsittelemme *differentiaalilaskentaa* – matematiikan alaa, joka on osoittautunut hyödylliseksi fysikaalisten ilmiöiden ja niitä koskevien lakien tutkimisessa. Käsittely pysyy (vektorifunktioita lukuun ottamatta) lukion matematiikan oppimäärän puitteissa, vaikka merkintätavat saattavat poiketa jonkin verran koulukursseissa käytetyistä.

3.1. Derivaatta

Fysiikan lait ilmaistaan suureiden välisinä riippuvuuksina. Riippuvuutta kuvataan matemaattisesti yhtälöllä, joka osoittaa miten tietyn suureen *y* (*riippuva muuttuja*) arvo riippuu jonkin muun suureen *x* (*riippumaton muuttuja*) arvosta.

Esimerkki 3.1.1. Vasara putoaa 45 m korkeudella olevalta rakennustelineeltä. *Putoamislain* mukaan vasaran etäisyys h maanpinnasta riippuu putoamishetkestä kuluneesta ajasta t yhtälön $h = 45 - 5t^2$ mukaisesti[1]. Lain perusteella voidaan laskea, että etäisyys h on yhden sekunnin kuluttua $45 - 5 \cdot 1^2 = 40$ metriä, kahden sekunnin kuluttua $45 - 5 \cdot 2^2 = 25$ metriä ja kolmen sekunnin kuluttua $45 - 5 \cdot 3^2 = 0$ metriä. Etäisyyden riippuvuus ajasta voidaan esittää myös graafisena kuvaajana (Kuvio 17).



KUVIO 17. Etäisyys h riippuu ajasta t yhtälön $h = 45 - 5t^2$ mukaisesti.

[1] Putouslain mukaan on $h = 45 - gt^2/2$, missä vakio g on putousliikkeen kiihtyvyys. Tässä käytämme likiarvoa $g \approx 10\ \mathrm{m/s^2}$

Muuttujan y riippuvuus muuttujasta x osoitetaan matemaattisesti merkinnällä $y = y(x)$, missä $y(x)$ tarkoittaa muuttujan x lauseketta. Edellisessä esimerkissä siis $h = h(t)$ ja $h(t) = 45 - 5t^2$.

Jos muuttuja y riippuu muuttujasta x eli $y = y(x)$, niin tätä riippuvuutta on hyödyllistä tutkia *derivaatan* avulla. Derivaatta kuvaa y:n *muutosta* suhteessa x:n *muutokseen*. Jos muuttujan x arvo muuttuu määrällä Δx ja sen seurauksena muuttujan y arvo muuttuu[1] määrällä Δy, niin derivaatta on *likimäärin* sama kuin *muutossuhde* $\Delta y/\Delta x$. Tämä pätee sitä tarkemmin, mitä pienempi Δx on. Tarkkaan ottaen derivaatta on se *raja-arvo*, jota muutossuhde $\Delta y/\Delta x$ lähenee, kun muutosta Δx pienennetään kohti nollaa. Tätä raja-arvoa (eli derivaattaa) merkitään yleisesti suhteena dy/dx, missä dx ajatellaan äärettömän pieneksi x:n muutokseksi ja dy sitä vastaavaksi (myös äärettömän pieneksi) y:n muutokseksi. Näitä äärettömän pieniä muutoksia kutsutaan myös *infinitesimaaleiksi* tai *differentiaaleiksi*[2].

Määritelmä 3.1.1. Derivaatta.

Olkoon $y = y(x)$. Jos muuttujan x arvon muutosta Δx vastaa muuttujan y arvon muutos Δy niin y:n *derivaatta* dy/dx on se raja-arvo, jota näiden muutosten osamäärä $\Delta y/\Delta x$ lähenee, kun Δx lähenee nollaa. Toisin sanoen:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{dy}{dx}, \text{kun } \Delta x \to 0$$

tai toisin merkittynä

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{tai vaihtoehtoisesti} \quad dy/dx = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta y/\Delta x).$$

Huomautus 3.1.1. Derivaatan merkintätavoista 1.

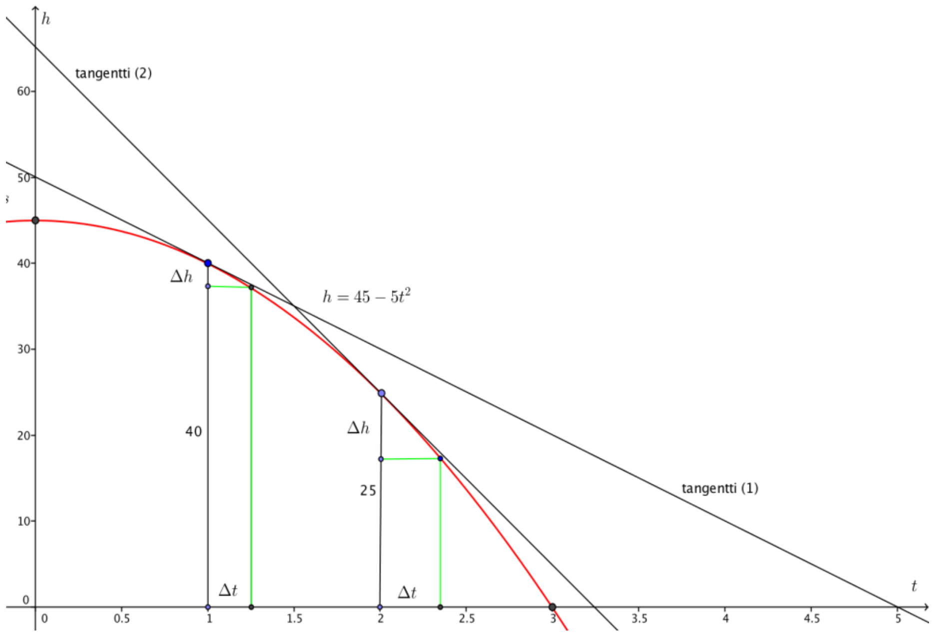
Derivaatalle käytetään yllä mainitun Leibnizin dy/dx -merkinnän ohella yleisesti Lagrangen (1736-1813) käyttöön ottamia merkintöjä y' tai $y'(x)$. Monia muitakin merkintätapoja on käytössä.

---

[1] Kreikkalainen kirjain Δ (delta) on vakiintunut muutosta kuvaavaksi apusymboliksi. Yhdistelmäsymboli Δx tarkoittaa muuttujan x arvon muutosta, Δt muuttujan t arvon muutosta jne. Huomaa, että Δx *ei tarkoita* kertolaskua Δ kertaa x.

[2] Merkinnät dx ja dy sekä niiden nimitykset ovat peräisin Gottfried Wilhelm Leibnizilta (1646-1716), jota pidetään Isaac Newtonin (1643-1727) ohella differentiaalilaskennan keksijänä.

Esimerkki 3.1.2. Tarkastellaan edellisen esimerkin 3.1.1. tilannetta, jossa putoavan vasaran etäisyys maanpinnasta h riippuu putousajasta t yhtälön $h = 45 - 5t^2$ mukaisesti. Muuttujien h ja t riippuvuutta kuvaa punainen käyrä alla olevassa kuviossa 18. Määritä derivaatta dh/dt hetkellä **(a)** t = 1 ja **(b)** t = 2.



KUVIO 18. Punainen käyrä on sama kuin kuviossa 17. Tangentit (1) ja (2) sivuavat käyrää kohdissa t = 1 ja t = 2. Tangenttien kulmakertoimet ovat samat kuin sivuamiskohdissa lasketut derivaatat dh/dt.

(a) Korkeuden h arvot hetkillä t = 1 ja $t = 1 + \Delta t$ ovat

$$h(1) = 45 - 5 \cdot 1^2 = 40\,,$$

$$h(1 + \Delta t) = 45 - 5(1 + \Delta t)^2 = 45 - 5(1 + 2\Delta t + \Delta t^2) = 40 - 10\Delta t - 5\Delta t^2.$$

Ajan muutosta Δt vastaava korkeuden muutos on

$$\Delta h = h(1 + \Delta t) - h(1) = (40 - 10\Delta t - 5\Delta t^2) - 40 = -10\Delta t - 5\Delta t^2,$$

jolloin muutossuhde on

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{-10\Delta t - 5\Delta t^2}{\Delta t} = \frac{(-10 - 5\Delta t)\Delta t}{\Delta t} = -10 - 5\Delta t\,.$$

Näemme, että $\dfrac{\Delta h}{\Delta t} \to -10$, kun $\Delta t \to 0$.

Siis kysytty derivaatta hetkellä $t = 1$ on $\dfrac{dh}{dt} = -10$.

Tässä esimerkissä muuttujat h ja t ovat fysikaalisia suureita, joiden yksikköinä ovat metri ja sekunti. Ne ovat samalla myös erotusten Δh ja Δt (sekä differentiaalien dh ja dt) yksiköitä. Näin ollen kysytty derivaatan arvo hetkellä t = 1 s on

$$\frac{dh}{dt} = -10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \left[\text{merkitään myös } h'(1) = -10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right],$$

joka ilmaisee *fysikaalisesti* putoavan vasaran *nopeuden* (= matka *dh* jaettuna siihen kuluneella ajalla dt) kyseisellä hetkellä $t = 1$. Miinusmerkki kertoo nopeuden suuntautuvan h-akselin negatiiviseen suuntaan eli alaspäin. Kuviosta 18 näemme, että tähän kohtaan piirretyn käyrän tangentin kulmakerroin on $(-\,50\ \mathrm{m})/(5\ \mathrm{s}) = -10\ \mathrm{m/s}$. Derivaatta ilmaisee siis *geometrisesti* kyseiseen kohtaan piirretyn tangentin kulmakertoimen.

(b) Korkeuden h arvot hetkillä t = 2 ja $t = 2 + \Delta t$ ovat

$$h(2) = 45 - 5 \cdot 2^2 = 25\,,$$

$$h(2 + \Delta t) = 45 - 5(2 + \Delta t)^2 = 45 - 5(4 + 4\Delta t + \Delta t^2) = 25 - 20\Delta t - 5\Delta t^2.$$

Ajan muutosta Δt vastaava korkeuden muutos on

$$\Delta h = h(2 + \Delta t) - h(2) = (25 - 20\Delta t - 5\Delta t^2) - 25 = -20\Delta t - 5\Delta t^2,$$

jolloin muutossuhde on

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{-20\Delta t - 5\Delta t^2}{\Delta t} = \frac{(-20 - 5\Delta t)\Delta t}{\Delta t} = -20 - 5\Delta t\,.$$

Näemme, että $\dfrac{\Delta h}{\Delta t} \to -20$, kun $\Delta t \to 0$.

Siis kysytty derivaatta hetkellä $t = 2$ on $\dfrac{dh}{dt} = -20$.

Kun otamme yksiköt mukaan, saamme

$$\frac{dh}{dt} = -20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \left[\text{merkitään myös } h'(2) = -20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right],$$

Nytkin derivaatan arvo ilmaisee fysikaalisesti vasaran *nopeuden* kyseisellä hetkellä (t = 2) ja geometrisesti kyseiseen kohtaan piirretyn tangentin *kulmakertoimen*.

Huomautus 3.1.2. Derivaatan merkintätavoista 2.

Edellisessä esimerkissä näimme, että ajasta t riippuvan muuttujan h derivaatta on erisuuruinen eri kohdissa (eri ajanhetkillä). Kun derivaatan arvo ilmoitetaan on siis tärkeätä tietää, missä kohdassa se on laskettu. Leibnizin merkintätapaa käyttäen tämä voidaan ilmaista esim. seuraavasti:

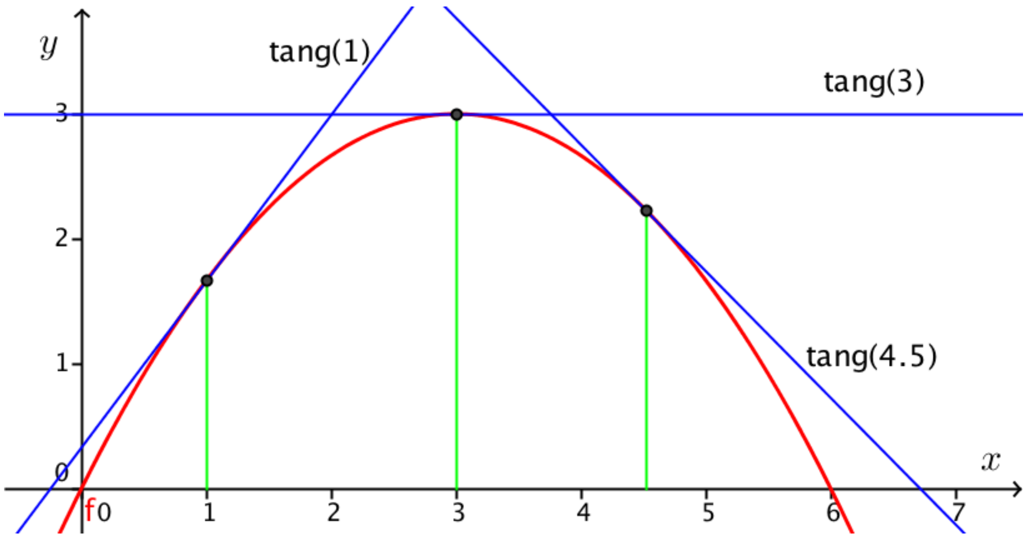
$$\frac{dh}{dt} = -20 \text{, kun } t = 2 \text{ ,}$$

mutta Lagrangen pilkkumerkinnällä sama asia voidaan ilmaista lyhyemmin

$$h'(2) = -20 \text{ .}$$

Fysikaalisissa tarkasteluissa Leibnizin derivaattamerkintä on yleensä havainnollisempi, koska se ilmaisee derivaatan luonteen muutossuhteena. Laskuteknisesti Lagrangen merkintätapa on usein kätevämpi.

3.2. Derivaatan geometrinen ja fysikaalinen merkitys

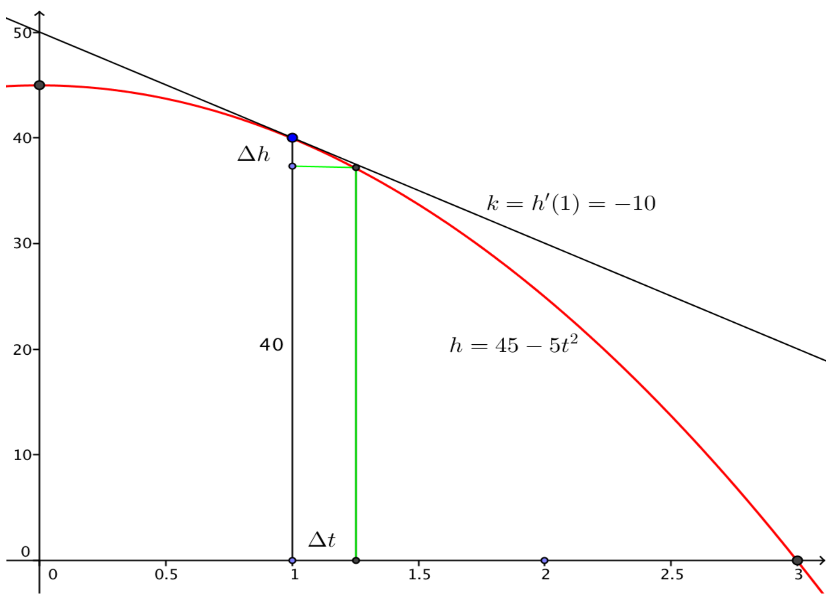


KUVIO 19. (Derivaatan *geometrinen* merkitys) Punainen käyrä kuvaa muuttujan y riippuvuutta muuttujasta x eli funktiota $y = y(x)$. Kuvaajalle on piirretty kolme tangenttia kohtiin $x = 1$, $x = 3$ ja $x = 4{,}5$. Koska funktion y derivaatta tietyssä kohdassa (eli tietyllä x:n arvolla) on sama kuin tähän kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin, näemme että $y'(1)$ on positiivinen (nouseva tangentti) ja $y'(4{,}5)$ on negatiivinen (laskeva tangentti). Kohdassa $x = 3$ derivaatta $y'(3)$ on nolla, koska tangentti on vaakasuora. Kohdassa $x = 3$ muuttujalla (funktiolla) y on paikallinen *maksimiarvo*.

Derivaatan *fysikaalinen* merkitys riippuu siitä, mitä fysikaalisia suureita muuttujat tarkoittavat. Esimerkissä 3.1.2. kyseessä oli etäisyyden h riippuvuus ajasta t, jolloin derivaatta dh/dt tarkoitti vasaran liikenopeutta kyseisellä ajanhetkellä. Tämä onkin tyypillinen tilanne fysiikassa. Jos suure f (etäisyys, massa, nopeus, voima, paine, sähkökentän voimakkuus jne) riippuu ajasta, niin derivaatta df/dt – eli toisin merkittynä $f'(t)$ – ilmaisee suureen f muutosnopeuden hetkellä t. Sama pätee silloinkin, kun riippumaton muuttuja on jokin muu kuin aika. Esimerkiksi suljetussa säiliössä olevan kaasun paine p riippuu kaasun absoluuttisesta lämpötilasta T eli $p = p(T)$, jolloin derivaatta dp/dT ilmaisee paineen muutosnopeuden[1] lämpötilan T suhteen (*ei* ajan suhteen).

Esimerkki 3.2.1. Derivaatta lineaarisen approksimaation välineenä.

Tutkittaessa monimutkaista fysikaalista riippuvuutta on usein hyödyllistä *approksimoida*[2] sitä lineaarisella[3] riippuvuudella. Tässä derivaatta on tehokas apuväline. Kuvio 20 havainnollistaa asiaa.



KUVIO 20. (Osa kuvioista 17 ja 18) Etäisyyttä h kuvaava punainen käyrä on sama kuin kuvioissa 17 ja 18. Kohtaan $t = 1$ piirretty tangentti poikkeaa vain hyvin vähän punaisesta käyrästä, kun pysytään lähellä kyseistä kohtaa. Tangenttisuora on siis käyrän hyvä approksimaatio kohdan $t = 1$ läheisyydessä. Tämä suora leikkaa pystyakselin kohdassa $h = 50$ ja sen kulmakerroin on $k = dh/dt = -10$, kuten esimerkissä 3.1.2. osoitettiin. Tangenttisuoran yhtälö on siten $h = 50 - 10t$.

[1] Sana *muutosnopeus* (rate of change) tarkoittaa yleensä suureen f aikaderivaattaa df/dt, mutta fysiikassa sanalla voi olla yleisempi merkitys df/dx (rate of change with respect to *x*).
[2] *approksimoida* = arvioida likimääräisesti
[3] *lineaarinen* = suoraviivainen; lineaarisessa approksimaatiossa käyrä korvataan suoralla.

Kuviosta 20 näemme, että siirryttäessä ajanhetkestä $t = 1$ eteenpäin[1] lyhyen aikavälin Δt verran etäisyys h muuttuu määrällä Δh. Muutossuhde $\Delta h/\Delta t$ on tällöin hyvin lähellä derivaattaa dh/dt eli

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} \approx \frac{dh}{dt} = h'(1) = -10 \text{, josta}$$

$$(*) \qquad \Delta h \approx \frac{dh}{dt} \cdot \Delta t = h'(1) \cdot \Delta t = -10\Delta t \ .$$

Jos esimerkiksi siirrymme hetkestä $t = 1$ eteenpäin hetkeen $t = 1{,}1$, niin $\Delta t = 0{,}1$ ja vastaava etäisyyden muutos on tarkasti

$$\Delta h = h'(1{,}1) - h(1) = (45 - 5 \cdot 1{,}1^2) - (45 - 5 \cdot 1^2) = -1{,}05 \ ,$$

jolle approksimaatio (*) antaa varsin hyvän likiarvon

$$\Delta h \approx -10 \cdot \Delta t = -10 \cdot 0{,}1 = -1{,}0 \ ,$$

jonka absoluuttinen virhe on +0,05 ja suhteellinen virhe n, 5 %.

Jos etäisyyden h arvoa approksimoidaan vastaavasti tangenttisuoralla $h = 50 - 10t$, saadaan hetkellä $t = 1{,}1$ arvio

$$h(1{,}1) \approx 50 - 10 \cdot 1{,}1 = 39 \ ,$$

kun tarkka arvo kaavasta $h(t) = 45 - 5t^2$ laskettuna on

$$h(1{,}1) = 45 - 5 \cdot 1{,}1^2 = 38{,}95$$

Nytkin approksimaation absoluuttinen virhe on +0,05, mutta suhteellinen virhe vain 0,1 %.

Jos siirtymä sivuamiskohdasta $t = 1$ on pienempi kuin 0,1, niin edellä lasketut derivaattaan perustuvat ns. *ensimmäisen kertaluvun approksimaatiot* ovat vielä tarkempia. Jos taas

---

[1] Jätämme tässä esimerkissä mittayksiköt (metri ja sekunti) merkitsemättä.

siirrytään kauemmaksi, niin approksimaatiovirheet kasvavat, kun käyrä ja tangenttisuora poikkeavat toisistaan yhä enemmän.

3.3. Derivoimissäännöt ja korkeamman kertaluvun derivaatat

Esimerkin 3.1.2. (a)-kohdassa laskimme funktion $h(t) = 45 - 5t^2$ derivaatan $dh/dt = -10$ kohdassa t = 1 muutossuhteen $\Delta h/\Delta t$ raja-arvona, kun $\Delta t \to 0$. Tämä on aika työläs menettely, varsinkin kun sama prosessi jouduttiin toistamaan esimerkin (b)-kohdassa laskettaessa saman funktion derivaatta kohdassa t = 2.

Onneksi matemaatikot ovat kehittäneet derivaattojen laskemiseen paljon tehokkaamman menetelmän eli *derivoimissäännöt*. Tällöin tiettyjen algebrallisten sääntöjen avulla muodostetaan ensin funktion $h(t) = 45 - 5t^2$ *derivaattafunktio* (derivaatta kohdassa t = t)

$$\frac{dh}{dt} = -10t \qquad\qquad [\text{tai toisin kirjoitettuna } h'(t) = -10t]\,,$$

jonka avulla derivaatat kohdissa t = 1 ja t = 2 saadaan sijoittamalla kyseiset muuttujan t arvot derivaattafunktioon t:n paikalle:

$$t = 1: \qquad \frac{dh}{dt} = -10 \cdot 1 = -10 \qquad\qquad [\text{eli } h'(1) = -10 \cdot 1 = -10]\,,$$

$$t = 2: \qquad \frac{dh}{dt} = -10 \cdot 2 = -20 \qquad\qquad [\text{eli } h'(2) = -10 \cdot 2 = -20]\,.$$

Derivaattafunktioiden muodostamiseen tarvittavat säännöt sisältyvät lukion matematiikan (pitkään ja lyhyeenkin) oppimäärään. Alla muutamia tavallisimpia derivoimissääntöjä, joissa merkintä $Df(x)$ tarkoittaa funktion $f(x)$ derivaattafunktiota: $Df(x) = f'(x) = df/dx$.

1. Potenssifunktion derivaatta: $D(x^n) = nx^{n-1}$.
2. Vakiotekijän siirtosääntö: $D(a \cdot f(x)) = a \cdot D(f(x))$
3. Summan derivaatta: $D[f(x) + g(x)] = Df(x) + Dg(x)$.
4. Tulon derivaatta: $D[f(x)g(x)] = g(x) \cdot Df(x) + f(x) \cdot Dg(x)$.
5. Sini- ja kosinifunktion derivaatat: $D\sin x = \cos x$ ja $D\cos x = -\sin x$.
6. Eksponentti- ja logaritmifunktion derivaatta: $D(e^x) = e^x$ ja $D(\ln x) = 1/x$.
7. Ketjusääntö: Jos $u = u(v)$ ja $v = v(x)$, niin

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \quad .$$

Ketjusäännössä muuttuja u riippuu v:stä, joka puolestaan riippuu x:stä. Tällöin u riippuu myös x:stä ja tämän ketjutetun riippuvuuden eli funktion $u = u(v(x))$ derivaatta saadaan kertomalla ketjun osien derivaatat keskenään. Sama sääntö pätee pitemmillekin riippuvuusketjuille.

* * * * *

Funktion $h(t) = 45 - 5t^2$ *toinen* derivaatta $h''(t)$ saadaan derivoimalla sen (*ensimmäinen*) derivaatta $h'(t) = -10t$. Edellä mainittujen derivoimissääntöjen avulla saadaan

$h''(t) = -10$, [luetaan "*h kaksi pilkku t*"].

Leibnizin notaatiota käytettäessä toisen derivaatan merkintä on tässä tapauksessa

$\frac{d^2h}{dt^2} = -10$, [luetaan "dee kaksi h dee t toiseen"].

Derivointia voidaan edelleen jatkaa, jolloin saadaan lähtökohtana olleen funktion *kolmas*, *neljäs*, . . . , *n*:s derivaatta

$\frac{d^nh}{dt^n}$ tai $h^{(n)}(t)$. [kun $n = 1$ tai 2, käytetään pilkkuja].

Esimerkkifunktiollamme $h(t) = 45 - 5t^2$ ovat kaikki kolmannen, neljännen jne. kertaluvun derivaatat nollia[1].

* * * * *

Korkeammista derivaatoista tärkein fysikaalisissa tarkasteluissa on toinen derivaatta. Jos funktio $h(t)$ ilmaisee – kuten esimerkissämme – liikkeessä olevan kappaleen *paikan* (tässä etäisyytenä maanpinnasta) hetkellä t, niin ensimmäinen derivaatta $dh/dt = v(t)$ ilmaisee liikkeen hetkellisen *nopeuden* $v(t)$ (matkan muutos dh jaettuna siihen kuluneella ajalla dt). Vastaavasti toinen derivaatta $d^2h/dt^2 = dv/dt = a(t)$ ilmaisee liikkeen hetkellisen

[1] Näin siksi, että vakiofunktion derivaatta on nolla.

kiihtyvyyden $a(t)$ (nopeuden muutos dv jaettuna siihen kuluneella ajalla dt). Esimerkissämme on $a(t) = d^2h/dt^2 = -10$ eli putoavalla vasaralla on vakiokiihtyvyys -10 m/s^2. Kyseessä on *tasaisesti kiihtyvä* liike.

Esimerkki 3.3.1. Auton kiihdytysmatka.
Auto kiihdyttää tasaisesti nollasta sataan (eli levosta nopeuteen 100 km/h) 10 sekunnissa. Kuinka pitkän matkan auto kulkee kiihdytyksen aikana?

Vakiokiihtyvyys a saadaan jakamalla nopeuden muutos siihen kuluneella ajalla, joten

$$a = \frac{100 \text{ km/h}}{10 \text{ s}} = \frac{100\,000 \text{ m}}{10 \text{ s} \cdot 3600 \text{ s}} = 2{,}78 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \ .$$

Mutta kiihtyvyys on nopeuden $v = v(t)$ aikaderivaatta, joten

$$\frac{dv}{dt} = a \,, \qquad\qquad \text{[tässä } t \text{ on lähtöhetkestä mitattu aika]}$$

Koska a on vakio, täytyy potenssin derivoimissäännön[1] perusteella olla

$$v = v(t) = at + B = at \,,$$

missä B on jokin vakio ja itse asiassa $B = 0$, koska auto on alussa levossa eli $v(0) = 0$. Mutta nopeus v on puolestaan auton kulkeman matkan $s = s(t)$ aikaderivaatta. Siis

$$\frac{ds}{dt} = at \,,$$

ja jälleen potenssin derivoimissäännön perusteella on

$$(*) \qquad s = s(t) = \frac{1}{2}at^2 + C = \frac{1}{2}at^2 \,,$$

missä nytkin vakio $C = 0$, koska $s(0) = 0$. Tulos (*) ilmoittaa auton kulkeman matkan lähdön jälkeen t sekunnin aikana.

---

[1] Sovellamme tässä potenssin derivoimissääntöä käänteisesti miettimällä, minkä funktion $v(t)$ derivaatta on vakio a.

Näin ollen kysytty matka saadaan kaavasta (*) sijoittamalla siihen $t = 10$.

$$s = s(10) = \frac{1}{2} \cdot 2{,}78\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (10\ \mathrm{s})^2 \approx 140\ \mathrm{m}\ .$$

* * * * *

3.4. Vektorimuuttujan derivaatta

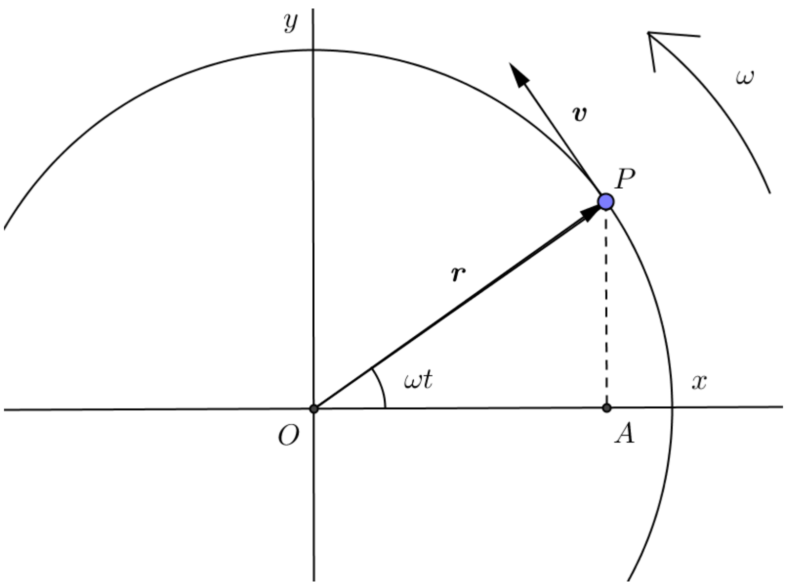
Edellä kappaleissa 3.1.-3.3. olemme tarkastelleet *skalaarifunktioita*. Ajasta t riippuvien muuttujien (etäisyys h , vauhti tai nopeus v, kiihtyvyys a, matka s) arvot ovat olleet skalaarisuureita, joiden derivaatatkin ovat skalaareja. Derivaatan käsite toimii kuitenkin myös *vektorimuuttujille* (vektorifunktioille). Niinpä esimerkiksi ajasta t riippuvan kaksikomponenttisen vektorimuuttujan $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(t) = (f_1, f_2) = (f_1(t), f_2(t))$ derivaatta on *vektori*

$$\frac{d\boldsymbol{f}}{dt} = \left(\frac{df_1}{dt}, \frac{df_2}{dt}\right),$$

jonka koordinaatteina ovat $\boldsymbol{f}$:n koordinaattien derivaatat. Vektori derivoidaan derivoimalla sen koordinaatit, jotka ovat skalaareja. Seuraava esimerkki valaisee asiaa.

Esimerkki 3.4.1. Tasainen ympyräliike.
Tasaisessa ympyräliikkeessä kappale kiertää r-säteisen ympyrän kehää tasaisella *kulmanopeudella* ω (radiaania[1] sekunnissa). Kuvio 21 havainnollistaa tilannetta.

[1] Radiaani (rad) on säteen pituista kaarta vastaava keskuskulma; 1 rad = $180°/\pi \approx 57{,}3°$.



KUVIO 21. Kappale P tasaisessa on ympyräliikkeessä kulmanopeudella ω rad/s. Rataympyrän säde on r. Koordinaatiston origo O on sijoitettu rataympyrän keskipisteeseen. Kello on nollattu (t = 0) hetkellä, jolloin kappale ylitti positiivisen x-akselin. Vektorit $\boldsymbol{r}$ ja $\boldsymbol{v}$ osoittavat kappaleen paikan ja ratanopeuden hetkellä t, jolloin kappale on origosta katsoen suunnassa ωt. Vektorin $\boldsymbol{r}$ skalaarikomponentit hetkellä t ovat pisteen P koordinaatit $x = r\cos\omega t$ ja $y = r\sin\omega t$.

Kappaleen paikkavektorilla $\boldsymbol{r}$ on hetkellä t koordinaattiesitys

(1) $$\boldsymbol{r} = (r\cos\omega t\,, r\sin\omega t)\,.$$ [Huom! sini ja kosini kohdistuvat kulmaan ωt.]

Kappaleen nopeusvektori $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$ saadaan paikkavektorin $\boldsymbol{r}$ aikaderivaattana, joten derivoimissääntöjen perusteella on

(2) $$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\cos\omega t\,, r\sin\omega t) = (-r\omega\sin\omega t\,, r\omega\cos\omega t) = (v_1, v_2)\,.$$

Nopeusvektorin itseisarvo eli *ratavauhti* on silloin

(3) $$v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2} = r\omega\sqrt{(\sin\omega t)^2 + (\cos\omega t)^2} = r\omega\,,$$

mikä tulos olisi saatu ilman derivointiakin toteamalla, että yhden sekunnin aikana kappale kiertyy kulman ω verran ja vastaava kaari ympyrän kehällä on $r\omega$.

Derivoimalla edelleen nopeusvektorin

(4) $$\boldsymbol{v} = (-r\omega\sin\omega t\,, r\omega\cos\omega t)$$

saamme kiihtyvyysvektorin

(5) $$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = (-r\omega^2 \cos \omega t\,, -r\omega^2 \sin \omega t) = -\omega^2(r \cos \omega t\,, r \sin \omega t) = -\omega^2 \boldsymbol{r}\,.$$

Koska $-\omega^2 \leq 0$, niin kiihtyvyysvektori $\boldsymbol{a}$ on vastakkaissuuntainen paikkavektoriin $\boldsymbol{r}$ verrattuna. Kiihtyvyys suuntautuu siis aina kohti rataympyrän keskipistettä. Vaikka kiihtyvyyden suunta muuttuu koko ajan, niin sen itseisarvo (ns. *keskeiskiihtyvyys*)

(6) $$a = |\boldsymbol{a}| = |-\omega^2 \boldsymbol{r}| = \omega^2 |\boldsymbol{r}| = \omega^2 r$$

on tasaisessa ympyräliikkeessä vakio, koska kulmanopeus ω ja rataympyrän säde r ovat vakioita. Keskeiskiihtyvyys a voidaan lausua myös vakiosuuruisen ratavauhdin v avulla. Yhtälön (3) perusteella on nimittäin $v = \omega r$, josta $\omega = v/r$. Yhtälöstä (6) saadaan silloin

(7) $$a = \omega^2 r = \left(\frac{v}{r}\right)^2 \cdot r = \frac{v^2}{r}\ .$$

Nimestään huolimatta tasainen ympyräliike ei siis ole *tasaista liikettä*., jossa kiihtyvyys on nolla. Tasaisessa ympyräliikkeessä nopeuden ja kiihtyvyyden itseisarvot (ratavauhti ja keskeiskiihtyvyys) ovat vakioita, mutta nopeus- ja kiihtyvyysvektorit muuttuvia (suunta vaihtelee). Tasaisessa liikkeessä nopeusvektori (sekä vauhti että suunta) on vakio, jolloin kiihtyvyysvektori on nollavektori.

Huomautus 3.4.1.1. Vektoreiden skalaaritulot tasaisessa ympyräliikkeessä.
Tasaisessa ympyräliikkeessä olevaan hiukkaseen liittyvien vektoreiden $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$ ja $\boldsymbol{a}$ keskinäiset skalaaritulot voidaan laskea edellä saatujen koordinaattiesitysten (1), (4) ja (5) perusteella. Tällöin saadaan

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r} = 0\,,$$
$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} = 0\,,$$
$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r} \neq 0\,.$$

Tulokset osoittavat, että nopeusvektori $\boldsymbol{v}$ on kohtisuorassa paikkavektoria $\boldsymbol{r}$ vastaan (mikä on tietysti geometrisestikin selvää, koska $\boldsymbol{v}$ on ympyrän tangentin suuntainen ja $\boldsymbol{r}$ on sivuamispisteeseen piirretyn säteen suuntainen) ja kiihtyvyysvektori $\boldsymbol{a}$ on kohtisuorassa nopeusvektoria $\boldsymbol{v}$ vastaan, mikä ei ole itsestään selvää, mutta seuraa myös edellisestä kohtisuoruudesta sekä tekemästämme havainnosta, että $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{r}$ ovat vastakkaissuuntaiset.

Esimerkki 3.4.2. Vesisangon pyöritys pystytasossa.
Naruun kiinnitettyä pientä vesisankoa pyöritetään tasaisella kulmanopeudella pystytasossa siten, että sanko kiertää ympyrärataa, jonka säde on 0,5 m. Kuinka suuri tulee kulmanopeuden vähintään olla, jotta vesi pysyisi sangossa?

Tilanne on kriittisin rataympyrän ylimmässä pisteessä, jolloin sangon suu osoittaa suoraan alaspäin. Tällöin keskeiskiihtyvyyden tulee olla vähintään putouskiihtyvyyden $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ suuruinen, mistä kaavan (6) perusteella seuraa ehto

$$\omega^2 r \geq g$$

eli

$$\omega^2 \cdot 0{,}5 \geq 9{,}81\ ,$$

josta

$$\omega^2 \geq 19{,}62 \quad \text{eli} \quad \omega \geq 4{,}43 \ \text{ tai } \ \omega \leq -4{,}43\,.$$

Kulmanopeuden tulee siis olla vähintään 4,43 radiaania sekunnissa (jompaankumpaan kiertosuuntaan). Koska yksi täysi kierros vastaa kulmaa 2π radiaania, niin vaadittu pyöritysnopeus kierrosluvun avulla ilmaistuna on $4{,}43/(2\pi) \approx 0{,}7$ kierrosta sekunnissa.

* * * * *

3.5. Integraalifunktio ja integroimissäännöt

Derivoinnin ohella sen käänteistoimitus – *integrointi* – on osoittautunut hyödylliseksi ajattelun apuvälineeksi matematiikassa ja luonnontieteissä, erityisesti fysiikassa.

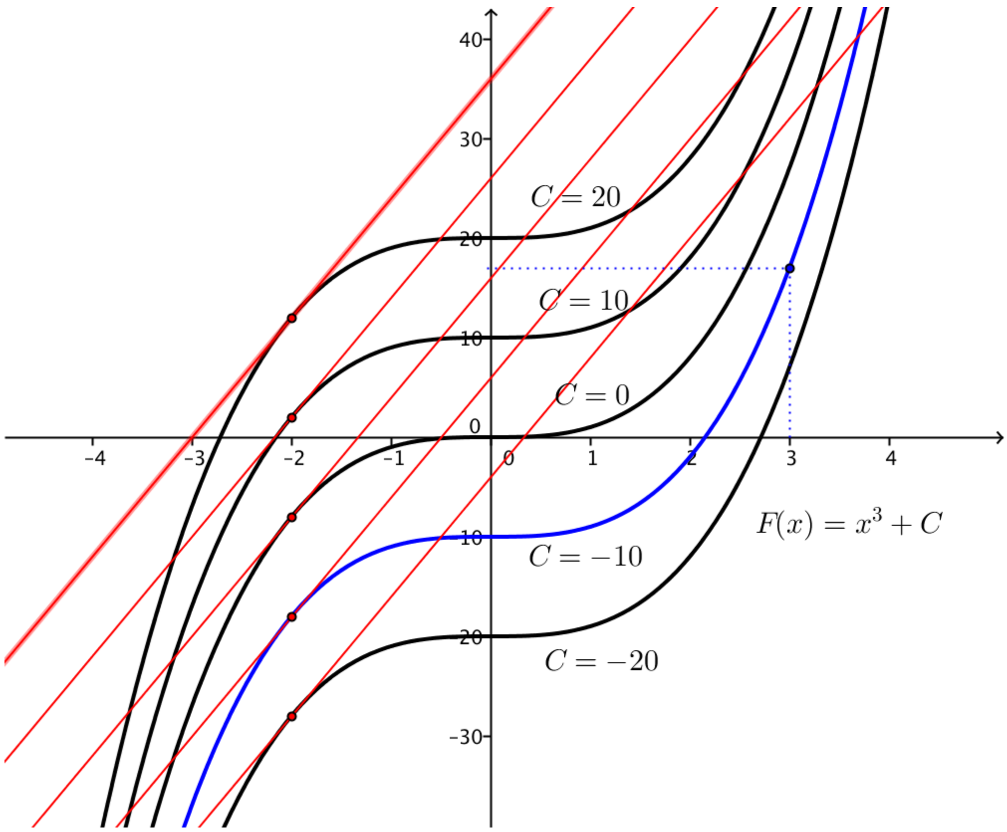
Integraalifunktio
Funktion $f(x)$ *integraalifunktio* $F(x)$ on funktio, jonka derivaatta on $f(x)$. Integraalifunktio $F(x)$ täyttää siis ehdon

$$F'(x) = \frac{dF}{dx} = f(x)$$

Esimerkki 3.5.1 Integraalifunktion muodostaminen.

Annetun funktion integraalifunktio on usein helppo päätellä derivoimissääntöjen avulla. Päätelmän oikeellisuuden voi tarkistaa derivoimalla. Esimerkiksi funktion $f(x) = 3x^2$ integraalifunktio on $F(x) = x^3$, sillä $F'(x) = D(x^3) = 3x^2 = f(x)$.

- **a)** Saman funktion $3x^2$ integraalifunktio on myös $x^3 + 7$, sillä $D(x^3 + 7) = 3x^2$.
- **b)** Yleisesti, olipa C mikä tahansa vakio, niin funktion $f(x) = 3x^2$ integraalifunktio on myös $F(x) = x^3 + C$, sillä $D(x^3 + C) = 3x^2$. Näin siksi, että vakion derivaatta on nolla.
- **c)** Näemme, että annetulla funktiolla on *äärettömän monta* integraalifunktiota, jotka eroavat toisistaan vakion verran.



KUVIO 21a. Funktion $f(x) = 3x^2$ integraalifunktioiden kuvaajia eli *integraalikäyriä* $y = x^3 + C$. Jokainen integraalikäyrä saadaan peruskäyrästä $y = x^3$ siirtämällä sitä pystysuunnassa C yksikköä. Koska kaikilla integraalifunktioilla on sama derivaatta, niin integraalikäyrille samaan kohtaan (kuviossa kohtaan $x = -2$) piirretyt tangentit ovat yhdensuuntaiset. Tietyn pisteen, esimerkiksi pisteen $(3, 17)$, kautta kulkee vain yksi integraalikäyrä $y = x^3 - 10$. (Huomaa, että kuviossa koordinaattiakselien skaalaus ei ole sama.)

Esimerkki 3.5.2 Alkuehdon toteuttava integraalifunktio.

Olkoon tehtävänä etsiä se funktion $f(x) = 3x^2$ integraalifunktio $F(x)$, joka toteuttaa alkuehdon $F(3) = 17$. Koska jokainen integraalifunktio on muotoa $F(x) = x^3 + C$, niin tehtävä ratkeaa säätämällä integroimisvakion C arvo siten, että alkuehto eli yhtälö

$$F(3) = 3^3 + C = 17$$

toteutuu. Saadaan $C = 17 - 27 = -10$. Kysytty integraalifunktio on siis $F(x) = x^3 - 10$. Tämän funktiota kuvaaja esittää yllä olevassa kuviossa 21a integraalikäyrä $y = x^3 - 10$, joka kulkee pisteen $(3, 17)$ kautta.

Integraalimerkintä

Jos funktio $F(x)$ on funktion $f(x)$ integraalifunktio eli $F'(x) = f(x)$, niin merkitään

$$F(x) = \int f(x)\, dx\ , \qquad \text{[luetaan "integraali äf-äx dee-äx"]}$$

Esimerkiksi

$$\int (3x^2)\, dx = x^3 + C\ , \qquad \text{koska } D(x^3 + C\ ) = 3x^2\ ,$$

ja

$$\int (8x - 3)\, dx = 4x^2 - 3x + C\ , \qquad \text{koska } D(4x^2 - 3x + C\ \ ) = 8x - 3\ \ .$$

Huomaa, että yleisesti on

$$\int F'(x)\, dx = \int \frac{dF}{dx}\, dx = F(x) + C\ .$$

Integraalimerkinnässä oleva tekijä dx ilmaisee integroimismuuttujan x, mutta tarkoittaa myös (kuten derivaattamerkinnässäkin) muuttujan x äärettömän pientä muutosta. Tähän asiaan palaamme seuraavassa kappaleessa.

Annetun funktion $f(x)$ integraalifunktio voidaan useimmiten määrittää käyttämällä *integroimissääntöjä*, jotka ovat oikeastaan käännettyjä derivoimissääntöjä (vrt. kappale 3.3).

Integroimissääntöjä

1a. Potenssifunktion integraali: $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, kun $n \neq -1$.

1b. Potenssifunktion integraali: $\int x^{-1} \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C$.

2. Vakiotekijän siirtosääntö: $\int [a \cdot f(x)] \, dx = a \cdot \int f(x) \, dx$.

3. Summan integraali: $\int [f(x) + g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$.

4. Sini – ja kosinifunktion integraali: $\int \sin x \; dx = -\cos x + C$ ja $\int \cos x \; dx = \sin x + C$.

5. Eksponenttifunktion integraali: $\int e^x \, dx = e^x + C$.

Integroimissäännöt voidaan todistaa oikeiksi derivoimalla väitetty integraalifunktio.

Esimerkki 3.5.3. Integroiminen sääntöjen avulla.

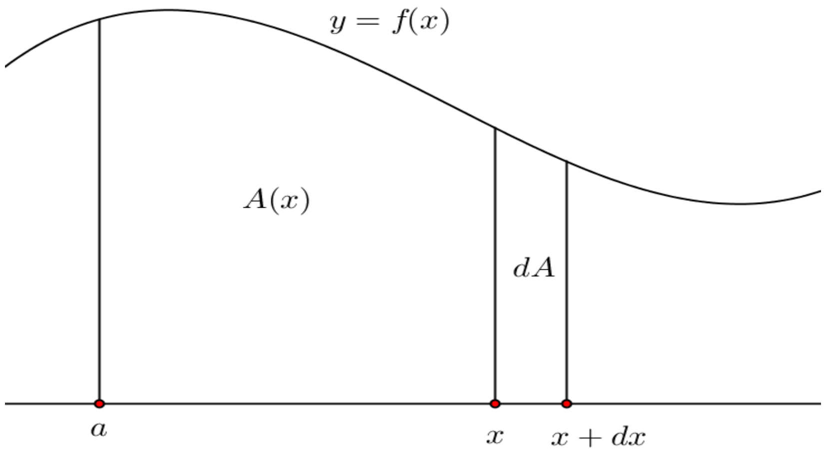
Sääntöjen 1a, 1b, 2 ja 3 perusteella saadaan

$$\begin{aligned}\int (12x^5 + 5 - \frac{4}{3x}) \, dx &= 12 \int x^5 \, dx + 5 \int x^0 \, dx - \frac{4}{3} \int \frac{1}{x} \, dx \\ &= 12 \cdot \frac{x^6}{6} + 5x - \frac{4}{3} \ln x + C \\ &= 2x^6 + 5x - \frac{4}{3} \ln x + C\,.\end{aligned}$$

Tuloksen voi tarkistaa derivoimalla.

3.6. Pinta-ala-funktio on integraalifunktio

Tarkastelemme alla olevan kuvion 21b avulla käyrän $y = f(x)$ ja x-akselin rajoittamaa aluetta kohtien a ja x välillä.



KUVIO 21b. Funktion $f(x)$ kuvaaja ja x-akseli rajoittavat vakiokohdan a ja liikkuvan kohdan x välillä alueen, jonka pinta-ala $A(x)$ on x:n funktio. Jos x:n arvoa muutetaan infinitesimaalisella määrällä dx, niin pinta-alafunktion arvo muuttuu vastaavasti määrän dA verran. (Huomaa, että infinitesimaalinen väli dx on tässä havainnollisuuden vuoksi esitetty suurennettuna.)

Kuviosta näemme, että muuttujan x pientä muutosta dx vastaa pinta-alafunktion $A(x)$ pieni muutos dA, joten funktion $A(x)$ derivaatta kohdassa x on $A'(x) = dA/dx$. Mutta, kun dx on äärettömän pieni, niin alue dA on suorakulmio, jonka kanta on dx ja korkeus on $f(x)$. Näin ollen $dA = f(x) \cdot dx$ ja siksi $A'(x) = dA/dx = [f(x) \cdot dx]/dx = f(x)$. Tämä tarkoittaa, että kohtien a ja x väliin jäävää käyrän $y = f(x)$ ja x-akselin rajoittamaa pinta-alaa osoittava funktio $A(x)$ on käyräfunktion $f(x)$ integraalifunktio

$$A(x) = \int f(x)\, dx\ ,$$

joka toteuttaa lisäksi alkuehdon $A(a) = 0$.

Tätä alkuehdon $A(a) = 0$ toteuttavaa integraalifunktiota merkitään

$$A(x) = \int_a^x f(x)\, dx\ ,$$ [luetaan: "integraali *a*:sta *x*:ään ef-ex dee-ex"]

ja kutsutaan funktion $f(x)$ *määrätyksi integraaliksi* välillä $[a, x]$.

Esimerkki 3.6.1. Pinta-alan laskeminen integroimalla.

Laske paraabelin $y = x^2 + 1$ ja x-akselin rajoittaman alueen ala välillä **(a)** $[2, x]$, **(b)** $[2, 5]$.

(a) Kysytty ala $A(x)$ on funktion $x^2 + 1$ integraalifunktio, joten integroimissääntöjen perusteella

$$A(x) = \int (x^2 + 1)\, dx = \frac{1}{3}x^3 + x + C\,.$$

Alkuehdon $A(2) = 0$ perusteella on

$$A(2) = \frac{1}{3}2^3 + 2 + C = \frac{14}{3} + C = 0\,,$$

josta ratkaistuna

$$C = -\frac{14}{3}\,.$$

Saamme siis pinta-alafunktiolle välillä $[2, x]$ lausekkeen

$$A(x) = \frac{1}{3}x^3 + x - \frac{14}{3}\,. \qquad \text{[tarkista, että } A(2) = 0]$$

(b) Kysytty pinta-ala saadaan sijoittamalla edellisen kohdan tulokseen $x = 5$, jolloin

$$A(5) = 5^3/3 + 5 - 14/3 = 42\,.$$

* * * * * *

Pinta-alafunktiota vastaavat *määrätyt integraalit*

$$\int_a^x f(x)\, dx = A(x) = \text{ pinta-ala välillä } [a, x]$$

ja

$$\int_a^b f(x)\, dx = A(b) = \text{ pinta-ala välillä } [a, b]$$

voidaan laskea rutiininomaisesti alla esitetyllä laskutavalla.

Määrätyn integraalin laskutapa

TEHTÄVÄ: Laske määrätyt integraalit

(**a**) $\int_a^x f(x)\,dx$ ja (**b**) $\int_a^b f(x)\,dx$.

RATKAISU: Olkoon $F(x)$ jokin funktion $f(x)$ integraalifunktio. Silloin on

(**a**) $\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a)$ ja (**b**) $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Perustelu: **(a)** Funktio $G(x) = F(x) - F(a)$ on funktion $f(x)$ integraalifunktio, koska $F(a)$ on vakio, joten $G(x) = F'(x)$. Lisäksi $G(a) = F(a) - F(a) = 0$. Näin ollen $G(x)$ on vaaditun alkuehdon täyttävä integraalifunktio. **(b)** Sijoittamalla $x = a$ saadaan $G(b) = F(b) - F(a)$.

SIJOITUSMERKINTÄ: Määrättyjä integraaleja laskettaessa on teknisesti edullista käyttää erotukselle $F(x) - F(a)$ ns. *sijoitusmerkintää*[1]: $F(x) - F(a) = {}_a^x[F(x)]$. Tällöin on

(**a**) $\int_a^x f(x)\,dx = {}_a^x[F(x)]$ ja (**b**) $\int_a^b f(x)\,dx = {}_a^b[F(x)]$.

Esimerkki 3.6.2. Sijoitusmerkinnän käyttö määrätyn integraalin laskemisessa.

Esimerkin 3.6.1. tehtävät ratkeavat sijoitusmerkintää käyttäen lyhyesti.

$$(\mathbf{a})\quad A = \int_2^x (x^2+1)\,dx = {}_2^x\!\left[\frac{1}{3}x^3 + x\right] = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right) - \left(\frac{1}{3}2^3 + 2\right) = \frac{1}{3}x^3 + x - \frac{14}{3}\ ,$$

$$(\mathbf{b})\quad A = \int_2^5 (x^2+1)\,dx = {}_2^5\!\left[\frac{1}{3}x^3 + x\right] = \left(\frac{1}{3}5^3 + 5\right) - \left(\frac{1}{3}2^3 + 2\right) = 42\ .$$

[1] Suomalaisessa matemaattisessa kirjallisuudessa sijoitusmerkintänä on yleensä integraalimerkin korvaava vinoviiva.

Huomautus 3.6.3. Integraalimerkinnän etymologiaa.
Integraalimerkinnänkin kehitti 1600-luvun lopulla saksalainen matemaatikko ja filosofi Gottfried Wilhelm Leibniz summaa tarkoittavasta S-kirjaimesta. Merkinnän lähtökohtana oli ajatus, että pinta-alaa tarkoittavaa määrättyä integraalia

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

voidaan pitää ”summana”, jossa on laskettu yhteen *integroimisvälin* $[a, b]$ kaikissa kohdissa x olevien infinitesimaalisten suorakulmioiden pinta-alat dA:t (ks. kuvio 21b).

Koska $dA = f(x)\,dx$, niin ”summa”

$$\int_a^b dA = \int_a^b f(x)\,dx\,,$$

jolloin näissä ”summissa” ajatellaan olevan äärettömän monta yhteenlaskettavaa, yksi jokaista integroimisvälillä $[a, b]$ olevaa pistettä x kohti.

Esimerkki 3.6.4. Differentiaaliyhtälön[1] ratkaiseminen integroimalla.
Määritä funktio $y = y(x)$, joka toteuttaa alkuehdon $y(1) = 0$ ja differentiaaliyhtälön **(a)** $x \cdot y'(x) = x^2 + 1$, **(b)** $y'(x) = 2x/y$.

(a) Kirjoitetaan yhtälö muotoon

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = x^2 + 1\,.$$

Kerrotaan yhtälön molemmat puolet tekijällä[2] dx, jolloin saadaan

$$x \cdot dy = (x^2 + 1)dx\,.$$

Jakamalla puolittain tekijällä x saadaan

[1] *Differentiaaliyhtälössä* tuntemattomana on funktio ja yhtälössä esiintyy tämän funktion derivaatta (tai derivaattoja).
[2] Derivaattaa dy/dx käsitellään tässä osamääränä (differentiaaliosamäärä).

$$1 \cdot dy = \left(x + \frac{1}{x}\right) dx \,.$$

Tässä yhtälössä muuttujat x ja y on *erotettu* eri puolille, jolloin kumpikin puoli voidaan integroida erikseen. Saadaan

$$\int 1 \, dy = \int \left(x + \frac{1}{x}\right) dx \,.$$

Vasemmalla puolella integroimismuuttujana on y ja oikealla puolella x. Integroimissääntöjen avulla saadaan nyt

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \ln x + C \,,$$

missä molemmille puolille lisätyt integroimisvakiot on yhdistetty oikealle puolelle.
Vakio C saadaan alkuehdosta $y(1) = 0$. Sen perusteella

$$0 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \ln 1 + C = \frac{1}{2} + C \,,$$

josta

$$C = -\frac{1}{2}.$$

Alkuehdon toteuttava differentiaaliyhtälön ratkaisu on siis funktio[1]

$$y = y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \ln x - \frac{1}{2}.$$

(b) Nyt vastaavat vaiheet ovat seuraavat

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y} \qquad \text{[kerro puolittain tekijällä } y \cdot dx\text{]}$$

$$y \cdot dy = 2x \cdot dx \qquad \text{[integroi puolittain]}$$

$$\int y \, dy = \int 2x \, dx$$

[1] Ratkaisun oikeellisuuden voi nytkin tarkistaa sijoittamalla se alkuperäiseen yhtälöön ja katsomalla toteutuuko se.

$$\frac{1}{2}y^2 = x^2 + C \qquad \text{[ratkaise } y\text{]}$$

$$y = \sqrt{2x^2 + D} \qquad \text{[merkitään } 2C = D\text{]}$$

Määritetään vielä vakio D alkuehdon $y(1) = 0$ perusteella.

$$y(1) = \sqrt{2 \cdot 1^2 + D} = \sqrt{2 + D} = 0, \qquad \text{joten } D = -2.$$

Lopullinen ratkaisu on siis

$$y = y(x) = \sqrt{2x^2 - 2}\ .$$

Derivoimalla nähdään helposti, että saatu ratkaisu toteuttaa alkuperäisen differentiaaliyhtälön.

4. KLASSISTA MEKANIIKKAA

Mekaniikka on fysiikan osa-alue, jossa tutkitaan kappaleiden liikettä ja liikkeen lainalaisuuksia. Tässä luvussa kertaamme lyhyesti Newtonin esittämän *klassisen mekaniikan* (eli Newtonin mekaniikan) perusperiaatteet[1]. Nämä periaatteet ovat edelleen täysin riittäviä tarkasteltaessa makroskooppisia[2] kappaleita, joiden liikenopeudet ovat pieniä[3] verrattuna valon nopeuteen. Suurilla nopeuksilla liikkuvia kappaleita tarkasteltaessa Newtonin mekaniikka ei päde ja se on korvattava Einsteinin suhteellisuusteoriaan perustuvalla *relativistisella mekaniikalla*, johon perehdymme luvussa 6.

4.1. Newtonin mekaniikan peruslait

Klassisen mekaniikan peruslakeja on kolme: *inertian* laki, *dynamiikan* peruslaki sekä *vaikutuksen ja vastavaikutuksen* laki.

Newtonin I laki (jatkavuuden laki eli inertian laki) Kappaleen liiketila säilyy muuttumattomana, ellei siihen vaikuta ulkopuolinen voima. Matemaattisesti ilmaistuna: Jos $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$, niin $d\boldsymbol{v}/dt = \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

Laki muotoillaan usein myös näin: ”Kappale jatkaa tasaista suoraviivaista liikettään vakionopeudella tai pysyy levossa, jos siihen ei vaikuta mikään voima.”

Lain matemaattisessa versiossa vektori $\boldsymbol{f}$ on kappaleeseen kohdistuva kokonaisvoima (eli siihen kohdistuvien voimien vektorisumma) ja $\boldsymbol{v}$ on kappaleen nopeus. Nopeusvektorin $\boldsymbol{v}$ aikaderivaatta $d\boldsymbol{v}/dt$ ilmaisee liiketilan muutoksen eli kiihtyvyysvektorin $\boldsymbol{a}$.

---

[1] Newton esitti ne 1687 teoksessaan *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.
[2] Kooltaan selvästi suurempia kuin alkeishiukkaset, atomit ja molekyylit, joiden liikelakien selvittämiseen tarvitaan *kvanttimekaniikkaa*.
[3] Eli esimerkiksi alle 5 % valon nopeudesta (15 000 km/s). Maassa tai lähiavaruudessa tämän rajan ylittävät käytännössä vain avaruudesta saapuvat tai hiukkaskiihdyttimien tuottamat alkeishiukkaset

Esimerkki 4.1.1. Kirja pöydällä ja lattialla vierivä pallo.
Kirjaan kohdistuu kaksi voimavektoria: alaspäin suuntautuva painovoima ja ylöspäin suuntautuva pöydän pinnan tukivoima. Näiden vektorien summa $\boldsymbol{f}$ on nolla(vektori), joten jatkavuuden lain mukaan kirjan liiketila ($\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$) pysyy muuttumattomana eli kirja pysyy levossa.

Myös lattialla *kitkattomasti* vierivään palloon kohdistuvat samat voimat, jotka kumoavat toisensa ja siten $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$. Jatkavuuden lain mukaan $d\boldsymbol{v}/dt = \boldsymbol{0}$ eli nopeus $\boldsymbol{v}$ pysyy vakiona, joten pallo jatkaa siis tasaista suoraviivaista liikettään.

Käytännössä vierivään palloon kohdistuu kolmaskin voima, nimittäin liikesuunnalle vastakkainen *liikekitkavoima* $\boldsymbol{f}_k$. Silloin kokonaisvoima $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_k \neq \boldsymbol{0}$, ja sen vaikutuksesta pallon liikenopeus muuttuu (hidastuu) eli $d\boldsymbol{v}/dt \neq \boldsymbol{0}$, kunnes pallo pysähtyy.

Newtonin II laki (dynamiikan peruslaki)
Kappaleen kiihtyvyys on suoraan verrannollinen kappaleeseen vaikuttavaan kokonaisvoimaan ja kääntäen verrannollinen kappaleen massaan.

Matemaattisesti ilmaistuna:
$$d\boldsymbol{v}/dt = \boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}/m \quad \text{tai} \quad d^2\boldsymbol{r}/dt^2 = \boldsymbol{f}/m.$$

Lain II matemaattisessa versiossa vektoreilla $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}$ ja $\boldsymbol{a}$ on sama merkitys kuin laissa I ja skalaari m on kappaleen massa. Vaihtoehtoinen muotoilu (jossa vektori $\boldsymbol{r}$ on kappaleen paikkavektori) seuraa[1] siitä, että nopeus on paikan derivaatta, $d\boldsymbol{r}/dt = \boldsymbol{v}$, ja siksi kiihtyvyys on paikan toinen derivaatta[2] eli $d^2\boldsymbol{r}/dt^2 = d\boldsymbol{v}/dt = \boldsymbol{a}$.

Dynamiikan peruslaki voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$(1) \qquad \boldsymbol{f} = m(d\boldsymbol{v}/dt) = m\boldsymbol{a}\,,$$

mistä näemme, että (koska m on positiivinen skalaarivakio) kappaleen kiihtyvyys $\boldsymbol{a}$ ja siihen kohdistuva kokonaisvoima $\boldsymbol{f}$ ovat aina samansuuntaiset

[1] Ks. esim. 3.4.1.
[2] Tässä derivaatat ovat aikaderivaattoja, kuten useimmissa fysikaalisissa tarkasteluissa.

Dynamiikan peruslaki kirjoitetaan usein myös muotoon

(2) $\boldsymbol{f} = d\boldsymbol{p}/dt$,

missä vektori $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ on kappaleen *liikemäärä*. Muoto (2) seuraa yhtälöstä (1), koska massa m on vakio. Tällöin vakiotekijän siirron sallivan derivoimissäännön (ks. kpl 3.3.) perusteella on $m(d\boldsymbol{v}/dt) = d(m\boldsymbol{v})/dt = d\boldsymbol{p}/dt$.

Huomautus 4.1.1. Inertian laki on dynamiikan peruslain erikoistapaus.
Jos kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$, niin dynamiikan peruslain mukaan on myös $d\boldsymbol{v}/dt = \boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}/m = \boldsymbol{0}$. Näemme siis, että inertian laki seuraa erikoistapauksena dynamiikan peruslaista.

Esimerkki 4.1.2. Keskeisvoima ympyräliikkeessä, jatkoa esimerkkiin 3.4.1.
Esimerkissä 3.4.1. käsittelimme tasaisessa ympyräliikkeessä (kulmanopeus ω on vakio) olevaa kappaletta. Totesimme, että kappaleella on hetkellä t kiihtyvyysvektori

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\omega^2(r\cos\omega t\,, r\sin\omega t) = -\omega^2\boldsymbol{r}\,,$$

joka on kappaleen senhetkiselle paikkavektorille $\boldsymbol{r}$ vastakkaissuuntainen eli osoittaa aina kohti rataympyrän keskipistettä. Jos kappaleen massa on m, niin dynamiikan peruslain nojalla kappaleeseen kohdistuva kokonaisvoimavektori on tällä hetkellä

$$\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a} = -m\omega^2\boldsymbol{r}\,.$$

Keskeiskiihtyvyyden $\boldsymbol{a}$ tavoin myös *keskeisvoima* $\boldsymbol{f}$ suuntautuu aina kohti rataympyrän keskipistettä. Molemmat ovat vastakkaissuuntaisia paikkavektoriin $\boldsymbol{r}$ verrattuna.

Newtonin III laki (voiman ja vastavoiman laki)
Jos kappale vaikuttaa toiseen voimalla $\boldsymbol{f}$, niin jälkimmäinen kappale vaikuttaa edelliseen voimalla $-\boldsymbol{f}$. Voimat ovat samansuuruiset, mutta vastakkaissuuntaiset.

Esimerkki 4.1.3. Kirja pöydällä, auton hinaus sekä Maa ja Kuu.

Esimerkissä 4.1.1. tarkastelimme pöydällä lepäävää kirjaa, jonka todettiin lain I (tai II) perusteella pysyvän paikallaan, koska siihen kohdistuvien kahden voiman (Maan vetovoima ja pöydän tukivoima) summa on nolla. Samassa tilanteessa toteutuu myös laki III, sillä kirjan pöytään kohdistama alaspäin suuntautuva painovoima ja pöydän kirjaan kohdistama ylöspäin suuntautuva tukivoima ovat samansuuruisia, mutta vastakkaissuuntaisia. Huomaa, että jälkimmäisessä tarkastelussa voimat kohdistuvat eri kappaleisiin (pöytään ja kirjaan), mutta edellisessä samaan kappaleeseen (kirjaan).

Voiman ja vastavoiman laki toteutuu myös traktorin hinatessa autoa. Traktori kohdistaa autoon eteenpäin suuntautuvan hinausvoiman $\boldsymbol{f}$ ja auto traktoriin taaksepäin suuntautuvan jarrutusvoiman $-\boldsymbol{f}$. Tilanne on tämä hinausta aloitettaessa ennen kuin auto nytkähtää liikkeelle (autoon kohdistuvan hinausvoiman ylittäessä tienpinnan autoon kohdistaman kitkavoiman) ja myös hinauksen aikana.

Kun Kuu kiertää Maata, niin kumpikin kohdistaa toiseen samansuuruisen, mutta vastakkaissuuntaisen vetovoiman.

Huomautus 4.1.2. Kiihtyvyyden ja voiman mittayksiköt.
Kiihtyvyys a ja voima f ovat mitattavissa olevia fysikaalisia suureita[1]. Molemmat ovat johdannaissuureita, jotka määritellään muiden suureiden avulla ja yksikötkin seuraavat näistä määritelmistä.

Kiihtyvyys määritellään nopeuden (vauhdin) muutoksena aikayksikössä eli kaavalla

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

missä Δv tarkoittaa nopeuden muutosta ajassa Δt. Kiihtyvyyden yksikkö on siis nopeuden yksikkö (m/s) jaettuna ajan yksiköllä (s) eli ”metri per sekunti toiseen” ($\mathrm{m/s^2}$). Tämä merkitään usein hakasulkeiden avulla

$$[a] = \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} = \frac{\mathrm{m/s}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},$$

[1] Tässä a ja f ovat skalaarisuureita eli vastaavien vektoreiden itseisarvoja $a = |\boldsymbol{a}|$ ja $f = |\boldsymbol{f}|$. Vektorisuureen yksikkö on sama kuin sen itseisarvon yksikkö.

missä merkintä $[a]$ tarkoittaa suureen a yksikköä eli *dimensiota*.

Voiman yksiköksi saadaan Newtonin II lain skalaariversion $f = ma$ perusteella[1]

$$[f] = [ma] = [m][a] = \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 1\ \mathrm{N}$$

eli ”kilogramma kertaa metri per sekunti toiseen”, jolle on annettu oma nimi ”Newton” ja lyhenne N.

Newtonin gravitaatiolaki (yleinen vetovoimalaki)

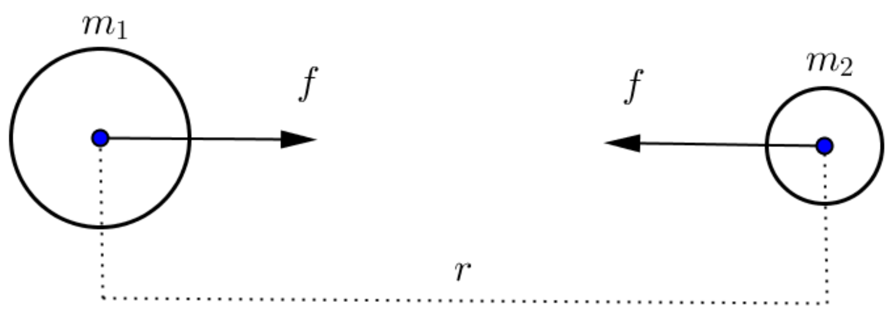
Kaksi massallista kappaletta vetää toisiaan puoleensa voimalla f, joka on suoraan verrannollinen kappaleiden massoihin m_1 ja m_2 ja kääntäen verrannollinen niiden massakeskipisteiden välisen etäisyyden r neliöön.

Matemaattisesti ilmaistuna

$$f = k \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

missä k on verrannollisuuskerroin[2], jonka mittauksilla määritetty arvo SI-yksiköissä on

$$k \approx 6{,}67428 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}.$$



KUVIO 22. Gravitaatiolain mukaan kaikki massat m_1 ja m_2 kohdistavat toisiinsa samansuuruiset, mutta vastakkaissuuntaiset voimat.

---

[1] Aiemmin sovitun mukaisesti merkitsemme tässä kirjassa Newtonin mekaniikan voimaa pienellä kirjaimella $\boldsymbol{f}$ (vektorina) tai f (skalaarina), vaikka kirjainta f käytetään fysiikassa yleisesti tarkoittamaan värähdysliikkeen taajuutta eli frekvenssiä.
[2] Tätä verrannollisuuskerrointa kutsutaan *gravitaatiovakioksi* ja sitä merkitään yleensä kirjaimella G.

Esimerkki 4.1.4. Maapallon ja kirjan välinen vetovoima.

Kuinka suuren vetovoiman Maa kohdistaa esineeseen, jonka massa on 1 kg, kun esine on **a)** puutarhapöydällä, **b)** lentokoneessa 10 km korkeudella, **c)** satelliitissa 100 km korkeudella maanpinnasta?

Tiedämme, että Maan massa $m_1 \approx 5{,}9737 \cdot 10^{24}$ kg ja esineen massa $m_2 = 1$ kg.

a) Massojen välinen etäisyys on sama kuin Maan säde 6380 km $= 6{,}38 \cdot 10^6$ m. Newtonin gravitaatiolain mukaan Maa kohdistaa kirjaan vetovoiman

$$f = k \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$\approx 6{,}67428 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot \frac{5{,}9737 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg} \ \ \cdot 1\ \mathrm{kg}}{(6{,}38 \cdot 10^6\ \mathrm{m})^2}$$

$$\approx 9{,}8\ \mathrm{N}\,.$$

b) Nyt etäisyys on 10 km pitempi eli 6390 km $= 6{,}39 \cdot 10^6$ m. Sijoittamalla tämä arvo vetovoiman kaavaan muuttujan r paikalle ja suorittamalla laskut saamme kahden numeron tarkkuudella saman tuloksen kuin edellisessä kohdassa.

$$F \approx 9{,}8\ \mathrm{N}\,.$$

c) Nyt sijoitamme kaavaan $r = 6480$ km $= 6{,}48 \cdot 10^6$ m. Laskujen jälkeen saamme

$$F \approx 9{,}5\ \mathrm{N}\,.$$

Maan esineeseen kohdistamaa vetovoimaa kutsutaan *painovoimaksi* tai esineen *painoksi*. Huomaamme, että esineen pysyessä maanpinnan läheisyydessä (alle 10 km korkeudella) sen paino pysyy likipitäen samana.

Esimerkissä laskimme yksikkömassaan $m_2 = 1$ kg kohdistuvan painovoiman (9,8 N). Jos esineen massa onkin m kg, niin siihen kohdistuva painovoima on m-kertainen eli $f = 9{,}8m$ (N). Jos tämä massa päästetään putoamaan vapaasti, niin se joutuu kiihtyvään liikkeeseen. Putoamisliikkeen kiihtyvyys a määräytyy Newtonin II lain ($f = ma$) perusteella. Sen mukaan on

$$f = 9{,}8m = ma\,,$$

josta

$$a = 9{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

Näemme, että maanpinnan läheisyydessä putoavan kappaleen kiihtyvyys on kappaleen massasta riippumaton vakio. Kaikki massat putoavat samalla kiihtyvyydellä (mikäli ilman vastusta ei oteta huomioon). Tämän seikan huomasi ensimmäisenä Galileo Galilei vuoden 1600 tienoilla ja hänen mukaansa vakiosuuruista putoamiskiihtyvyyttä Maan pinnalla merkitään symbolilla g.

Galilein putouslaki ja kappaleen paino

Maanpinnan läheisyydessä kaikki kappaleet – niiden massasta riippumatta – saavat vapaasti pudotessaan (ilmattomassa tilassa) saman vakiokiihtyvyyden $g \approx 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$.

Maanpinnan läheisyydessä olevan kappaleen paino f (Maan siihen kohdistama gravitaatiovoima) on dynamiikan peruslain mukaan

$$f = mg$$

Newton osoitti vajaa sata vuotta myöhemmin, että Galilein putouslaki seuraa välittömästi gravitaatiolaista ja dynamiikan peruslaista.

4.2. Liikeyhtälöt

Fysikaalisia ilmiöitä tutkittaessa pyritään yleensä löytämään tarkasteltavaa systeemiä (esim. maahan putoavaa kappaletta, Aurinkoa kiertävää planeettaa tai generaattorin synnyttämää sähkömagneettista kenttää) koskevat *liikeyhtälöt*. Nämä yhtälöt ilmaisevat, miten systeemin tila (esim. putoavan kappaleen etäisyys maanpinnasta) riippuu ajasta. Mistä liikeyhtälöt sitten saadaan? Ensimmäisenä keinona tulevat mieleen kokeelliset mittaukset. Tutkittavaa ilmiötä toistetaan ja mitataan valitun tilamuuttujan x arvoja eri ajanhetkinä t. Saadusta aineistosta yritetään havaita matemaattisena yhtälönä $x = x(t)$ ilmaistavissa oleva riippuvuus. Tuo yhtälö on sitten ehdolla liikeyhtälöksi. Toinen tapa on soveltaa tutkittavaan systeemiin tunnettuja fysiikan lakeja ja johtaa niistä liikeyhtälö matemaattisella päättelyllä. Fyysikot ovat tyytyväisiä vasta sitten, kun liikeyhtälö on perusteltu molemmilla tavoilla.

Esimerkki 4.2.1. Putoavan vasaran liikeyhtälön johtaminen mekaniikan laeista. Esimerkissä 3.1.1. tarkastelimme 45 m korkeudelta putoavaa vasaraa, jonka liikeyhtälö oli valmiiksi annettu muodossa

$$(*) \qquad h = h(t) = 45 - 5t^2,$$

missä h on etäisyys maanpinnasta ja t on putoamiseen kulunut aika.

Näytämme nyt, miten tämä liikeyhtälö seuraa edellisessä kappaleessa esitetyistä mekaniikan laeista.

Galilein putouslain mukaan vasara joutuu putoamishetkellä $(t = 0)$ kiihtyvään liikkeeseen, jonka vakiokiihtyvyys on g. Vasara liikkuu alaspäin ja sen liikenopeus $v = v(t)$ kasvaa. Lyhyen aikavälin dt aikana nopeus kasvaa määrällä dv, joten kiihtyvyys on dv/dt eli nopeuden derivaatta ajan suhteen. Mutta Galilein lain mukaan kiihtyvyydellä on vakioarvo g, joten saamme siis yhtälön

$$(1) \qquad \frac{dv}{dt} = g\,.$$

Koska ajasta riippuvan muuttujan $v = v(t)$ derivaatta on vakio g, niin derivoimissäännöistä (ks. kpl 3.3.) seuraa, että $v = v(t) = gt + b$, missä b on jokin vakio. Mutta tiedämme, että hetkellä $t = 0$ nopeuskin on nolla, joten vakion b täytyy olla nolla. Näin olemme saaneet selville lausekkeen, joka ilmaisee vasaran liikenopeuden hetkellä t :

$$(2) \qquad v = v(t) = gt\,.$$

Saadaksemme vielä selville vasaran paikkaa (etäisyys maanpinnasta) kuvaavan muuttujan $h = h(t)$ riippuvuuden ajasta t tarkastelemme lyhyttä aikaväliä hetkestä t hetkeen $t + dt$. Tuona aikana vasaran etäisyys maasta ehtii muuttua pienellä määrällä $dh = h(t + dt) - h(t)$. Vasaran aikavälillä kulkema lyhyt matka on siis dh ja vasaran keskinopeus ko. Aikavälillä on matka jaettuna siihen kuluneella ajalla eli dh/dt. Mutta aikavälin pituus dt voidaan ajatella miten lyhyeksi tahansa (lähestyvän nollaa), jolloin kyseinen keskinopeus lähestyy arvoa

$-v(t)$ eli nopeutta aikavälin alussa hetkellä t. (Miinusmerkki, koska liike suuntautuu alaspäin h-akselin negatiiviseen suuntaan.) Näin saamme yhtälön

(3) $$\frac{dh}{dt} = -v(t) = -gt$$

joten muuttujan $h = h(t)$ aikaderivaatta on

$$\frac{dh}{dt} = -gt\,.$$

Edellä mainituista derivoimissäännöistä seuraa nyt, että

$$h = h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + d\,,$$

missä d on vakio. Mutta tiedämme, että liikkeen alussa hetkellä $t = 0$ vasaran etäisyys maanpinnasta on $h(0) = 45$, joten täytyy olla $d = 45$.
Näin olemme saaneet liikeyhtälön

(4) $$h = h(t) = 45 - \frac{1}{2}gt^2 \approx 45 - 5t^2\,,$$

koska yhden numeron tarkkuudella. Näin olemme johtaneet putoavan vasaran liikeyhtälön Galilein putoamislaista, joka puolestaan on Newtonin gravitaatiolain ja dynamiikan peruslain seuraamus.

Huomautus 4.2.1. Ratkaisu integroimalla.
Edellisen esimerkin differentiaaliyhtälöt (1) ja (3) voidaan ratkaista myös esimerkissä 3.6.3. esitetyllä tavalla eli integroimalla. Jos yhtälö (1) kerrotaan tekijällä dt saadaan yhtälö

$$dv = g\;dt\,,$$

jossa muuttujat v ja t on erotettu eri puolille. Integroimalla puolittain saadaan

$$\int 1 \cdot dv = \int g \cdot dt\,,$$

eli integroimissääntöjen perusteella

$$v = v(t) = gt + b\,,$$

jossa molempien puolien integroimisvakiot on yhdistetty oikealle puolelle. Tämän jälkeen vakio b määritetään alkuehdon $v(0) = 0$ perusteella kuten esimerkissäkin. Samoin voidaan menetellä myös yhtälön (3) tapauksessa.

Huomautus 4.2.2. Edellisen esimerkin 4.2.1. käsittely ilman derivaattoja.
Edellä johdimme putoavan vasaran liikeyhtälön käyttämällä derivaattoja dh/dt ja dv/dt sekä differentiaalilaskennan sääntöjä.

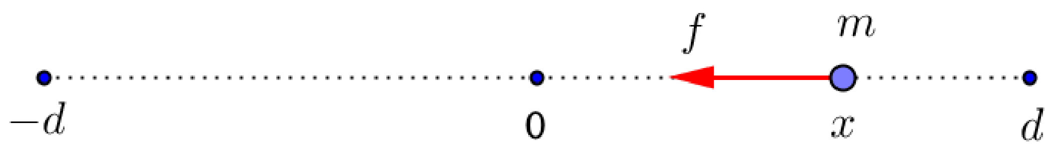
Tulos (2) voidaan kuitenkin perustella myös seuraavasti: Putoamisliikkeellä on Galilein lain mukaan koko ajan sama vakiokiihtyvyys g. Niinpä jokaisella aikavälillä Δt tapahtunut nopeuden muutos Δv toteuttaa yhtälön $\Delta v/\Delta t = g$. Tarkastelemme aikaväliä $\Delta t = t - 0 = t$ (alkuhetkestä hetkeen t) , jonka aikana nopeuden muutos on $\Delta v = v(t) - v(0) = v(t)$. Täytyy siis olla $v(t)/t = g$, josta $v(t) = gt$.

Tämän jälkeen liikeyhtälö (4) voidaan perustella seuraavasti: Tarkastellaan samaa aikaväliä liikkeen alkuhetkestä hetkeen t. Aikavälin alussa nopeus on 0 ja lopussa gt. Koska kiihtyvyys on vakio, niin nopeus kasvaa tasaisesti, joten aikavälin *keskinopeus* on alkunopeuden (0) ja loppunopeuden (gt) keskiarvo $gt/2$. Vasaran aikavälillä kulkema matka y saadaan kertomalla keskinopeus aikavälin pituudella t, joten $y = gt/2 \cdot t = gt^2/2$. Tällöin etäisyys maanpinnasta $h = h(t) = 45 - gt^2/2 \approx 45 - 5t^2$.

Yllä esitetty päättely on tässä tapauksessa yksinkertaisempi kuin edellisessä esimerkissä. Silti mainitun esimerkin (ja sitä seuraavan huomautuksen) kaltaiseen differentiaali- ja integraalilaskennan käyttöön kannattaa totutella, koska se toimii yleisesti muissakin tilanteissa.

Esimerkki 4.2.2. Harmoninen värähtely.
Tarkastelemme ideaaliseen jouseen kiinnitettyä pientä palloa, jonka massa on m. Jousta venytetään vetämällä pallo etäisyydelle d lepoasemastaan. Kun ote irrotetaan, pallo joutuu jousivoiman vaikutuksesta edestakaiseen värähdysliikkeeseen. (*Ideaalisuus* tarkoittaa, että värähtelyn oletetaan jatkuvan päättymättä saman laajuisena. *Reaalisen* jousen värähtely

vaimenee vähitellen kitkan ja jousen sisäisten vastusvoimien vaikutuksesta.) Alla olevassa kuviossa 23 tämä *harmoninen* värähdysliike on pelkistetty lukusuoran välillä $-d \leq x \leq d$ tapahtuvaksi massapisteen m liikkeeksi, jonka *harmoninen* voima $f = -kx$ saa aikaan (tässä $k > 0$ on ns. *jousivakio*).



KUVIO 23. Ideaaliseen jouseen kiinnitetty massapiste m värähtelee lepoasemansa $x = 0$ molemmin puolin ääriasentojen $x = -d$ ja $x = d$ välillä. (Jousta ei ole piirretty kuvioon.) Massaan kohdistuva *harmoninen* jousivoima f on verrannollinen poikkeamaan x ja sille vastakkaissuuntainen eli suuntautuu kohti lepoasemaa; toisin sanoen $f = -kx$, missä k on positiivinen verrannollisuuskerroin.

Haluamme saada selville harmonisessa värähdysliikkeessä olevan massapisteen m liikeyhtälön, ts. yhtälön $x = x(t)$, joka kertoo massapisteen sijainnin x hetkellä t.

Sovimme, että kello käynnistetään $(t = 0)$ hetkellä, jolloin massapiste ohittaa oikealle liikkuessaan lepoaseman $(x = 0)$. Tästä seuraa, että etsittävälle funktiolle $x(t)$ ovat voimassa seuraavat *alkuehdot*:

(ae1) $x(0) = 0$,

(ae2) funktion $x(t)$ arvot vaihtelevat välillä $-d \leq x(t) \leq d$.

Kohdassa x olevaan massapisteeseen kohdistuu jousivoima $f = -kx$. Se aiheuttaa massapisteen kiihtyvän liikkeen, jossa on voimassa Newtonin II laki $f = ma$. Saamme siis yhtälön

(1) $ma = -kx.$

Mutta kiihtyvyys on nopeuden v derivaatta ja paikan x toinen derivaatta eli

(2) $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$.

Sijoittamalla tämän yhtälöön (1) ja jakamalla massalla m saamme *differentiaaliyhtälön*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x\,. \tag{3}$$

Siinä ratkaistavana tuntemattomana x on funktio $x(t)$, joka antaa etsimämme liikeyhtälön. Yhtälön (3) kaltaisen differentiaaliyhtälön ratkaisemiseen on kehitetty standardimenetelmiä, mutta tässä tyydymme ”valistuneen arvauksen” menetelmään. Aluksi yksinkertaistamme yhtälöä merkitsemällä positiivisen vakion k/m neliöjuurta kirjaimella ω (eli $\omega = \sqrt{k/m}$), jolloin

$$\frac{k}{m} = \omega^2\,, \tag{4}$$

ja yhtälö (3) saa muodon

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \qquad [\text{ eli } x''(t) = -\omega^2 x(t)]. \tag{3}$$

Näemme, että ratkaisufunktion $x(t)$ toinen derivaatta on sama funktio kerrottuna vakiotekijällä $-\omega^2$. Kun katsomme derivoimissääntöjä (s. 34), huomaamme, että funktio $\sin \omega t$ voisi täyttää tämän ehdon. Sen ensimmäinen derivaatta on $\omega \cos \omega t$, ja toinen derivaatta on $-\omega^2 \sin \omega t$. Yhtälöllä (3) on siis ratkaisu $x_1(t) = \sin \omega t$. Helposti nähdään, että myös $x_2(t) = \cos \omega t$ on (3):n ratkaisu. Kumpaankin voidaan lisätä eteen minkä tahansa vakiokertoimen ja saadut funktiot ovat edelleen (säännön 2, s. 34 perusteella) ratkaisuja. Edelleen (säännön 3) perusteella niiden summakin on ratkaisu. Näin saamme lopulta differentiaaliyhtälön (3) *yleisen* ratkaisun

$$x(t) = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t\,, \tag{4}$$

missä c_1 ja c_2 ovat vapaasti valittavia vakioita[1].

Meidän on nyt valittava kerroinvakioille sellaiset arvot, että käsiteltävää värähdysliikettä koskevat alkuehdot (ae1) ja (ae2) toteutuvat.

---

[1] Matemaatikot ovat todistaneet, että kaikki yhtälön (3) ratkaisufunktiot ovat tyyppiä (4).

Ehdon (ae1) perusteella täytyy olla $x(0) = 0$. Sijoittamalla ratkaisussa (4) aikamuuttujalle arvo $t = 0$ saamme $x(0) = c_1 \sin(0) + c_2 \cos(0) = c_2$, joten täytyy olla $c_2 = 0$. Näin ollen ratkaisufunktiomme sievenee muotoon

(5) $$x(t) = c_1 \sin \omega t\ .$$

Koska sinifunktion arvot vaihtelevat välillä $-1 \leq \sin \omega t \leq 1$, näemme, että funktion $x(t)$ arvot vaihtelevat välillä $-c_1 \leq x(t) \leq c_1$. Ehdon (ae2) perusteella täytyy siis vakion c_1 olla joko d tai $-d$. Meidän on valittava positiivinen arvo $c_1 = d$, jotta massapisteen liike nollahetkellä suuntautuisi oikealle (kuten alussa sovimme). Näin saamme lopulta differentiaaliyhtälölle (3) alkuehtomme täyttävän ratkaisun

(H) $$x = x(t) = d \sin \omega t\ \text{, missä } \omega = \sqrt{k/m}$$

joka on etsimämme harmonisen värähdysliikkeen liikeyhtälö. Tässä yhtälössä esiintyy kaksi parametria d ja ω. Edellinen määrää värähtelyn laajuuden ja jälkimmäinen värähtelyn taajuuden (frekvenssin). Termi ωt voidaan ajatella kulmana (radiaaneissa), joka kasvaa ajan t mukana. Kun kulma ωt kasvaa määrällä 2π, niin $\sin \omega t$ palaa samaan arvoon, koska $\sin(\omega t + 2\pi) = \sin \omega t$), eli massapiste on suorittanut yhden kokonaisen värähdyksen. Värähtelyn frekvenssin määräävä vakio $\omega = \sqrt{k/m}$ riippuu puolestaan jousivakiosta k (jousen jäntevyydestä) ja siihen kiinnitetyn massan m suuruudesta. Jäntevyyden kasvattaminen suurentaa frekvenssiä, mutta massan kasvattaminen pienentää sitä.

On mielenkiintoista panna merkille, että harmonisen värähtelijän liikeyhtälö $x(t) = d \sin \omega t$ on samanmuotoinen kuin esimerkissä 3.4.1. käsitellyn tasaisessa ympyräliikkeessä olevan hiukkasen liikeyhtälö $y = y(t) = r \sin \omega t$. Jälkimmäisessähän termi ωt tarkoittaa aivan oikeata geometrista kulmaa eli ympyräradalla kiertävän kappaleen ajassa t kulkemaa kaarta vastaavaa keskuskulmaa.

* * * * *

Huomautus 4.2.2 Nopeus ja kiihtyvyys harmonisessa värähdysliikkeessä.
Edellisessä esimerkissä johdetun harmonisen värähtelijän liikeyhtälön (H) avulla voimme laskea massapisteen liikenopeuden $v(t)$ ja kiihtyvyyden $a(t)$ millä tahansa ajanhetkellä t. Nopeus on paikan ensimmäinen ja kiihtyvyys toinen derivaatta, joten

(1) $\quad v = v(t) = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d(d\sin\omega t)}{dt} = d\omega\cos\omega t,$ [Huom! kirjaimella d kaksi eri roolia[1]]

(2) $\quad a = a(t) = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d(d\omega\cos\omega t)}{dt} = -d\omega^2\sin\omega t\,.$

Yhtälöstä (1) näemme, että massapisteen nopeus on nolla, kun $\cos\omega t = 0$ eli kun $\omega t = \pi/2 + n\pi$. Tällöin massapisteen paikka on $x = d\sin\omega t = d\sin(\pi/2 + n\pi) = \pm d$. Tämä tulos on intuitiivisesti ymmärrettävä, sillä massapiste on hetkellisesti levossa välin $-d \le x \le d$ päätepisteissä $x = \pm d$. Nopeus on suurimmillaan ($v = d\omega$), kun $\cos\omega t = 1$ eli kun $\omega t = n \cdot 2\pi$. Tällöin massapisteen paikka on $x = d\sin\omega t = d\sin(n \cdot 2\pi) = 0$ eli lepoasemassa.

Yhtälöstä (2) näemme, että massapisteen kiihtyvyys on nolla, kun $\sin\omega t = 0$. Tällöin massapisteen paikka on $x = d\sin\omega t = d \cdot 0 = 0$ eli lepoasemassa. Kiihtyvyyden itseisarvo on suurimmillaan ($|a| = |d|\omega^2$), kun $\sin\omega t = \pm 1$ eli kun $\omega t = \pi/2 + n\pi$. Tällöin massapisteen paikka on $x = d\sin\omega t = d\sin(\pi/2 + n\pi) = \pm d$ eli heilahdusvälin päätepisteissä.

Huomautus 4.2.3 Mittayksiköiden tarkistus harmonisessa värähdysliikkeessä. Jousivakion k yksikkö (eli *dimensio*) määräytyy yhtälöstä $f = -kx$, josta $k = -f/x$ ja sen perusteella $[k] = [f]/[x] = \mathrm{N/m} = (\mathrm{kg \cdot m/s^2})/\mathrm{m} = \mathrm{kg/s^2}$. Tekijän $\omega = \sqrt{k/m}$ dimensioksi saadaan silloin $[\omega] = \sqrt{[k]/[m]} = \sqrt{(\mathrm{kg/s^2})/\mathrm{kg}} = \sqrt{1/\mathrm{s^2}} = 1/\mathrm{s}$, joten liikeyhtälössä (H) esiintyvän "kulman" ωt dimensio on $[\omega t] = [\omega][t] = (1/\mathrm{s}) \cdot \mathrm{s} = 1$ eli paljas luku, kuten "kulmalle" sopiikin. Näin ollen liikeyhtälö (H) antaa paikalle $x = d\sin\omega t$ dimension $[x] = [d][\sin\omega t] = \mathrm{m} \cdot 1 = \mathrm{m}$, kuten pitääkin.

Nopeuden v ja kiihtyvyyden a dimensioiksi saamme (1):n ja (2):n perusteella

$$[v] = [d\omega\cos\omega t] = [d][\omega][\cos\omega t] = \mathrm{m} \cdot (1/\mathrm{s}) \cdot 1 = \mathrm{m/s}\ ,$$

$$[a] = [d\omega^2\cos\omega t] = [d][\omega]^2[\cos\omega t] = \mathrm{m} \cdot (1/\mathrm{s^2}) \cdot 1 = \mathrm{m/s^2}\ ,$$

kuten kuuluukin.

[1] Kirjain d esiintyy tässä derivaattamerkinnän osana ja toisaalta myös värähtelyvälin päätekohdan symbolina.

4.3. Energia ja sen säilymislaki

Energia tarkoittaa kykyä tehdä työtä. Kappaleella voi olla liiketilansa vuoksi *kineettistä energiaa* eli *liike-energiaa* ja voimakentässä olevan sijaintinsa vuoksi *potentiaalienergiaa*. Palloon vauhdilla iskeytyvällä mailalla on liike-energiaa, joka tekee työtä sinkoamalla pallon kentälle. Hyppyrimäen harjalle kiipeävä urheilija kerää itseensä painovoimakentän (gravitaatiokentän) potentiaalienergiaa, joka tekee työtä kiidättämällä hänet mäkeä alas ja lennättämällä ilman halki laskeutumispaikalle.

Energiaa merkitään yleensä kirjaimella E, johon voidaan lisätä energian laatua selittävä indeksi: E_{p} = potentiaalienergia ja E_{k} = kineettinen energia.
Määritelmänsä mukaan energialla on sama yksikkö kuin työllä eli joule (ks. Esimerkki 2.4.15.). Siis $[E] = 1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{Nm} = 1\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$.

4.3.1. Kappaleen potentiaalienergia painovoimakentässä

Tarkastelemme maanpinnalla (tai jollakin sovitulla *nollatasolla*) olevaa kappaletta, jonka massa on m. Nostamme kappaletta hitaasti ylöspäin korkeudella h olevalle telineelle. Nostoon tarvittava voima f on sama kuin (ks. Esimerkki 4.1.4.) kappaleen paino eli $f = mg$. Siirtomatka s on sama kuin korkeusero eli $s = h$. Joudumme tekemään siirtotyötä (ks. Esimerkki 2.4.15.) määrän

$$W = fs = fh = mgh$$

Tämä nostotyö varastoituu kappaleeseen[1] potentiaalienergiana, joten telineellä lepäävällä kappaleella on

$$E_{\mathrm{p}} = mgh\ .$$

Huomaa, että potentiaalienergian arvo on suhteellinen sikäli, että se riippuu tekijästä h, joka tarkoittaa etäisyyttä valitusta nollatasosta (esim. maanpinnasta). Jos nollatasoksi sovitaan jokin muu taso (kaivon pohja tai talon kattotasanne) niin lausekkeen $E_{\mathrm{p}} = mgh$ arvo

[1] Tarkemmin sanoen kappaleen ja gravitaatiokentän muodostamaan pariin. Kenttää voidaan kuvaannollisesti ajatella jousena, joka venyy nostettaessa kappaletta ylöspäin.

muuttuu, vaikka itse kappale on pysynyt paikallaan. Käytännössä tarkastellaankin yleensä nollatasosta riippumatonta potentiaalienergian *muutosta* ΔE_p

$$\Delta E_\mathrm{p} = mg \cdot \Delta h\,,$$

jonka korkeuden muutos Δh aiheuttaa.

4.3.2. Kappaleen liike-energia

On ilmeistä, että liikkeessä olevan kappaleen kyky tehdä työtä riippuu kappaleen massasta m ja nopeudesta v. Päättelemme riippuvuuden tarkemman laadun samaan tapaan kuin edellisessä esimerkissä eli laskemalla, kuinka paljon työtä on tehtävä, kun kiihdytetään m-massainen kappale tasaisesti nopeudesta 0 nopeuteen v. Jos kiihdytykseen kuluva aika on Δt, niin vastaava nopeuden muutos on $\Delta v = v - 0 = v$, joten vakiokiihtyvyys on

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - 0}{\Delta t} = \frac{v}{\Delta t}$$

ja Newtonin II lain mukaan kiihdytykseen vaadittava voima on

$$f = ma = \frac{mv}{\Delta t}\,.$$

Kiihdytyksen aikana kuljettu matka s saadaan kertomalla matkaan kulunut aika Δt keskinopeudella v_k, joka on alku- ja loppunopeuden keskiarvo eli $v_k = (0 + v)/2 = v/2$. Niinpä

$$s = \frac{v}{2} \cdot \Delta t = \frac{v \cdot \Delta t}{2}\,,$$

joten tehty kiihdytystyö on

$$W = fs = \frac{mv}{\Delta t} \cdot \frac{v\Delta t}{2} = \frac{1}{2} mv^2\,.$$

Tämä työ varastoituu kappaleeseen liike-energiana, jolle saamme siten lausekkeen

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} mv^2\,.$$

Myös liike-energian arvo on suhteellinen sikäli, että se riippuu kappaleen nopeudesta v, joka puolestaan riippuu käytetystä koordinaatistosta. Esimerkiksi liikkuvassa junassa kävelevän konduktöörin nopeudet (ja liike-energiat) junan suhteen ja asemarakennuksen suhteen ovat erisuuruiset. Toistensa suhteen levossa olevissa koordinaatistoissa mitattuna kappaleella on kuitenkin sama nopeus ja liike-energia.

4.3.3. Energian säilymislaki

Esimerkissä 3.1.1. tarkastelimme 45 m korkeudelta maahan putoavaa vasaraa, jonka liikeyhtälö oli annettu muodossa

$$(*) \qquad h = h(t) = 45 - 5t^2.$$

jossa $h = h(t)$ ilmaisee vasaran etäisyyden maanpinnasta hetkellä t. (Esimerkissä 4.2.1. johdimme tämän liikeyhtälön Newtonin II laista käyttämällä putousliikkeen kiihtyvyydelle likiarvoa $g \approx 10\ \mathrm{m/s^2}$)

Tutkimme vasaran kokonaisenergiaa $E = E_\mathrm{p} + E_\mathrm{k}$ eri ajanhetkinä putoamisen aikana. Oletamme yksinkertaisuuden vuoksi, että vasaran massa $m = 1{,}0$ kg ja kiinnitämme mittauskoordinaatiston maanpintaan, jonka valitsemme myös potentiaalienergian E_p nollatasoksi.

<u>Hetkellä $t = 0$:</u>

Vasara on levossa 45 m korkeudella maasta, joten

$$E_\mathrm{k} = 0\,,$$
$$E_\mathrm{p} = mgh \approx 1{,}0\ \mathrm{kg} \cdot 10\ \mathrm{m/s^2} \cdot 45\ \mathrm{m} = 450\ \mathrm{J}\,,$$

ja kokonaisenergia on

$$E = E_\mathrm{p} + E_\mathrm{k} \approx 450\ \mathrm{J}\,.$$

<u>Hetkellä $t = t$:</u>

Vasara on liikkeessä alaspäin korkeudella $h = h(t) = 45 - 5t^2$ maasta ja sen nopeus on $v = v(t) = dh/dt = -10t$, joten

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}0 \cdot (-10t)^2 = 50t^2 \,,$$
$$E_{\mathrm{p}} = mgh = 1{,}0 \cdot 10 \cdot (45 - 5t^2) = 450 - 50t^2,$$

ja kokonaisenergia on

$$E = E_{\mathrm{p}} + E_{\mathrm{k}} = (450 - 50t^2) + 50t^2 = 450\ \mathrm{J}\,.$$

Näemme, että putoamisen aikana vasaran kokonaisenergia on joka hetki on sama kuin alkutilanteessa. Tässä toteutuu energian säilymislaki.

Energian säilymislaki

Eristetyn[1] systeemin kokonaisenergia[2] säilyy muuttumattomana.

Kun vasara tömähtää maanpintaan, se lakkaa olemasta eristetty systeemi. Törmäyksessä vasara tekee työtä eli luovuttaa energiansa maanpintaan aiheuttamalla rakenteellisia muutoksia ja lämpötilan nousua.

Esimerkki 4.3.3.1. Energian säilyminen planeettaliikkeessä.

Hyvä esimerkki (mekaanisen) energian säilymisestä on Auringon ja Maan muodostama eristetty[3] systeemi. Ellipsin muotoisella kiertoradallaan Maan etäisyys Auringosta vaihtelee hieman. Kun Maa lähenee Aurinkoa, sen potentiaalienergia vähenee ja liike-energia kasvaa. Kun Maa etääntyy Auringosta potentiaalienergia kasvaa ja liike-energia vähenee. Liike- ja potentiaalienergian summa säilyy muuttumattomana.

[1] *Eristetty systeemi* ei ole vuorovaikutuksessa ympäristönsä kanssa. Tässä putoava vasara yksinään muodostaa eristetyn systeemin, kun ilman vastus jätetään huomiotta.
[2] Putoavan vasaran energia on *mekaanista* energiaa eli liike-energiaa ja gravitaatiokentän aiheuttamaa potentiaalienergiaa. Yleisemmin tarkasteltuna energia voi esiintyä muissakin muodoissa (esim. *sähköenergiana*). Myöhemmin tulemme näkemään, että massakin on eräs energian muoto.
[3] Aivan täysin eristetty ei tämäkään systeemi ole. Muut planeetat, asteroidit ja komeetat saattavat vuorovaikuttaa Maa-Aurinko parin kanssa ja tuoda tai viedä energiaa. Käytännössä Maata yksinään (kuten edellä putoavaa vasaraa) voidaan pitää eristettynä systeeminä, koska Auringon massa on 333 000-kertainen Maan massaan verrattuna.

Jos Maan kiertorata olisi ympyrä[1], niin sekä potentiaali- että liike-energia pysyisivät koko ajan vakioina.

Esimerkki 4.3.3.2. Energian säilyminen harmonisessa värähdysliikkeessä.
Esimerkissä 4.2.2. tarkastelimme jouseen kiinnitetyn massapisteen harmonista värähdysliikettä. Johdimme liikeyhtälön

(H) $$x = x(t) = d \sin \omega t \text{ , missä } \omega = \sqrt{k/m}\,,$$

joka ilmoittaa massapisteen paikan x hetkellä t. Massapisteen nopeus (vauhti) samalla hetkellä saatiin derivoimalla paikka x ajan suhteen:

$$v = v(t) = \omega d \cos \omega t\,,$$

jolloin sen liike-energia on

$$\begin{aligned} E_\mathrm{k} &= \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\omega d \cos \omega t)^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 d^2 \cos^2 \omega t \\ &= \frac{1}{2} k d^2 \cos^2 \omega t\,. \qquad [\text{sillä } m\omega^2 = m \cdot \frac{k}{m} = k] \end{aligned}$$

Potentiaalienergia on se venytystyö W, joka on tehtävä massapisteen siirtämiseksi lepoasemasta ($x = 0$) kohtaan $x(t) = d \sin \omega t$. Tämä työ on laskettu alla oleva huomautuksessa 4.3.1. ja tulos on

(1) $$W = E_\mathrm{p} = \frac{1}{2} k d^2 \sin^2 \omega t\,.$$

Näin ollen massapisteen kokonaisenergia on hetkellä t

$$\begin{aligned} E &= E_\mathrm{p} + E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} k d^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2} k d^2 \cos^2 \omega t \\ &= \frac{1}{2} k d^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) \end{aligned}$$

[1] Maan kiertorata on kuitenkin varsin lähellä ympyrää. Maan pienin ja suurin etäisyys Auringosta poikkeavat toisistaan vain n. 3 %.

$$= \frac{1}{2}kd^2.$$

Kokonaisenergia on siis ajasta riippumaton vakio ja energian säilymislaki toteutuu myös harmonisessa värähdysliikkeessä[1].

Huomautus 4.3.1. Jousen potentiaalienergian laskeminen.
Kohdassa x olevan massapisteen potentiaalienergia on se työ $W = W(x)$, joka on tehtävä, kun jousta venytetään lepoasemasta kohtaan a. Kohdassa x olevaan massapisteeseen kohdistuvan jousivoiman itseisarvo on $f = kx$. Kun jousta venytetään lisää hyvin lyhyt matka dx eli kohdasta x kohtaan $x + dx$, niin voimme olettaa jousivoiman pysyvän samansuuruisena ja lisämatkalla dx tehty pieni venytystyö dW on silloin

(1) $$dW = f \cdot dx = kx \cdot dx.$$

Jakamalla yhtälön (1) puolittain tekijällä dx saamme

(2) $$\frac{dW}{dx} = kx\,,$$

josta näemme, että muuttujan W derivaatta x:n suhteen on kx. Derivoimissääntöjen 1 ja 2 (ks. kappale 3.3.) perusteella voimme päätellä, että

$$W = W(x) = \frac{1}{2}kx^2 + b\,,$$

missä c on jokin vakio. Alkuehdosta $W(0) = 0$ seuraa, että vakio $b = 0$, joten kohtaan x venytetyn jousen potentiaalienergia on

$$E_{\mathrm{p}} = W(x) = \frac{1}{2}kx^2.$$

Mutta hetkellä t massapiste on kohdassa $x = d\sin\omega t$, joten tuolla hetkellä potentiaalienergia on

[1] Tässä tarkastellaan ideaalista jousta, jolla ei sisäistä kitkaa. Sen vaikutuksesta todellisen jousen värähtely vähitellen vaimenee ja viimein pysähtyy, kun koko energia on kulunut kitkaa vastaan tehtyyn työhön eli on siirtynyt jousen sisäiseksi lämpöenergiaksi.

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k(d\sin\omega t)^2$$
$$= \frac{1}{2}kd^2\sin^2\omega t\,,$$

mikä todistaa edellisen esimerkin tuloksen (1) oikeaksi.

* * * * * * *

Huomautus 4.3.2. Työ ja energia ovat skalaarisuureita.
Olemme aiemmin (luvussa 2) todenneet, että fysikaaliset suureet ovat joko skalaari- tai vektorisuureita. Energia E kuuluu edelliseen ryhmään yhdessä työn W (joka määriteltiinkin skalaaritulona $W = \boldsymbol{f}\boldsymbol{s}$), massan m ja ajan t kanssa. Näillä skalaarisuureilla ei ole suuntaa päinvastoin kuin vektorisuureilla nopeus $\boldsymbol{v}$, kiihtyvyys $\boldsymbol{a}$ ja voima $\boldsymbol{f}$, jotka erotamme skalaarisuureista lihavoiduilla symboleilla[1].

* * * * * * *

4.4. Liikemäärä ja sen säilymislaki

Kappaleessa 4.1. käsitellessämme Newtonin II lakia (dynamiikan peruslakia) määrittelimme liikemäärän $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ kappaleen massan ja nopeuden tulona. Liikemäärä on siis vektorisuure ja sillä on sama suunta kuin nopeudella. Totesimme myös, että mainittu dynamiikan peruslaki (kappaletta liikuttava voima on massa kertaa kiihtyvyys) voidaan kirjoittaa myös liikemäärän avulla muodossa

$$\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt\,,$$

koska

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m\boldsymbol{a}\,.$$

[1] Nopeuden $\boldsymbol{v}$ itseisarvoa $v = |\boldsymbol{v}|$ eli vauhtia kutsutaan usein (tässäkin tekstissä) nopeudeksi, mutta asiayhteydestä ja käytetystä symbolista selviää kulloinkin, onko kyseessä vektorisuure nopeus vai skalaarisuure vauhti.

Liikemäärän säilymislaki
Suljetun systeemin kokonaisliikeliikemäärä säilyy muuttumattomana eli matemaattisesti ilmaistuna: Jos systeemin kappaleiden liikemäärät ovat $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots\ , \boldsymbol{p}_n$, niin kokonaisliikemäärä $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \ldots + \boldsymbol{p}_n$ säilyy muuttumattomana eli

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{0}\,.$$

Hiukkasten tai kappaleiden muodostama systeemi on *suljettu*, jos siihen ei kohdistu mitään ulkoisia voimia eikä systeemi vaihda ainetta (massaa) ympäristönsä kanssa. Aurinkokuntamme (tai jopa Maa-Aurinko –pari) ovat likimäärin suljettuja systeemejä. Sellainen on myös tasaisella biljardipöydällä vierivien ja keskenään törmäilevien pallojen joukko ennen kuin mikään niistä törmää reunukseen (ulkoinen voima) tai putoaa pussiin (massan menetys).

4.4.1. Liikemäärän säilymislaki seuraa Newtonin laeista.

Jos suljetussa systeemissä on vain yksi kappale (esim. biljardipallo), johon ei siis kohdistu mitään ulkoista voimaa, niin Newtonin I lain perusteella sen nopeus $\boldsymbol{v}$ (suuruus ja suunta) pysyy vakiona ja silloin liikemäärä $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ pysyy myös muuttumattomana.

Jos systeemissä on kaksi kappaletta, joiden liikemäärät eräällä hetkellä ovat $\boldsymbol{p}_1$ ja $\boldsymbol{p}_2$, niin nämä liikemäärät (ja kokonaisliikemäärä $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$) säilyvät samoina niin kauan kun kappaleet eivät vuorovaikuta eli törmää toisiinsa. Törmätessään ne kohdistavat Newtonin III lain mukaan toisiinsa samansuuruiset, vastakkaissuuntaiset voimat. Jos kappale 1 kohdistaa kappaleeseen 2 voiman $\boldsymbol{f}$, niin kappale 2 kohdistaa kappaleeseen 1 voiman $-\boldsymbol{f}$. Silloin kappaleiden liikemäärät muuttuvat Newtonin II lain perusteella siten, että

$$\frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} = -\boldsymbol{f} \quad \text{ja} \quad \frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt} = \boldsymbol{f}\ ,$$

jolloin summan derivoimissäännön (ks. kappale 3.3.) perusteella

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_1)}{dt} = \frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} + \frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt} = -\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} \ ,$$

mistä näemme, että kokonaisliikemäärä $\boldsymbol{p}$ säilyy myös kaikissa systeemin sisäisissä vuorovaikutuksissa (törmäyksissä) muuttumattomana. Koska liikemäärä $\boldsymbol{p}$ on vektori, niin sen säilyminen tarkoittaa, että kaikki komponentitkin säilyvät. Avaruudessa liikemäärällä on kolme komponenttia $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z)$ tai toisin merkittynä $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3)$, ja liikemäärän säilyminen voidaan ilmaista skalaariyhtälöillä

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{dp_2}{dt} = \frac{dp_3}{dt} = 0 \ ,$$

tai lyhyemmin kirjoitettuna

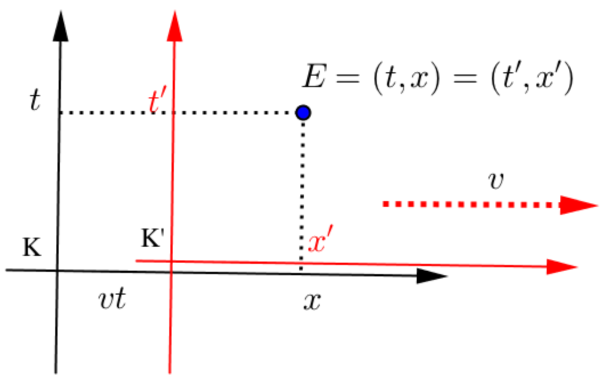
$$\frac{dp_k}{dt} = 0 \ , \qquad \text{missä } k = 1, 2, 3.$$

* * * * * * *

5. SUPPEAN SUHTEELLISUUSTEORIAN KERTAUS

5.1. Inertiaalikoordinaatistot ja Lorentz-muunnos

Tämän kirjasarjan edellisessä osassa (EEA1, luku 7) tarkastelimme inertiaalisia avaruusaikakoordinaatistoja K(t, x, y, z) ja K'(t', x', y', z'), joiden avaruusosat K(x, y, z) ja K(x', y', z') liikkuvat toistensa suhteen tasaisella nopeudella v. Kuviossa 24 on tilanteen yksinkertaistettu havainnollistus. Siinä koordinaatistojen K ja K' samannimiset akselit ovat samansuuntaisia ja koordinaatiston K' origo liikkuu pitkin K:n x-akselia. Avaruusakseleista kuvioon on merkitty vain x- ja x'-akselit. Avaruusajan pisteellä (tapahtumalla) E on kummassakin koordinaatistossa neljä koordinaattia – yksi aikakoordinaatti ja kolme paikkakoordinaattia. Kuviossa on merkitty näkyviin vain yksi paikkakoordinaatti (x tai x'). Kaksi muuta paikkakoordinaattia ovat tässä standardiesimerkissä[1] identtiset eli $y = y'$ ja $z = z'$.



KUVIO 24. Koordinaatiston K' paikkaorigo liikkuu pitkin K:n x-akselia vakionopeudella v. Molempien koordinaatistojen kellot nollataan ($t = t' = 0$) hetkellä, jolloin niiden paikkaorigot ovat päällekkäin eli $x = x' = 0$. Kun K-kello näyttää aikaa t, on K':n paikkaorigo siirtynyt matkan vt.

Albert Einstein osoitti vuonna 1905, että kuvion 24 tilanteessa samalle tapahtumalle E mitatut koordinaatit K:ssa ja K':ssa noudattavat ns. Lorentz-muunnoskaavoja

$$(Lvc) \qquad \begin{cases} t' = \gamma(t - vx/c^2) \\ x' = \gamma(x - vt) \end{cases}, \qquad \gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2},$$

[1] Kun jatkossakin käytämme esimerkkeinä koordinaatistoja K ja K', niin tarkoitamme (ellei toisin mainita) juuri tässä kuvattua standarditilannetta.

missä c on valon nopeus. Todistimme aiemmin (ks. EEA1, kappale 7.3.), että nämä muunnoskaavat seuraavat kahdesta empiirisesti vahvistetusta perusoletuksesta: Galilein suhteellisuusperiaatteesta ja valon nopeuden vakioisuuden periaatteesta. Einsteinin löydös oli yllättävä. Sitä ennen oli pidetty selviönä, että aika on absoluuttista eli koordinaatistosta riippumatonta. Kuvion 1 tilanteessa se tarkoittaisi, että $t' = t$. Näin ei siis ole, vaan sekä aika että paikka[1] ovat suhteellisia, käytetystä koordinaatistosta riippuvia suureita.

Fysikaalisissa tarkasteluissa on yleensä kyse tutkittavien tapahtumien aika- ja paikkaerosta, jotka ovat K:ssa Δt ja Δx sekä vastaavasti K':ssa $\Delta t'$ ja $\Delta x'$. On helppo nähdä, että täsmälleen samat muunnoskaavat pätevät myös näille erotuksille[2]

$$(Lvc - \Delta) \qquad \begin{cases} \Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2) \\ \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \end{cases} , \qquad \gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}\,.$$

Muunnoskaavat (Lvc) ja $(Lvc - \Delta)$ pätevät missä tahansa yksikköjärjestelmässä, esimerkiksi tavallisessa SI-järjestelmässä. Suhteellisuusteoriassa käytetään usein ns. luonnollista eli *relativistista* yksikköjärjestelmää (ks. EEA1, Huomautus 2.1.), jossa ajan yksikkönä on metri (= aika, joka valolta kuluu metrin pituiseen matkaan) ja sen seurauksena valon nopeus $c = 1$ eli paljas luku. Näissä yksiköissä Lorentz-muunnoskaavat sievenevät muotoon

$$(Lv - lu - \Delta) \qquad \begin{cases} \Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x) \\ \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \end{cases} , \qquad \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}\,.$$

Lorentz-muunnos on suhteellisuusteorian kulmakivi, johon perustuvat kaikki tunnetut ja osin yllättävätkin suhteellisuusteorian seuraamukset, joita käsittelimme kirjasarjan ensimmäisessä osassa (ks. EEA1, luku 8).

---

[1] Paikan suhteellisuus on helppo ymmärtää, sillä tapahtuman (esim. Seinäjoen tangofestivaalit) paikkakoordinaatit luonnollisesti muuttuvat, jos sijainti ilmoitetaan Helsingin sijasta Inarista katsoen.

[2] Muunnoskaavoissa esiintyvät tapahtumakoordinaattien arvot t, x, t' ja x' ovat nekin oikeastaan erotuksia, nimittäin kyseisen tapahtuman ja yhteisen origotapahtuman (0, 0) koordinaattien erotuksia.

5.2. Tapahtumaintervallin invarianssi ja sen differentiaalimuoto

Kirjasarjan edellisessä osassa (EEA1, Huomautus 6.5.1) osoitimme, että suhteellisuusteorian perustana olevat Einsteinin aksioomat (suhteellisuusperiaate ja valon nopeuden vakioisuuden periaate) voidaan kiteyttää *tapahtumaintervallin invarianssin periaatteeksi*.

Tapahtumaintervallin invarianssi

Tarkastellaan avaruusajan pisteitä (tapahtumia) E_1 ja E_2 ja mitataan niiden aikaerot Δt ja $\Delta t'$ sekä paikkaerot Δx ja $\Delta x'$ inertiaalikoordinaatistoissa K ja K'. Silloin intervallit[1]

$$(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 \quad \text{ja} \quad (\Delta s')^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 \,,$$

$$(\Delta s)^2 = (\Delta s')^2 \,.$$

Huomautus 1. Luonnollisia yksiköitä käytettäessä invariantti intervalli $\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2$, missä sulkeet on jätetty merkitsemättä.

Huomautus 2. Yleisessä tilanteessa, jolloin paikkaero ei ole x-akselin suuntainen, niin termit $(\Delta x)^2$ ja $(\Delta x')^2$ korvataan intervallin lausekkeessa termeillä $(\Delta r)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$ ja $(\Delta r')^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2$.

Jos tapahtumat E_1 ja E_2 ovat hyvin lähekkäisiä, niin niiden aika- ja paikkaeroja voidaan pitää infinitesimaalisina[2] eli ilmaista differentiaaleina dt ja dx. Silloin myös intervalli on infinitesimaalinen $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2$ (tai luonnollisissa yksiköissä $ds^2 = dt^2 - dx^2$).

Intervallin invarianssi (differentiaalimuoto)

Hyvin lähekkäisten tapahtumien intervalli

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 \qquad (\text{tai } ds^2 = dt^2 - dx^2, \text{kun } c = 1)$$

on sama kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa.

Huomautus. Jos infinitesimaalinen paikkaero ds ei ole x-akselin suuntainen, niin termi dx^2 korvataan intervallin lausekkeessa termillä $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

---

[1] Kutsumme jatkossa tapahtumaintervallia lyhyesti *intervalliksi*.
[2] Termit *infinitesimaalinen* ja *differentiaali* tarkoittavat äärettömän pientä muutosta. Ks. huomautus 3.1.1.

5.3. Intervalli ja ominaisaika

Ominaisaikaa τ käsittelimme jo edellisessä osassa (EEA1, kappale 8.7.). Se on hyödyllinen käsite muotoiltaessa hiukkasten (tai kappaleiden) suhteellisuusteoreettisia liikelakeja.
Jos hiukkanen on inertiaalikoordinaatistossa $\mathrm{K}_0(t_0, x_0)$ levossa[1], niin kahden hiukkasen maailmanviivalla olevan pisteen paikkaero $\Delta x_0 = 0$. Jos aikaero on Δt_0, niin pisteiden välinen intervalli on

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta {t_0}^2 - \Delta {x_0}^2 = c^2 \Delta {t_0}^2 - 0 = c^2 \Delta {t_0}^2$$

tai luonnollisissa yksiköissä $\Delta s^2 = \Delta {t_0}^2$.

Luonnollisissa yksiköissä hiukkasen liikeradan maailmanpisteiden välinen intervalli on siis sama kuin hiukkasen lepokoordinaatistossa K_0 mitattu aikaero. Jos hiukkasella (tai kappaleella) on mukanaan oma kello[2], niin se on levossa K_0:n suhteen ja näyttää sen koordinaattiaikaa t_0, jota kutsumme hiukkasen *ominaisajaksi* τ (tau). Hiukkasen ominaisaika[3] $\tau = t_0$ on siis sama kuin hiukkasen lepokoordinaatiston koordinaattiaika ja myöskin (luonnollisissa yksiköissä) sama kuin intervalli. Kahden tapahtuman välinen ominaisaikaero saadaan siis selville missä tahansa inertiaalikoordinaatistossa mittaamalla tapahtumien välinen aika- ja paikkaero ja laskemalla niiden välinen (invariantti) intervalli.

Ominaisaika pähkinänkuoressa

Jos Δt ja Δx (tai dt ja dx) ovat tasaisessa liikkeessä olevan hiukkasen maailmanviivan pisteiden aika- ja paikkaerot koordinaatistossa $\mathrm{K}(t, x)$, niin hiukkasen *oman kellon* mittaama pisteiden välinen aikaero (*ominaisaikaero*) on

$(\Delta\tau)$ $\quad c^2 \Delta\tau^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2$ $\quad$ (tai lu– yksiköissä: $\Delta\tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2$)

$(d\tau)$ $\quad c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2$ $\quad$ (tai lu– yksiköissä: $d\tau^2 = dt^2 - dx^2$).

Ominaisaikaero on invariantti eli sama laskettuna kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa.

---

[1] Tällöin $\mathrm{K}_0(t_0, x_0)$ on hiukkasen *lepokoordinaatisto*, jossa hiukkasen maailmanviiva on aika-akselin (t_0) suuntainen suora.
[2] Kaikki tietyssä koordinaatistossa *levossa* olevat kellot ajatellaan synkronoiduiksi näyttämään samaa aikaa (Ks. EEA1, huomautus 2.1.).
[3] Käsittelimme ominaisaikaa (*proper time*) jo edellisessä osassa (ks. EEA1, kappale 8.7.)

Esimerkki 5.3.1. Tasaisella nopeudella liikkuva avaruusraketti.

Avaruusraketti liikkuu tasaisella nopeudella v koordinaatiston K positiivisen x-akselin suuntaan. Raketti antaa valomerkin oman kellonsa mukaan tasatunnein. Kuinka pitkä on raketin peräkkäisten valomerkkien välinen aika mitattuna koordinaatiston K kelloilla, jos raketin nopeus v on **a)** $0{,}5c$, **b)** $0{,}9c$, **c)** $0{,}99c$.

Tapahtumien (peräkkäisten valomerkkien) välinen aika on raketin omassa koordinaatistossa yksi tunti, joka on valomerkkien välinen ominaisaikaero $\Delta\tau$. Jos valomerkkien aika- ja paikkaero[1] koordinaatistossa K mitattuina ovat Δt ja Δx, niin silloin on intervallin invarianssin perusteella

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2\Delta\tau^2 = c^2 \cdot 1 = c^2 \,.$$

Mutta tapahtumien paikkaero $\Delta x = v \cdot \Delta t$ on matka, jonka raketti kulkee ajassa Δt. Tässä Δt on juuri kysytty koordinaatistossa K mitattu tapahtumien aikaero. Saamme siis yhtälön

$$c^2\Delta t^2 - v^2\Delta t^2 = c^2 \,,$$

josta ratkaistuna

$$\Delta t = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \,.$$

Saamme siis

a) $\Delta t = \dfrac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \dfrac{c}{\sqrt{c^2 - (0{,}5c)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{0{,}75}} \approx 1{,}15\ \text{h}$,

b) $\Delta t = \dfrac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \dfrac{c}{\sqrt{c^2 - (0{,}9c)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{0{,}19}} \approx 2{,}29\ \text{h}$,

c) $\Delta t = \dfrac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \dfrac{c}{\sqrt{c^2 - (0{,}99c)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{0{,}0199}} \approx 7{,}09\ \text{h}$.

[1] Paikkaero on siis tässä tapahtumien x-koordinaattien erotus Δx. Muut paikkakoordinaatit ovat molemmilla tapahtumilla samat eli $\Delta y = \Delta z = 0$, koska raketti liikkuu vain x-akselin suunnassa.

5.3.2. Ominaisaika epätasaisessa liikkeessä

Edellä esitetyt johtopäätökset liikkuvan hiukkasen ominaisajasta $\Delta\tau$ ovat päteviä vain, kun hiukkasen oma koordinaatisto K_0 on inertiaalinen eli hiukkasen liike on tasaista inertiaaliseen vertailukoordinatistoon K nähden. Jos hiukkasen liike on epätasaista (kiihtyy, hidastuu, suunta vaihtelee), niin ominaisajan Δ-muotoiset lausekkeet eivät ole voimassa, koska hiukkanen ei ole tarkasteluvälin aikana samassa inertiaalikoordinaatistossa.

Differentiaalimuotoinen ominaisaikaeron kaava $(d\tau)$

$$(*) \qquad d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}dx^2 \qquad\qquad (\text{tai lu– yksiköissä:} \quad d\tau^2 = dt^2 - dx^2).$$

on kuitenkin silloinkin voimassa, koska kullakin hetkellä t (eli infinitesimaalisella aikavälillä hetkestä t hetkeen $t + dt$) hiukkasen liikettä voidaan pitää tasaisena (nopeus ei ehdi muuttua äärettömän lyhyenä aikana). Hiukkanen pysyy tuona aikavälinä samassa inertiaalikoordinaatistossa K_0, joka liittyy koordinaatistoon $\mathrm{K}(t, x)$ Lorentz-muunnoksella, mistä kaava $(d\tau)$ seuraa.

Epätasaisessa liikkeessä olevan hiukkasen oman kellon mittaama aika $\Delta\tau$ kahden sen maailmanviivan pisteen P ja Q välillä voidaan siis laskea integroimalla eli summaamalla kaikki infinitesimaaliset ominaisaikahituset $d\tau$. Tällöin on

$$(**) \qquad \Delta\tau = \int_P^Q d\tau = \int_P^Q \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2}dx^2} = \int_P^Q dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \int_P^Q \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}\,dt,$$

missä $v(t)$ on hiukkasen nopeus K-hetkellä t.

5.4. Avaruusmatka vakiokiihtyvyydellä Maan suhteen

TEHTÄVÄ: Oletetaan, että Maasta lähtenyt raketti etenee Maahan kiinnitetyn $\mathrm{K}t, x, y, z)$-koordinaatiston x-akselin suuntaan vakiokiihtyvyydellä $a = dv/dt = 10\ \mathrm{m/s^2}$. **(a)** Laske raketin nopeus Maan suhteen Maan kellon mukaan **(i)** 10 sekunnin, **(ii)** 100 vuorokauden kuluttua lähdöstä. **(b)** Kuinka pitkä aika lähdöstä on kulunut raketin kellon mukaan saavutettaessa nämä nopeudet?

RATKAISU:

(a) Jos Newtonin mekaniikka olisi oikein, niin raketin nopeus Maahetkellä[1] t lähdöstä lukien saataisiin yksinkertaisesti tasaisesti kiihtyvän liikkeen nopeuskaavalla $v(t) = at$. Tämä ei kuitenkaan voi olla oikein, sillä sen mukaan raketti voisi riittävän pitkän ajan kuluessa saavuttaa mielivaltaisen suuria nopeuksia. Mutta suhteellisuusteorian ja empiirisen evidenssin mukaan mikään liikkuva objekti ei voi ylittää valon nopeutta. Meidän on tutkittava huolellisemmin raketin Maanopeuden $v(t)$ riippuvuutta koordinaattiajasta t.

Saadaksemme selville funktion $v(t)$ oikean lausekkeen tarkastelemme raketin Maanopeuksia "peräkkäisinä" ajanhetkinä t ja $t + \Delta t$, missä Δt on hyvin pieni. Huomaamme, että näillä ajanhetkillä raketti on kahdessa eri inertiaalikoordinaatistossa. Hetkellä t raketti on koordinaatistossa K', joka liikkuu Maan suhteen nopeudella $v(t)$. Hetkellä $t + \Delta t$ raketti on koordinaatistossa K'', joka liikkuu Maan suhteen nopeudella $v(t + \Delta t)$. Lyhyellä aikavälillä hetkestä t hetkeen $t + \Delta t$ voimme olettaa Newtonin mekaniikan olevan voimassa ja sen mukaan koordinaatisto K'' liikkuu koordinaatiston K' suhteen nopeudella $g\Delta t$. Tällöin Maanopeus $v(t + \Delta t)$ on nopeuksien $v_1 = v(t)$ ja $v_2 = a\Delta t$ relativistinen summanopeus (ks. EAA1, kappale 7.10.).

$$(1\text{–lu}) \qquad v(t+\Delta t) = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2} = \frac{v(t) + a\Delta t}{1 + v(t)\cdot a\Delta t}, \qquad [\text{Huom! luonnolliset yksiköt käytössä.}]$$

josta saamme erotukseksi

$$v(t+\Delta t) - v(t) = \frac{v(t) + a\Delta t}{1 + v(t)\cdot a\Delta t} - v(t)$$

$$= \frac{[v(t) + a\Delta t]}{1 + v(t)\cdot a\Delta t} - \frac{v(t)[1 + v(t)\cdot a\Delta t]}{1 + v(t)\cdot a\Delta t}$$

$$= \frac{a\Delta t - v(t)^2\cdot a\Delta t}{1 + v(t)\cdot a\Delta t}$$

$$= \frac{(1 - v(t)^2)\cdot a\Delta t}{1 + v(t)\cdot a\Delta t},$$

[1] Tässä Maahetki ja Maanopeus tarkoittavat aikaa ja nopeutta Maan koordinaatistossa K.

ja funktion $v(t)$ erotusosamääräksi saadaan

$$\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=\frac{a[1-v(t)^2]}{1+v(t)\cdot a\Delta t}.$$

Funktion $v(t)$ derivaatta $v'(t)=dv/dt$ on erotusosamäärän raja-arvo, kun $\Delta t\to 0$, eli

$$\frac{dv}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{a[1-v(t)^2]}{1+v(t)\cdot a\Delta t}=a[1-v(t)^2].$$

Etsimämme nopeusfunktio on siis differentiaaliyhtälön

$$(2)\qquad \frac{dv}{dt}=a(1-v^2)$$

ratkaisu $v=v(t)$. Erotamme muuttujat kertomalla yhtälön puolittain tekijällä dt ja jakamalla tekijällä $(1-v^2)$, jolloin saadaan yhtälö

$$(3)\qquad \frac{1}{1-v^2}dv=adt.$$

Tämän yhtälön vasen puoli voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{1}{1-v^2}\,dv=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+v}+\frac{1}{1-v}\right]\,dv,$$

joten (3):sta saadaan integroimalla kummatkin puolet

$$\frac{1}{2}[\ln(1+v)-\ln(1-v)]=at+B,\qquad \text{missä } B \text{ on vakio,}$$

ja edelleen käyttämällä logaritmin laskusääntöjä

$$\ln\left(\sqrt{\frac{1+v}{1-v}}\right)=at+B,$$

joten

$$\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} = e^{at+B} = e^{B}e^{at}.$$

Korottamalla puolittain neliöön saamme

$$\frac{1+v}{1-v} = e^{2B}e^{2at} = Ae^{2at}, \quad \text{missä } A = e^{2B} \text{ on vakio.}$$

Alkuehdon ($t = 0 \Longrightarrow v = 0$) perusteella täytyy olla $A = 1$, joten saamme

$$\text{(4)} \qquad \frac{1+v}{1-v} = e^{2at}.$$

Ratkaisemalla (harjoitustehtävä lukijalle) nopeusmuuttuja v yhtälöstä (3) saamme lopulta etsimämme funktion

$$\text{(5– lu)} \qquad v = v(t) = \frac{e^{2at} - 1}{e^{2at} + 1}.$$

Näemme, että (5):n mukaan kaikilla t on $v(t) < 1$, joten raketin nopeus ei koskaan saavuta valon nopeutta.

Käytettäessä SI-yksiköitä, jolloin yhteenlaskukaava (1–lu) kuuluu

$$\text{(1– SI)} \qquad v(t + \Delta t) = \frac{c^2(v_1 + v_2)}{c^2 + v_1 v_2},$$

päädytään vastaavien vaiheiden kautta nopeuden kaavaan

$$\text{(5– SI)} \qquad v = v(t) = \frac{e^{2at/c} - 1}{e^{2at/c} + 1} \cdot c\,,$$

Kysytyt nopeudet nyt sijoittamalla kaavaan (5–SI) $a = 10\ \text{m/s}^2$ ja $c = 3 \cdot 10^8\ \text{m/s}$ sekä kyseiset aika-arvot **(i)** t =10 s, **(ii)** $t = 100$ vrk $= 100 \cdot 24 \cdot 3600$ s $= 8{,}64 \cdot 10^6$ s, jolloin saadaan numeeristen laskujen jälkeen

(i) $e^{2at/c} \approx 6{,}7 \cdot 10^{-7}$ ja $v(t) \approx 100\,\text{m/s}$,

(ii) $e^{2at/c} \approx 1{,}78$ ja $v(t) \approx 0{,}28c \approx 8{,}4 \cdot 10^7$ m/s (84 000 km/s)

Huomaa, että Newtonin mekaniikan kaavalla $v = at$ saadaan **(i)** kohdassa $v = at = 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot 10\ \mathrm{s} = 100\ \mathrm{m/s}$, eli laskentatarkkuudella sama tulos, mutta **(ii)** kohdassa $v = at = 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot 8{,}64 \cdot 10^6\ \mathrm{s} = 8{,}64 \cdot 10^7\ \mathrm{m/s}$ (86 400 km/s), joka on selvästi edellä laskettua suurempi.

(b) Raketin kellon mukaan matkaan kulunut aika on juuri edellisen huomautuksen (5.3.2.) kaavan (**) mukainen ominaisaika $\Delta\tau$, missä raketin maailmanviivan alku- ja lopputapahtumina P ja Q ovat lähtö Maasta ja vaaditun Maanopeuden saavuttaminen. Sivuutamme kohdan **(i)**, jossa raketin kellonaika on vielä laskentatarkkuudella sama (10 s) kuin Maan kellonaika. Kohdassa **(ii)** raketin kellon mittaama ominaisaika $\Delta\tau$ saadaan kaavasta (**) sijoittamalla siihen $v(t)$:n paikalle kaavan (5–lu) mukainen lauseke $v(t) = (e^{2at} - 1)/(e^{2at} + 1)$, jolloin

(6) $$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_1} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - v(t)^2}\, dt \qquad \text{[luonnolliset yksiköt]}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{(e^{2at} - 1)^2}{(e^{2at} + 1)^2}}\, dt$$

$$= 4 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{e^{2at}}{(e^{2at} + 1)^2}}\, dt$$

$$= 4 \int_{t_1}^{t_2} \frac{e^{at}}{e^{2at} + 1}\, dt\,.$$

Vaihdamme integroimismuuttujaa sijoituksella $x = e^{at}$, jolloin $dx = ae^{at}dt = axdt$, ja uudet integroimisrajat ovat $x_1 = e^{at_1}$ ja $x_2 = e^{at_2}$. Näin integraali saa muodon

$$\Delta\tau = 4 \int_{x_1}^{x_2} \frac{x}{x^2 + 1} \cdot \frac{dx}{ax} = \frac{4}{a} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x^2 + 1}\, dx\,,$$

missä integroitava funktio on täsmälleen funktion $\tan^{-1} x = \arctan(x)$ derivaatta. Siksi on

$$\Delta\tau = \frac{4}{a}(\tan^{-1} x_2 - \tan^{-1} x_1)\ ,$$

eli lausuttuna alkuperäisen muuttujan t avulla

(7) $$\Delta\tau = \frac{4}{a}[\tan^{-1}(e^{at_2}) - \tan^{-1}(e^{at_1})]\ .$$

Sijoittamalla $t_1 = 0$, $t_2 = 8{,}64 \cdot 10^6\ \mathrm{s} = 2{,}6 \cdot 10^{15}\ \mathrm{m}$ ja $a = 10\ \mathrm{m/s^2} = 1{,}1 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{m^{-1}}$ saamme $e^{at_1} = 1$ ja $e^{at_2} \approx 2{,}86$, jolloin

$$\Delta\tau = 3{,}6 \cdot 10^{15}\ [\tan^{-1}(2{,}86) - \tan^{-1}(1)] \qquad [\Delta\tau \text{ metreinä}]$$

$$\approx 3{,}6 \cdot 10^{15} \left[1{,}23 - \frac{\pi}{4}\right] \qquad [\tan^{-1} x \text{ arvot radiaaneina}]$$

$$\approx 1{,}6 \cdot 10^{15}\ \mathrm{m}.$$

Muunnetaan tulos vielä vuorokausiksi ($1\ \mathrm{m} = 1/3 \cdot 10^8 \approx 3{,}3 \cdot 10^{-9}\mathrm{s}$), jolloin saadaan

(8) $$\Delta\tau \approx 1{,}6 \cdot 10^{15} \cdot 3{,}3 \cdot 10^{-9}\mathrm{s} \approx 5{,}3 \cdot 10^6\ \mathrm{s} \approx 61\ \mathrm{vrk}.$$

Matkaan kulunut raketin kellon mittaama aika (ominaisaika) on siis selvästi lyhempi kuin Maan kellon mittaama aika

Loppuhuomautus. Kappaleessa 6.6. tarkastelemme edellisen esimerkin kaltaista tilannetta, jossa raketin liike on tasaisesti kiihtyvää raketin *omassa* koordinaatistossa K_0.

* * * * * * *

6. VEKTORIT JA NELIVEKTORIT

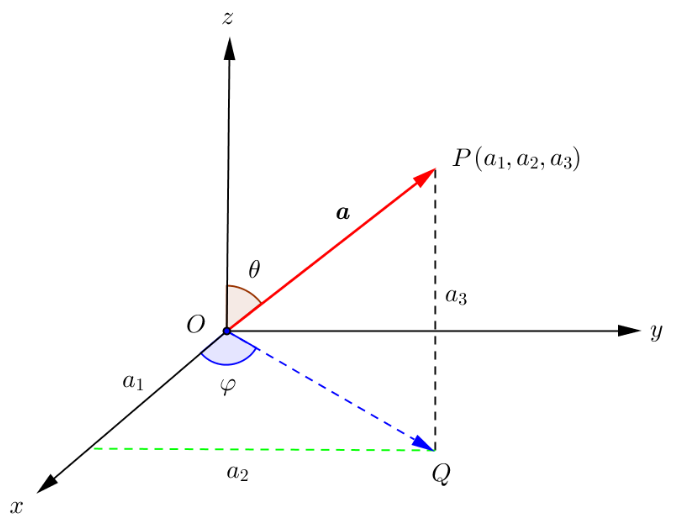
6.1. Tason ja avaruuden vektorit

Newtonin mekaniikassa hiukkasten tai kappaleiden liikettä matemaattisesti kuvaavat vektorisuureet kuten paikka, siirtymä, nopeus, kiihtyvyys, liikemäärä tai voima ovat avaruusvektoreita. Vektorin $\boldsymbol{a}$ arvo koostuu (kuten luvussa 2 selostettiin) kahdesta osasta: *itseisarvosta* (eli pituudesta) ja *suunnasta*. Kaksiulotteisessa tasossa tai kolmiulotteisessa avaruudessa olevia vektoreita $\boldsymbol{a}$ **ja** $\boldsymbol{b}$ pidetään *samoina* (eli $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$), jos niillä on sama pituus ja sama suunta. Jokainen vektori voidaan siis ajatella jostakin valitusta pisteestä (origosta) alkavana nuolena.

Vektorin itseisarvo $|\boldsymbol{a}|$ on ei-negatiivinen reaaliluku, jonka voi ajatella vektoria esittävän nuolen pituutena. Sitä merkitään usein samalla kirjaimella ilman lihavointia: $|\boldsymbol{a}| = a$.

Tasokoordinaatistossa (*xy*) olevan vektorin suunta voidaan ilmoittaa kulmana α, jonka vektori muodostaa *x*-akselin kanssa (ks. luku 2, kuvio 5).

Avaruuskoordinaatistossa (*xyz*) vektorin suunta voidaan ilmaista kulmaparina $(\theta\ , \varphi)$, jossa θ on vektorin ja *z*-akselin välinen kulma ja φ on se kulma jonka vektorin *xy*-tasolle pudotettu kohtisuora projektio muodostaa *x*-akselin kanssa (ks. kuvio 25 alla).



KUVIO 25. Avaruusvektorin $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{OP} = (a_1, a_2, a_3)$ suuntakulmat θ ja φ.

Vektorin koordinaattiesitys, *xy*-tasossa $\boldsymbol{OQ} = (a_1, a_2)$ ja *xyz*-avaruudessa $\boldsymbol{OP} = (a_1, a_2\ a_3)$, ilmaisee kuinka monta yksikköä eri akselien suunnassa on siirryttävä, jotta päästäisiin vektorin alkupisteestä sen loppupisteeseen. Koordinaattiesitys sisältää täydellisen informaation vektorista. Koordinaattien avulla voidaan laskea vektorin itseisarvo ja suunta kuten luvussa 2 osoitettiin (ks. huomautus 2.3.3. ja esimerkki 2.3.4.).

Kuviossa 25 olevan xy-tasovektorin $\boldsymbol{OQ}$ koordinaattimuoto on $\boldsymbol{OQ} = (a_1, a_2)$. Pythagoraan lauseen perusteella saadaan itseisarvo

$$|\boldsymbol{OQ}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}\,.$$

Suuntakulma φ saadaan ehdosta $\tan\varphi = a_2/a_1$.

Avaruusvektorin $\boldsymbol{OP} = \boldsymbol{a} = (a_1, a_2\ a_3)$ itseisarvoksi saadaan (myös) Pythagoraan lauseen perusteella

$$|\boldsymbol{OP}| = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}\,.$$

Suuntakulmat θ ja φ saadaan ehdoista

$$\cos\theta = a_3/a \quad \text{ja} \quad \tan\varphi = a_2/a_1\,.$$

Avaruusvektoreiden skalaaritulo ja sen invarianssi

Kahden tasovektorin $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ ja $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ skalaarituloa

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\gamma = a_1b_1 + a_2b_2\,,$$

missä γ on vektoreiden välinen kulma, käsiteltiin laajasti luvussa 2.

Avaruusvektoreille $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ja $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ skalaaritulo määritellään samoin

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\gamma$$

ja sille pätee vastaava koordinaattiesitys

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\,.$$

Kaikille vektoreille pätee, että vektorin skalaaritulo itsensä on sama kuin vektorin pituuden neliö, esimerkiksi avaruusvektorille $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ on

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 = |\boldsymbol{a}|^2 \,.$$

Luvussa 2 (huomautus 2.5.2.) jo todettiin, että koordinaattimuunnoksissa (kuten siirto, kierto tai peilaus), vektoreiden skalaaritulo säilyy muuttumattomana eli *invarianttina*. Syynä tähän on, että skalaaritulo riippuu vain vektoreiden pituuksista ja niiden välisestä kulmasta.

6.2. Avaruusajan nelivektorit

6.2.1. Nopeus Newtonin ja Einsteinin mekaniikassa

Fysiikassa vektori $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ osoittaa avaruudessa liikkuvan hiukkasen paikan suhteessa valittuun koordinaatistoon. Klassinen Newtonin mekaniikka pyrkii selvittämään, miten hiukkasen paikkavektori $\boldsymbol{r}$ riippuu ajasta. Liikelakien, kuten dynamiikan peruslain, avulla voidaan tietyissä olosuhteissa johtaa vektoriyhtälö $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, joka ilmaisee tämän riippuvuuden matemaattisesti. Newtonin mekaniikassa aika t oletetaan absoluuttiseksi, kellon liiketilasta riippumattomaksi suureeksi, joka on kaikissa *inertiaalikoordinaatistoissa*[1] sama. Jos hiukkasta havainnoidaan kahdesta eri koordinaatistosta K(t, x, y, z) ja K'$(t', x', y', 'z)$, joista jälkimmäinen liikkuu tasaisella nopeudella v edellisen koordinaatiston x-akselin suuntaan kuten kuviossa 24, niin Newtonin mekaniikan mukaan hiukkasen K'-koordinaatit saadaan sen K-koordinaateista ns. Galilein muunnoskaavoilla:

$$\text{(Gal)} \qquad \begin{cases} t' = t \\ x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \;. \end{cases}$$

Tarkastelemme nyt hiukkasta, joka liikkuu nopeudella u koordinaatiston K x-akselin suunnassa Tämä nopeus on K-koordinaattien avulla lausuttuna paikan x derivaatta ajan t suhteen eli

$$u = \frac{dx}{dt} \,.$$

---

[1] Koordinaatistoa (havaitsija, laboratorio, havaintoympäristö), jossa Newtonin I laki eli jatkavuuden laki on voimassa, sanotaan *inertiaalikoordinaatistoksi*. Jos K on inertiaalikoordinaatisto, niin kaikki sen suhteen tasaisella nopeudella liikkuvat koordinaatistot (havaitsijat) ovat myös inertiaalikoordinaatistoja.

K’-koordinaattien avulla hiukkasen nopeudeksi u' saadaan vastaavasti

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d(x - vt)}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{d(vt)}{dt} = u - v\,,$$

kuten sopi odottaakin.

Saatu tulos $u' = u - v$ on kuitenkin ristiriidassa suhteellisuusteorian ja empiiristen havaintojen kanssa. Jos nimittäin sovellamme tätä tulosta fotoniin, jolla $u = c$, niin sen nopeus K’:ssa mitattuna olisi $u' = c - v$. (Luonnollisia yksiköitä käytettäessä olisi $u = c = 1$ ja $u' = 1 - v$.) Todellisuudessa valon nopeus on kuitenkin *sama* kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa. Käyttämämme Galilein muunnos (Gal) ei siis ole oikea.

Oikea, valon nopeuden vakiona säilyttävä, muunnos on, kuten kirjasarjan osassa 1 (EEA1) osoitettiin, tietenkin Lorentz-muunnos (ks. myös kappale 5.1. edellä):

$$\text{(Lvc)} \qquad \begin{cases} t' = \gamma(t - vx/c^2) \\ x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad , \qquad \gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}\,.$$

tai luonnollisia yksiköitä (c = 1) käytettäessä

$$\text{(Lv– lu)} \qquad \begin{cases} t' = \gamma(t - vx) \\ x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad , \qquad \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}\,.$$

Muunnoskaavat (Lvc) ja (Lv – lu) osoittavat, miten yksittäisen tapahtuman koordinaatit (t, x, y, z) muuttuvat, kun siirrytään koordinaatistosta K koordinaatistoon K’. Samat kaavat ovat voimassa[1] myös kahden tapahtuman $P_1 = (t_1, x_1, y_1, z_1)$ ja $P_2 = (t_2, x_2, y_2, z_2)$ koordinaattien erotuksille $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ ja $\Delta z = z_2 - z_1$. Nämä tapahtumat voivat tarkoittaa esimerkiksi hiukkasen saapumista liikeratansa peräkkäisiin pisteisiin hetkinä t_1 ja t_2 koordinaatiston K kellon mukaan. Erotuksille on siis voimassa

[1] Näin on, koska muunnoskaavat ovat lineaarisia (ensimmäistä astetta).

$$(\text{Lvc}-\Delta) \quad \begin{cases} \Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2) \\ \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \end{cases}, \qquad \gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}\,,$$

$$(\text{Lv}-\text{lu}-\Delta) \quad \begin{cases} \Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x) \\ \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \end{cases}, \qquad \gamma = 1/\sqrt{1-v^2}\,.$$

mistä paikkakoordinaatit y ja z on jätetty pois, koska ne samoin kuin niiden erotukset ovat molemmissa koordinaatistoissa samat.
Usein on hyödyllistä kirjoittaa erotuksien muunnoskaavat[1] tilanteessa, jolloin tapahtumat P_1 ja P_2 ovat hyvin lähellä toisiaan ja niiden koordinaattierot ovat infinitesimaalisia. Tällöin erotuksia merkitään differentiaaleilla dt, dx, dy, dz ja muunnoskaavat saavat muodon

$$(\text{Lvc}-d) \quad \begin{cases} dt' = \gamma(dt - vdx/c^2) \\ dx' = \gamma(dx - vdt) \end{cases}, \qquad \gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}\,,$$

$$(\text{Lv}-\text{lu}-d) \quad \begin{cases} dt' = \gamma(dt - vdx) \\ dx' = \gamma(dx - vdt) \end{cases}, \qquad \gamma = 1/\sqrt{1-v^2}\,.$$

missä jälleen $dy' = dy = 0$ ja $dz' = dz = 0$.

Tarkastelemme jälleen edellä mainittua hiukkasta, joka liikkuu K:n x-akselin suunnassa nopeudella $u = dx/dt$. Hiukkasen nopeus K':ssa on vastaavasti $u' = dx'/dt'$, jolloin muunnoskaavojen $(\text{Lv}-\text{lu}-d)$ perusteella saadaan

$$\begin{aligned} u' &= \frac{dx'}{dt'} \\ &= \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma(dt - vdx)} \\ &= \frac{dx - vdt}{dt - vdx} \qquad \text{[supista tekijällä } dt\text{]} \\ &= \frac{(dx/dt) - v}{1 - v\,(dx/dt)}\,, \end{aligned}$$

mutta koska $dx/dt = u$, saamme

---

[1] Erotuksia koskevien muunnoskaavojen etuna on, että ne ovat voimassa, vaikka koordinaatistojen K ja K' origot eivät yhtyisikään.

$$(*) \quad u' = \frac{u-v}{1-uv} \ .$$

Tämä Lorentz-muunnokseen perustuva tulos on sopusoinnussa valon nopeuden vakioisuuden periaatteen kanssa. Jos nimittäin kyseessä oleva hiukkanen on fotoni ($u = 1$), sen K'-nopeus on

$$u' = \frac{u-v}{1-uv} = \frac{1-v}{1-1\cdot v} = \frac{1-v}{1-v} = 1 \ .$$

Fotonin nopeus on siis sama kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa.

Huomautus 6.2.1.2. Nopeuksien yhteenlaskukaava).
Tämän kirjasarjan 1. osassa (EEA1, kappale 7.10.) johdettiin nopeuksien yhteenlaskukaava hyperbolisten funktioiden avulla. Kaava seuraa helposti myös äsken johdetusta tuloksesta

$$(*) \qquad u' = \frac{u-v}{1-uv} \ ,$$

kun sovellamme sitä esimerkiksi tilanteessa, jossa juna kulkee ratapenkan suhteen nopeudella v_1 ja matkustaja juoksee junassa sen kulkusuuntaan nopeudella v_2. Saamme matkustajan summanopeuden ratapenkan suhteen käyttämällä kaavaa (*) ja valitsemalla koordinaatistot seuraavasti: K = junan koordinaatisto ja K' = ratapenkan koordinaatisto. Tällöin kaavaan (*) on sijoitettava $u = v_2$ ja $v = -v_1$, jolloin kysytty summanopeus

$$u' = \frac{v_2 - (-v_1)}{1 - v_2(-v_1)} = \frac{v_1 + v_2}{1+v_1 v_2} \ ,$$

mikä onkin sama kuin aiemmin johdettu summanopeuden kaava.

6.2.2. Avaruusvektorien pituus ei säily Lorentz-muunnoksessa
Olkoot jälleen P_1 ja P_2 kaksi avaruusajan tapahtumaa, joiden K-koordinaatit ovat $P_1 = (t_1, x_1, y_1, z_1)$ ja $P_2 = (t_2, x_2, y_2, z_2)$. Olkoot koordinaattien erotukset $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ ja $\Delta z = z_2 - z_1$. Tällöin *tapahtumapaikkojen välinen avaruusvektori* on

$$\boldsymbol{a} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

ja sen skalaaritulo itsensä kanssa (eli vektorin pituuden neliö) on

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2.$$

Koordinaatistossa K' samojen tapahtumien väliset paikkakoordinaattierot $\Delta x', \Delta y', \Delta z'$ ovat muunnoskaavojen $(\text{Lv– lu–}\,\Delta)$ perusteella

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)\,, \qquad \Delta y' = \Delta y, \qquad \Delta z' = \Delta z\ ,$$

joten K':ssa tapahtumapaikkojen välisen avaruusvektorin $\boldsymbol{a}' = (\Delta x', \Delta y', \Delta z')$ skalaaritulo itsensä kanssa on

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}' \cdot \boldsymbol{a}' = |\boldsymbol{a}'|^2 &= (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 \\ &= \gamma^2(\Delta x - v\Delta t)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \\ &= \gamma^2(\Delta x - v\Delta t)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2\,.\end{aligned}$$

Näemme, että $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{a}' \cdot \boldsymbol{a}'$ eli tapahtumapaikkojen välisen avaruusvektorin skalaaritulo itsensä kanssa *ei säily* invarianttina Lorentz-muunnoksessa. Tästä tosiasiasta käytetään nimitystä *pituuden kontraktio*, jota käsiteltiin kirjasarjan edellisessä osassa (ks. EEA1, kappale 7.8.).

6.2.3. Nelivektorit

Monet klassisen (Newtonin) mekaniikan suureet, kuten siirtymä, voima ja kiihtyvyys, kuvataan matemaattisesti *xyz*-koordinaatiston avaruusvektoreina, jotka liikettä ja muutosta tarkasteltaessa ovat ajan funktioita. Suhteellisessa levossa olevien avaruuskoordinaatistojen välisissä muunnoksissa vektoreiden keskinäiset skalaaritulot (ja samalla pituudet ja kulmat) säilyvät invariantteina. Näin tulee ollakin, sillä emme voisi hyväksyä mekaniikkaa, jossa voiman tekemä työ $W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}$ riippuisi siitä, missä koordinaatistossa voiman $\boldsymbol{F}$ ja siirtymän $\boldsymbol{s}$ koordinaatit (komponentit) on lausuttu.

Kun klassisessa mekaniikassa verrattiin toistensa suhteen tasaisessa liikkeessä olevia (inertiaalisia) koordinaatistoja, käytettiin Galilein muunnosta. Siinähän aikakoordinaatti säilyy muuttumattomana ($t' = t$), mutta avaruuskoordinaatit x, y, z voivat muuttua edellä kuvatuilla tavoilla, jolloin avaruusvektorien skalaaritulot säilyvät invariantteina. Kaikki oli hyvin, kunnes selvisi, että Galilein muunnos ei vastaa empiiristä todellisuutta.

Oikea muunnos inertiaalikoordinaatistojen välillä on Lorentz-muunnos. Edellisessä kappaleessa näimme kuitenkin, että *xyz*-paikka-avaruuden vektorien skalaaritulot eivät säily invariantteina Lorentz-muunnoksessa. Tästä syystä fysikaalisen todellisuuden matemaattiseen kuvaamiseen on löydettävä avaruusvektoreiden tilalle Lorentz-muunnoksen kanssa yhteeensopivat käsitteet. Sellaisia ovat *nelivektorit*.

Nelivektoreita käsiteltäessä on kätevää käyttää avaruusajan pisteen K-koordinaateille (t, x, y, z) ns. indeksoitua merkitsemistapaa: $t = x_0$, $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$. Tällöin on $(t, x, y, z) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$. Vastaavasti saman pisteen K'-koordinaattien indeksoitu merkintä on $(t', x', y', z') = (x_0', x_1', x_2', x_3')$.

Indeksoitua koordinaattimerkintää käyttämällä Lorentz-muunnoskaavat (Lv-lu) ovat

$$(\text{Lv–lu–ind}) \quad \begin{cases} x_0' = \gamma(x_0 - vx_1) \\ x_1' = \gamma(x_1 - vx_0) \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = x_3 \end{cases} \qquad , \qquad \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2} \, ,$$

Huomautus: Tyyppikoordinaatistot K ja K'

Tässä kuten aina aiemminkin koordinaatistopari $\mathrm{K}(t, x, y, z) = \mathrm{K}(x_0, x_1, x_2, x_3)$ ja $\mathrm{K}'(t', x', y', z') = \mathrm{K}'(x_0', x_1', x_2', x_3')$ on määritelty siten, että seuraavat ehdot täyttyvät

(i) K':n avaruusorigo liikkuu tasaisella nopeudella v pitkin K:n x-akselia (eli x_1-akselia),

(ii) K:n avaruusakselit ovat yhdensuuntaisia K':n vastaavien avaruusakselien kanssa (ei kiertoliikettä), jolloin x'-akseli liukuu pitkin x-akselia positiiviseen suuntaan (tai yhtäpitävästi: x-akseli liukuu pitkin x'-akselia negatiiviseen suuntaan),

(iii) K:n ja K':n kellot nollataan ($t = t' = 0$) hetkellä, jolloin niiden avaruusorigot ovat päällekkäin ($x = x' = 0$).

Myös jatkossa käytämme symboleita K ja K' tarkoittamaan näin määriteltyä tyypillistä koordinaatistoparia. Ne merkitään usein $\mathrm{K}(t, x)$ tai $\mathrm{K}(x_0, x_1)$ ja $\mathrm{K}'(t', x')$ tai $\mathrm{K}'(x_0', x_1')$ jättämällä pois y- ja z-komponentit, jotka eivät muutu ($y = y'$ ja $z = z'$) siirryttäessä koordinaatistosta toiseen.

Määritelmä 6.2.3.1. Nelivektori

Nelivektori $\boldsymbol{A}$ kuvaa neliulotteisen avaruusajan ilmiöön liittyvää fysikaalista suuretta. Nelivektorilla[1] on jokaisessa inertiaalikoordinaatistossa K neljä komponenttia $\boldsymbol{A} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$. Komponenttia A_0 sanotaan *ajanluonteiseksi* ja komponentteja A_1, A_2, A_3 *paikanluonteisiksi*.

Jos K' on toinen inertiaalikoordinaatisto, jossa samalla nelivektorilla on komponentit $\boldsymbol{A} = (A'_0, A'_1, A'_2, A'_3)$, niin nämä komponentit saadaan K-komponenteista samoilla Lorentz-muunnoskaavoilla, joilla avaruusajan tapahtuman K'-koordinaatit (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3) saadaan saman tapahtuman K-koordinaateista (x_0, x_1, x_2, x_3).

Toisin sanoen nelivektorin $\boldsymbol{A}$ komponenteille ovat voimassa muunnoskaavat:

$$(\text{Nv– ehto}) \quad \begin{cases} A'_0 = \gamma(A_0 - vA_1) \\ A'_1 = \gamma(A_1 - vA_0) \\ A'_2 = A_2 \\ A'_3 = A_3 \end{cases} , \qquad \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2},$$

missä K ja K' ovat tyypilliset koordinaatistot.

Sanomme, että nelivektori on *Lorentz-kovariantti*, mikä tarkoittaa, että se noudattaa Lorentz-muunnoskaavoja siirryttäessä inertiaalikoordinaatistosta toiseen.

Merkitsemme nelivektoreita[2] isoilla lihavoiduilla kirjaimilla $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ jne. Nelivektoreiden komponentteja merkitään yleensä[3] $A_0, A_1, B_0, B_1, \ldots$

Ennestään tuttuja paikanluonteisia avaruus- tai tasovektoreita (3- tai 2-vektoreita) merkitsemme pienillä kirjaimilla $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}$. Näillä vektoreilla on *vain* paikanluonteisia komponentteja.

[1] Engl. *four-vector* tai *4-vector*.
[2] Suhteellisuusteoriaa käsittelevässä kirjallisuudessa nelivektoreita merkitään monilla muillakin tavoilla.
[3] Avaruusajan tapahtumapistettä osoittavan nelivektorin $\boldsymbol{X}$ komponentit (eli koordinaatit) merkitään kuitenkin pienin kirjaimin (x_0, x_1, x_2, x_3).

Huomautus 6.2.3.2. Nelivektorin määritelmän tausta.

Vaatimusta, että nelivektorin komponenttien (A_0, A_1, A_2, A_3) täytyy noudattaa samoja muunnoskaavoja kuin avaruusajan pisteiden koordinaatit (x_0, x_1, x_2, x_3), ei voi pitää yllättävänä. Nelivektorithan pyrkivät kuvaamaan fysikaalisia suureita, kuten nopeutta, kiihtyvyyttä, voimaa jne, jotka ovat kiinteästi sidoksissa paikkaan ja aikaan. Esimerkiksi nopeus on paikan derivaatta ajan suhteen. Siksi on ymmärrettävää, että nelivektoreiden komponenttien täytyy muunnoksissa käyttäytyä samalla tavalla kuin aika- ja paikkakoordinaatit. Näinhän on asia myös tutuissa kaksi- tai kolmiulotteisissa paikka-avaruuksissa (*xy*-taso tai *xyz*-avaruus). Seuraava esimerkki havainnollistaa asiaa.

Esimerkki 6.2.3.3. Kaksivektorien vastaava muunnosominaisuus.

Olkoon kaksiulotteisessa tasoavaruudessa $\mathrm{K}(x, y)$ tavallinen suorakulmainen koordinaatisto ja olkoon $\mathrm{K}'(x', y')$ toinen koordinaatisto, joka on saatu kiertämällä K:n akseleita 45° positiiviseen kiertosuuntaan. Jos tason pisteen koordinaatit K:ssa ovat $(x, y) = (x_1, x_2)$, niin alkeisgeometrian avulla on helppo nähdä, että sen koordinaatit $(x', y') = (x_1', x_2')$ koordinaatistossa K' saadaan kaavoilla:

$$\begin{cases} x_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1 + x_2) \\ x_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \end{cases}$$

Jos tasossa liikkuvan hiukkasen *nopeusvektori* K:ssa on (u_1, u_2), niin K':ssa hiukkasen nopeusvektorin komponentit (u_1', u_2') saadaan samoilla muunnoskaavoilla:

$$\begin{cases} u_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-u_1 + u_2) \\ u_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1 + u_2) \end{cases} ,$$

joten voisimme analogisesti kutsua nopeusvektoria *kaksivektoriksi*.

Täsmälleen samat muunnoskaavat pätevät myös esimerkiksi hiukkaseen kohdistuvalle *voimalle*. Jos sen komponentit K:ssa ovat (f_1, f_2) ja K':ssa (f_1', f_2') niin

$$\begin{cases} f_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-f_1 + f_2) \\ f_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 + f_2) \end{cases} ,$$

joten voimakin on tässä mielessä ”kaksivektori”.

Esimerkki 6.2.3.4. Kaikkien nelivektoreiden ”äiti”.

Nelivektorin prototyyppinä on avaruusajan tapahtumapistettä $\boldsymbol{X} = (t, x, y, z) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ osoittava vektori, jonka komponentteina ovat siis pisteen aika- ja paikkakoordinaatit valitussa inertiaalikoordinaatistossa K. Jos K' on toinen inertiaalikoordinaatisto (joka on määritelty tyypillisellä tavalla), niin saman vektorin K'-komponentit $(t', x', y', z') = (x_0', x_1', x_2', x_3')$ saadaan tietysti Lorentz-muunnoskaavoilla. Tapahtumapistettä osoittava vektori[1] on siis Lorentz-kovariantti eli se on nelivektori.

Olemme aiemmin useaan kertaan todenneet , että Lorentz-muunnoksessa tapahtumapisteiden välinen intervalli $(\Delta s)^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta r)^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$ säilyy[2] muuttumattomana eli *invarianttina*. Tässä Δt on tapahtumien aikaero ja $\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ paikkaero. Origotapahtuman $\boldsymbol{O} = (0, 0, 0, 0)$ ja tapahtuman $\boldsymbol{X} = (t, x, y, z)$ välinen invariantti intervalli on $s^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ tai indeksimerkinnällä $s^2 = {x_0}^2 - {x_1}^2 - {x_2}^2 - {x_3}^2$. Intervallin neliöjuurta s voisi kuvaannollisesti kutsua vektorin $\boldsymbol{X}$ *pituudeksi* tai ehkä mieluummin *nelipituudeksi*. Tämä pituus[3] (ja sen neliö s^2) on siis koordinaatistosta riippumaton *skalaarivakio*, koska

$$s^2 = {x_0}^2 - {x_1}^2 - {x_2}^2 - {x_3}^2 = (x_0')^2 - (x_1')^2 - (x_2')^2 - (x_3')^2.$$

Vastaava invarianssi pätee tietenkin myös kahden tapahtuman koordinaattien erotuksille

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x_0)^2 - (\Delta x_1)^2 - (\Delta x_2)^2 - (\Delta x_3)^2 = (\Delta x_0')^2 - (\Delta x_1')^2 - (\Delta x_2')^2 - (\Delta x_3')^2.$$

Tavallisessa esimerkkitilanteessamme koordinaatistot K ja K' on valittu siten, että y- ja z-koordinaatit ovat niissä samat, jolloin em. invarianssit sievenevät muotoon:

[1] Kirjallisuudessa tätä tapahtumapistettä tarkoittavaa nelivektoria kutsutaan joskus myös *nelipaikkavektoriksi* (engl. *four-position vector* tai *spacetime position vector*).
[2] Tässä intervallin lauseke $(\Delta s)^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta r)^2$ on kirjoitettu (kuten Lorentz-muunnoskaavatkin) luonnollisissa yksiköissä ($c = 1$). Muissa yksiköissä intervallin lauseke on $(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta r)^2$.
[3] Nelipituus ei ole metrimitalla mitattava pituus tavanomaisessa mielessä.

$$x_0{}^2 - x_1{}^2 = (x_0')^2 - (x_1')^2 \quad \text{ja} \quad (\Delta x_0)^2 - (\Delta x_1)^2 = (\Delta x_0')^2 - (\Delta x_1')^2.$$

6.2.3.5. Nelivektorien invariantti pituus ja skalaaritulo

Edellä totesimme, että nelipaikkavektorin $\boldsymbol{X}$ ”pituuden” neliö s^2 on Lorentz-muunnoksissa invariantti eli sillä on sama skalaariarvo kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa. Mutta vastaava invarianssi pätee kaikille muillekin nelivektoreille siksi, että ne noudattavat samoja muunnoskaavoja. Jos nelivektorilla $\boldsymbol{A}$ on koordinaatistossa K komponentit (A_0, A_1, A_2, A_3) ja koordinaatistossa K’ komponentit (A_0', A_1', A_2', A_3'), niin silloin on voimassa invarianssi

$$(*) \qquad A_0{}^2 - A_1{}^2 - A_2{}^2 - A_3{}^2 = (A_0')^2 - (A_1')^2 - (A_2')^2 - (A_3')^2.$$

Invarianttia lauseketta $A_0{}^2 - A_1{}^2 - A_2{}^2 - A_3{}^2$ voidaan kutsua vektorin $\boldsymbol{A}$ (neli)pituuden neliöksi, koska lauseke muistuttaa muodoltaan tavallisen *xyz*-avaruusvektorin $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ pituuden neliötä, joka on Pythagoraan lauseen mukaan $|\boldsymbol{a}|^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2$. Luvussa 2 käsittelimme näitä tason ja avaruuden vektoreita (*kolmivektoreita*) ja määrittelimme niille *skalaaritulon* $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$. Tällöin[1] on $|\boldsymbol{a}|^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^2$. Totesimme myös skalaaritulon olevan invariantti koordinaatiston muunnoksissa (kierto, siirto jne).

On hyödyllistä määritellä vastaava skalaaritulo myös avaruusajan nelivektoreille.

Määritelmä 6.2.3.5.1 Nelivektoreiden skalaaritulo.

Nelivektoreiden $\boldsymbol{A} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ ja $\boldsymbol{B} = (B_0, B_1, B_2, B_3)$ <u>invariantti</u> skalaaritulo on

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3$$

Nelivektoreiden skalaaritulo invarianssi todistetaan Liitteessä 1.

Huomaa, että kahden tapahtumapisteen välisen nelivektorin $(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ skalaaritulo itsensä kanssa on sama kuin näiden tapahtumien välinen intervalli.

[1] Luvussa 2 merkitsimme (kaksi- tai kolmi-) vektoreiden $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ skalaarituloa $\boldsymbol{ab}$ eli ilman kertopistettä. Tässä luvussa käytämme sille pistemerkintää $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ ja samoin myös nelivektoreille. Selvyyden vuoksi myös lukujen kertolaskussa $ab = a \cdot b$ käytetään joskus kertopistettä. Asiayhteydestä selviää, mitä kertolaskua piste kulloinkin tarkoittaa.

6.3. Nelinopeus

Olemme edellä käsitelleet yleisellä tasolla avaruusajan nelivektoreita, joista ensimmäisenä konkreettisena esimerkkinä oli ”nelipaikkavektori” $\boldsymbol{X} = (t, x, y, z) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$. Kun pyrimme jatkossa muotoilemaan mekaniikan lait suhteellisuusteorian perustalle, on meidän määriteltävä perussuureet (nopeus, kiihtyvyys, liikemäärä jne) <u>nelivektoreina</u> ja korvattava Newtonin yhtälöt nelivektoreita koskevilla koskevilla yhtälöillä, jotka ovat Lorentz-kovariantteja. Tätä edellyttää suhteellisuusperiaate, jonka mukaan luonnonlakien tulee olla kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa voimassa samanlaisina. Yhtälöiden Lorentz-kovarianssi varmistaa suhteellisuusperiaatteen toteutumisen ja siksi yhtälöissä esiintyvät fysikaaliset suureet on ilmaistava invarianttien skalaarien ja Lorentz-kovarianttien vektoreiden (nelivektoreiden) avulla.

Liikkuvan hiukkasen[1] *nopeus* v määritellään klassisessa mekaniikassa matkan x ja siihen kuluneen ajan t osamääränä, siis $v = x/t$. (Tässä ajatellaan hiukkasen liikkuvan koordinaatistossa K pitkin *x*-akselia origosta kohtaan x.) Tällä tavoin määritelty nopeus on tietenkin *keskinopeus* kyseisellä aikavälillä $[0, t]$ ja matkavälillä $[0, x]$. Liikelakien tutkimisessa tärkeämpi käsite on hiukkasen *hetkellinen nopeus* $v = v(t)$ tietyllä ajanhetkellä t. Hetkellinen nopeuskin voidaan ajatella keskinopeutena infinitesimaalisella aikavälillä $[t, t + dt]$ ja matkavälillä $[x, x + dx]$. Kuljettu matka on silloin dx ja siihen kulunut aika on dt, joten saamme hetkellisen nopeuden määritelmäksi:

(1) $$v = v(t) = \frac{dx}{dt}$$

Newtonin mekaniikassa hiukkasen nopeus on paikan x derivaatta ajan t suhteen. Tällöin paikan ajatellaan riippuvan ajasta eli olevan ajan funktio $x = x(t)$.

Yleisemmin tarkasteltuna hiukkanen liikkuu *xyz*-avaruudessa siten, että sen *paikkavektori* hetkellä t on $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, jolloin hiukkasen *nopeusvektori* hetkellä t on

(2) $$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right).$$

[1] Kappalekin voidaan liikelakeja tutkittaessa yleensä ajatella pistemäisenä hiukkasena, jonka massa on kappaleen massa ja sijainti on kappaleen massakeskipisteessä.

Nopeusvektori on siis paikkavektorin $\boldsymbol{r}$ derivaatta ajan t suhteen. Tämä klassisen mekaniikan mukainen nopeusvektori on täsmällisemmin sanottuna ”kolminopeus”. Se ei ole Lorentz-kovariantti käsite, kuten kävi ilmi edellä kappaleessa 6.2.1. Määritelmä (2) ei siksi kelpaa nopeuden määritelmäksi *relativistisessa*[1] mekaniikassa.

Klassisessa mekaniikassa hiukkasen liike tapahtuu *xyz*-paikka-avaruudessa ja hiukkasen paikkakoordinaatit ovat (absoluuttisen) ajan t funktioita. Relativistisessa mekaniikassa on tarkasteltava hiukkasen maailmanviivaa *txyz*-avaruusajassa ja nopeusvektori on määriteltävä nelipaikkavektorin $\boldsymbol{X} = (t, x, y, z)$ derivaattana. Tällöin ensimmäisenä vaihtoehtona tulee mieleen määritelmän (2) muuttaminen muotoon:

$$(3) \qquad \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(t) = \frac{d\boldsymbol{X}}{dt} = \left(\frac{dt}{dt}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = \left(1, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right),$$

missä on ajateltu hiukkasen siirtyvän K-koordinaatiston pisteestä (t, x, y, z) pisteeseen $(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$ ja laskettu muutosnopeudet jakamalla koordinaattien muutokset dt , dx , dy , dz niihin kuluneella K-koordinaattiajalla dt.

Kelpaako näin määritelty vektori $\boldsymbol{V} = d\boldsymbol{X}/dt$ relativistiseksi nopeusvektoriksi? Sillä on kyllä neljä komponenttia, mutta noudattavatko ne Lorentz-muunnoskaavoja? Tätä tutkimme seuraavassa esimerkissä.

Esimerkki 6.3.1. Onko dX/dt nelivektori?

Määritelmän (3) mukaan vektorin u komponentit esimerkkikoordinaatistoissa K ja K’ ovat

$$(\mathrm{K}) \qquad \boldsymbol{V} = (V_0, V_1, V_2, V_3) = \left(1, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

ja

$$(\mathrm{K}') \qquad \boldsymbol{V} = (V_0', V_1', V_2', V_3') = \left(1, \frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}\right).$$

Koordinaattierotukset $(dt, dt', dx, dx', \ldots)$ noudattavat Lorentz-muunnosta, joten muunnoskaavojen (Lv-lu-*d*) perusteella on

[1] *relativistinen* eli suhteellisuusteorian mukainen.

$$(\text{Lv–lu–}d)\quad \begin{cases} dt' = \gamma(dt - vdx) \\ dx' = \gamma(dx - vdt) \end{cases} ,\qquad\qquad \gamma = 1/\sqrt{1-\ v^2}\,.$$

Näin ollen saamme

$$(V_1' - 1)\qquad V_1' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma(dt - vdx)} = \frac{dx - vdt}{dt - vdx} = \frac{(dx/dt) - v}{1 - v\,(dx/dt)} = \frac{V_1 - v}{1 - vV_1}\ .$$

Jos $\boldsymbol{u}$ olisi nelivektori, niin sen komponenttien tulisi noudattaa Lorentz-muunnoskaavoja eli nelivektorin määritelmän (6.2.3.1) mukaan tulisi olla

$$(V_1' - 2)\qquad V_1' = \gamma(V_1 - vV_0) = \frac{V_1 - vV_0}{\sqrt{1 - v^2}}\,,$$

mutta näin ei selvästikään ole, kuten näemme vertaamalla tuloksia $(V_1' - 1)$ ja $(V_1' - 2)$.

* * * * * * *

Joudumme siis hylkäämään relativistiselle nopeusvektorille esittämämme määritelmäehdotuksen (3), koska kyseinen vektori ei ole Lorentz-kovariantti. Entäpä, jos määritelmässä (3) esiintyvät koordinaattien derivaatat muodostettaisiinkin liikkuvan hiukkasen ominaisajan τ suhteen eikä koordinaattiajan t suhteen? Ominaisaikaa eli hiukkasen mukana kulkevan kellon mittaamaa aikaa käsittelimme edellä kappaleessa 5.3. (ks. myös EEA1, kappale 7.7.). Ominaisaika τ (tau) liittyy K-koordinaattiaikaan t yhtälön (4) mukaisesti[1].

(4) $\qquad dt = \gamma \cdot d\tau$ eli $d\tau = \dfrac{dt}{\gamma} = dt \cdot \sqrt{1 - u^2}$, missä u on hiukkasen kolminopeus K: ssa.

Huomaa, että τ ja $d\tau$ ovat Lorentz-invariantteja skalaareja (ks. kappale 5.3.) eli saavat saman arvon kaikissa koordinaatistoissa. Jos vaihdamme määritelmäehdotuksessa (3) vektorin $\boldsymbol{V}$ komponentteina olevien osamäärien jakajissa olevat dt-termit $d\tau$-termeiksi, saamme

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(t) = \frac{d\boldsymbol{X}}{d\tau} = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right).$$

---

[1] Yhtälössä (4) u tarkoittaa hiukkasen klassista kolminopeutta (oikeammin ”kolmivauhtia”) koordinaatistossa K eli yhtälön (2) mukaan $u = |\boldsymbol{u}|$, missä $\boldsymbol{u} = (dx/dt\,, dy/dt\,, dz/dt)$. Vauhdin neliö u^2 voidaan myös ilmaista skalaaritulona $u^2 = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^2$.

Tällä tavoin määritelty vektori $\boldsymbol{U}$ on Lorentz-kovariantti, sillä koordinaatistossa K' sen komponentit ovat

$$\left(\frac{dt'}{d\tau}, \frac{dx'}{d\tau}, \frac{dy'}{d\tau}, \frac{dz'}{d\tau}\right),$$

koska $d\tau$:n invarianssin perusteella $d\tau' = d\tau$. Täsmälleen samat komponentit saadaan soveltamalla Lorentz-muunnoskaavoja[1] vektoriin $\boldsymbol{U}$.

Nelinopeusvektori on kuitenkin hyödyllistä esittää muodossa, jossa derivaatat ovat K-koordinaattiajan t suhteen laskettuja. Tällainen muoto saadaan sijoittamalla äskeisessä määritelmäyhtälössä tekijän $d\tau$ paikalle yhtälön (4) mukaisesti dt/γ, missä $\gamma = \gamma(u) = 1/\sqrt{1-u^2}$ ja u on hiukkasen tavallinen kolminopeus K:ssa. Näin saamme

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(t) = \gamma \frac{d\boldsymbol{X}}{dt} = \gamma\left(\frac{dt}{dt}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = \gamma\left(1, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right).$$

Määritelmä 6.3.2. Hiukkasen nelinopeus.

Tarkastellaan hiukkasta, joka liikkuu koordinaatistossa $\mathrm{K}(t, x, y, z)$. Olkoon u hiukkasen kolminopeus hetkellä t. Hiukkasen *nelinopeus* samalla hetkellä määritellään nelivektorina $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(t)$

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(\tau) = \frac{d\boldsymbol{X}}{d\tau} = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right),$$

missä $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(t) = (t, x, y, z)$ on hiukkasen nelipaikkavektori hetkellä t ja τ on hiukkasen ominaisaika $d\tau = dt/\gamma$.

K-koordinaateissa lausuttuna nelinopeusvektori on

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(t) = \gamma\left(1, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right), \qquad \text{missä } \gamma = \gamma(u) = 1/\sqrt{1-u^2}.$$

[1] Kun jakaja $d\tau$ pysyy invarianttina, niin muunnos kohdistuu vain vektoriin (dt, dx, dy, dz), josta Lorentz-muunnos tekee vektorin (dt', dx', dy', dz'),

Vaikka nelinopeusvektorin Lorentz-kovarianssi perusteltiinkin edellä varsin luotettavasti, niin varmistamme asian vielä yksityiskohtaisemmin seuraavassa esimerkissä.

Esimerkki 6.3.3. Nelinopeusvektorin Lorentz-kovarianssin varmistaminen.
Oletetaan taas, että hiukkanen liikkuu nopeudella u koordinaatiston K(t, x, y, z) suhteen x-akselin suunnassa ja olkoon K'(t', x', y', z') tavalliseen tapaan toinen koordinaatisto, joka liikkuu K:n suhteen nopeudella v myös x-akselin suunnassa.

Hiukkasen nopeus u' koordinaatiston K' suhteen on tällöin, kuten edellä kävi ilmi (ks. yhtälö (*) kappaleessa 6.2.1.),

$$u' = \frac{u - v}{1 - vu} \quad .$$

Hiukkasen K-nelinopeus[1] on määritelmän perusteella

$$\boldsymbol{U} = \gamma(u)\left(1, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = \gamma(u)(1, u, 0, 0) = (\gamma(u), \gamma(u) \cdot u, 0, 0),$$

joten hiukkasen K-nelinopeuden komponentit ovat

$$U_0 = \gamma(u)$$
$$U_1 = \gamma(u) \cdot u$$
$$U_2 = U_3 = 0\,.$$

Vastaavasti hiukkasen K'-nelinopeus on määritelmän mukaan

$$\boldsymbol{U} = \gamma(u')\left(1, \frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}\right) = \gamma(u')(1, u', 0, 0) = (\gamma(u'), \gamma(u') \cdot u', 0, 0),$$

joten hiukkasen K'-nelinopeuden komponentit ovat

$$U'_0 = \gamma(u')$$
$$U'_1 = \gamma(u') \cdot u'$$
$$U'_2 = U'_3 = 0\,.$$

[1] eli K-koordinaattien avulla ilmaistu nelinopeus.

Kertoimelle $\gamma(u')$ saamme

$$\gamma(u') = \frac{1}{\sqrt{1-(u')^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u-v}{1-uv}\right)^2}} = \frac{1-uv}{\sqrt{1-v^2}\cdot\sqrt{1-u^2}}$$
$$= \gamma(v)\cdot\gamma(u)\cdot(1-vu)$$

Sijoittamalla tämä lauseke kertoimen $\gamma(u')$ paikalle saamme komponentille U_0'

$$\begin{aligned} U_0' &= \gamma(u') = \gamma(v)\cdot\gamma(u)\cdot(1-vu) \\ &= \gamma(v)\cdot(\gamma(u) - v\cdot\gamma(u)u) \\ &= \gamma(v)\cdot(U_0 - v\cdot U_1), \end{aligned}$$

mikä on täsmälleen Lorentz-muunoskaavan (K→K') mukainen tulos.

Vastaavasti sijoittamalla $\gamma(u') = \gamma(v)\cdot\gamma(u)\cdot(1-uv)$ja $u' = (u-v)/(1-vu)$ saamme komponentille U_1'

$$\begin{aligned} U_1' &= \gamma(u')\cdot u' = \gamma(v)\cdot\gamma(u)\cdot(1-vu)\cdot\frac{u-v}{1-vu} \\ &= \gamma(v)\cdot\gamma(u)\cdot(u-v) \\ &= \gamma(v)\cdot(\gamma(u)u - v\gamma(u)) \\ &= \gamma(v)\cdot(U_1 - vU_0), \end{aligned}$$

mikä on myös täsmälleen Lorentz-muunnoskaavan (K→K') mukainen tulos.

Muut nelinopeuden komponentit U_2, U_3, U_2' ja U_3' ovat nollia ja ovat automaattisesti Lorentz-kovariantteja.

Näin olemme varmistaneet, että nelinopeusvektori on noudattaa Lorentz-muunnosta eli on Lorentz-kovariantti.

6.3.4. Nelinopeusvektorin invariantti itseisarvo eli ”pituus”

Edellisen esimerkin perusteella x-koordinaattinopeudella u liikkuvan hiukkasen nelinopeuden $\boldsymbol{U}$ komponentit ovat

$$U_0 = \gamma(u)$$

$$U_1 = \gamma(u) \cdot u$$
$$U_2 = U_3 = 0\,,$$

missä $\gamma(u) = 1/\sqrt{1-u^2}$.

Nelinopeusvektorin $\boldsymbol{U}$ itseisarvon (eli ”pituuden”) neliö on siis

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{U}|^2 = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{U} &= (U_0)^2 - (U_1)^2 - (U_2)^2 - (U_3)^2 \\
&= \big(\gamma(u)\big)^2 - (\gamma(u) \cdot u)^2 \\
&= \big(\gamma(u)\big)^2 - (\gamma(u) \cdot u)^2 \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\right)^2 - \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)^2 \\
&= \frac{1-u^2}{1-u^2} = 1\,.
\end{aligned}$$

Koska nelivektoreiden skalaaritulot (ja sen myötä itseisarvot) ovat Lorentz-muunnoksessa invariantteja, niin saatu tulos $|\boldsymbol{U}|^2 = \boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{U} = 1$ pätee kaikissa koordinaatistoissa.

Saamme siis hieman yllättävän tuloksen, että jokaisen hiukkasen (tai minkä tahansa aineellisen objektin) nelinopeuden itseisarvo $|\boldsymbol{U}| = 1$, joka voidaan – koska käytämme luonnollisia yksiköitä – tulkita valon nopeudeksi. Jos olisimme käyttäneet muita yksiköitä, niin samat laskut antaisivat tuloksen $|\boldsymbol{U}| = c$. Kuvaannollisesti voimme siis sanoa, että *avaruusajassa kaikki liikkuu valon nopeudella*.

Edellä saatu tulos pätee myös hiukkasen omassa *lepokoordinaatistossa*, jonka suhteen hiukkasen nopeus $u = 0$. Tällöin on $\gamma = \gamma(u) = 1/\sqrt{1-0^2} = 1$ ja hiukkasen nelinopeusvektori on

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{U} &= (U_0, U_1, U_2, U_3) \\
&= \gamma\left(\frac{dx_0}{dt}, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}\right) \\
&= \gamma\left(\frac{dt}{dt}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \\
&= \gamma(1, u\,, 0\,, 0) \\
&= 1(1, 0\,, 0\,, 0)
\end{aligned}$$

$$= (1, 0, 0, 0),$$

minkä tuloksen voimme tulkita sanomalla, että lepokoordinaatistossaankin hiukkanen ”liikkuu valon nopeudella aika-akselin suuntaan”.

Huomautus 6.3.4.1. Fotonilla ei ole nelinopeutta.

Huomaa, että nelinopeus ei ole määritelty fotonille (valohiukkaselle), jonka nopeus jokaisen koordinaatiston suhteen on $u = c = 1$. Tällöin nelinopeuden lausekkeessa esiintyvä kerroin γ saisi arvon $\gamma = 1/\sqrt{1-u^2} = 1/\sqrt{1-1^2} = 1/0$, joka on määrittelemätön. Nelinopeus on määritelty vain hiukkasille, joiden koordinaattinopeus[1] on pienempi kuin valon nopeus.

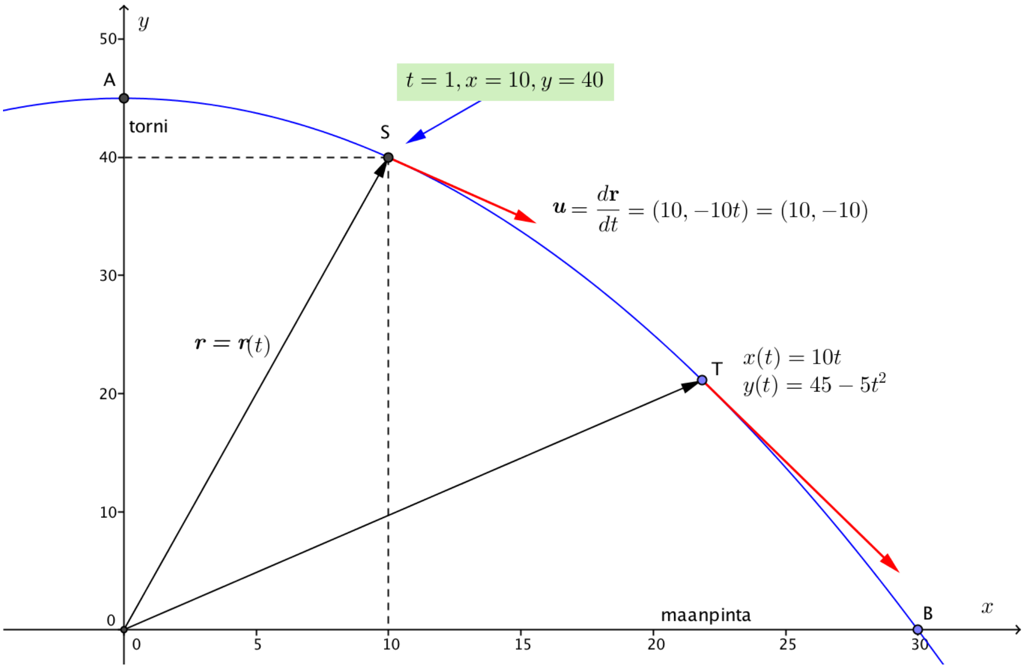
6.3.5. Hiukkasen nelinopeusvektori on sen maailmanviivan tangentin suuntainen.

Tarkastelemme aluksi hiukkasen (kiven) klassista lentorataa xy-koordinaatistossa tilanteessa, joka muistuttaa aiemmin käsittelemäämme vasaran putoamisliikettä (ks. esimerkki 3.1.1.).

Esimerkki 6.3.5.1. Kiven nopeusvektori on sen lentoradan tangentin suuntainen.

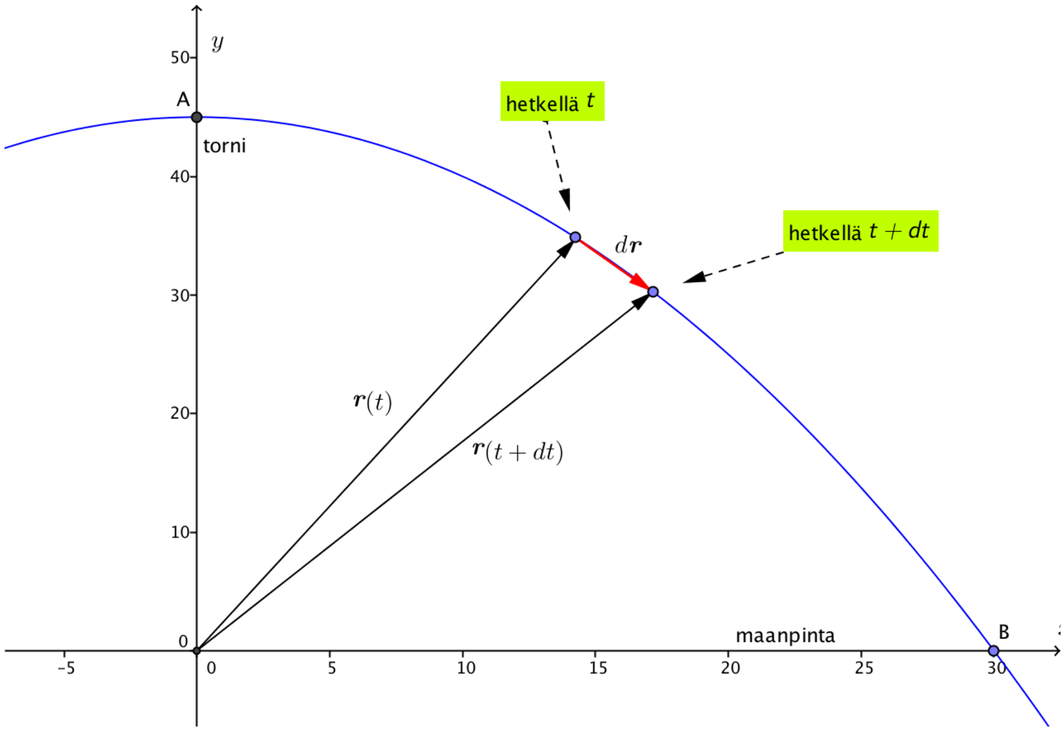
Tarkastelemme kuvion 26 esittämää tilannetta. Kivi heitetään 45 m korkean tornin huipusta A hetkellä $t = 0$ (s) vaakasuuntaan alkunopeudella 10 m/s. Heiton jälkeen kivi liikkuu vaakasuunnassa ($+x$) tasaisella nopeudella 10 m/s. Pystysuunnassa ($-y$) se putoaa putouslain mukaisesti (ks. esimerkki 3.1.1.) kiihtyvällä nopeudella. Ajanhetkellä t (s) kiven paikkavektori $\boldsymbol{r} = (x(t), y(t)) = (10t, 45 - 5t^2)$. Kuviossa piste $\mathrm{T} = (10, 40)$ on kiven paikka hetkellä $t = 1$.

[1] Hiukkasen koordinaattinopeus u tarkoittaa nopeutta jonkin inertiaalikoordinaatiston K suhteen. Lorentz-muunnoskaavoista seuraa, että jos $u < 1$ (eli $u < c$), niin tämä ehto on voimassa jokaisessa muussakin inertiaalikoordinaatistossa K’ eli $u' < 1$.



KUVIO 26. Kivi heitetään 45 m korkeasta tornista hetkellä $t = 0$ vaakasuoraan alkunopeudella 10 m/s. Kiven lentorata on kuvattu *xy*-koordinaatistossa, jonka origo on maanpinnalla tornin juurella.

Kiven nopeusvektori $\boldsymbol{u}$ hetkellä t on $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t) = d\boldsymbol{r}/dt = (dx/dt\,, dy/dt) = (10, -10t)$. Lentoradan pisteessä T kiven nopeusvektori on $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(1) = (10, -10)$ ja vauhti on $u = |\boldsymbol{u}| = \sqrt{10^2 + (-10)^2} = 10\sqrt{2} \approx 14$ m/s. Kuvion perusteella nopeusvektori $\boldsymbol{u}$ näyttää olevan lentoradan tangentin suuntainen. Tämä havainto onkin oikea, sillä nopeusvektorin $\boldsymbol{u} = d\boldsymbol{r}/dt$ suunta on sama kuin paikkavektorin infinitesimaalisen muutoksen $d\boldsymbol{r}$ suunta, sillä jakaja dt (eli kertoja $1/dt$) on skalaari eikä vaikuta $\boldsymbol{u}$:n suuntaan, mutta kylläkin pituuteen. Vektori $d\boldsymbol{r}$ puolestaan voidaan ajatella lentoradan kahden ”vierekkäisen” pisteen välisenä vektorina, joka on tietysti lentoradan (ja sen tangentin) suuntainen (Kuvio 27).



KUVIO 27. Paikkavektorin $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ muutos $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t + dt) - \boldsymbol{r}(t)$ siirryttäessä lentoradan pisteestä (hetkellä t) äärettömän lähellä olevaan "vierekkäiseen" pisteeseen (hetkellä $t + dt$). Paikan infinitesimaalista muutosta osoittava vektori $d\boldsymbol{r}$ on ratakäyrän (eli sen tangentin) suuntainen. Nopeusvektori $\boldsymbol{u}(t) = d\boldsymbol{r}/dt$ on samansuuntainen vektorin $d\boldsymbol{r}$ kanssa.

* * * * * * *

Äskeisen esimerkin johtopäätös pätee myös kolmiulotteisessa paikka-avaruudessa liikkuville hiukkasille. Jos hiukkasen paikkavektori hetkellä t on $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ niin sen nopeusvektori $\boldsymbol{u}$ samalla hetkellä on

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

Jälleen nopeusvektori $\boldsymbol{u}(t)$ on samansuuntainen kuin paikkavektorin infinitesimaalinen muutos $d\boldsymbol{r}$, joka puolestaan on hiukkasen ratakäyrän (ja sen tangentin) suuntainen.

* * * * * * *

Yllä esitetyt päätelmät voidaan yleistää myös hieman abstraktimpaan tilanteeseen eli hiukkasen liikkeeseen neliulotteisessa avaruusajassa. Liikkuvan hiukkasen *maailmanviiva* eli

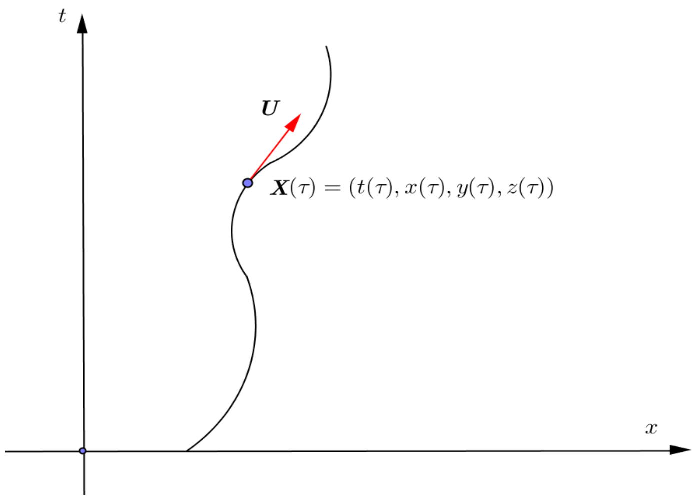
”liikerata” koordinaatistossa K(t, x, y, z) voidaan ajatella käyränä, joka koostuu tapahtumapisteistä (t, x, y, z) ”ajanhetkellä t hiukkanen on paikassa (x, y, z)”.
Hiukkasen nelipaikkavektori $\boldsymbol{X} = (t, x, y, z)$ ja sen koordinaatit on nyt luontevaa esittää hiukkasen invariantin ominaisajan τ funktioina: $t = t(\tau), x = x(\tau), y = y(\tau), z = z(\tau)$.
Hiukkasen *nelipaikkavektori* ominaisaikahetkellä τ on siis

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(\tau) = (t(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau))$$

ja hiukkasen *nelinopeusvektori* $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(\tau)$ samalla ominaisaikahetkellä on

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(\tau) = \frac{d\boldsymbol{X}}{d\tau} = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right).$$

Koska ominaisajan muutos $d\tau$ on skalaari, niin nelinopeusvektorin $\boldsymbol{U}(\tau)$ suunta on jälleen sama kuin nelipaikkavektorin infinitesimaalisen muutoksen $d\boldsymbol{X}$ suunta. Mutta $d\boldsymbol{X}$ on hiukkasen maailmanviivan ”vierekkäisten” pisteiden välinen nelivektori (dt, dx, dy, dz) ja siten automaattisesti maailmanviivan ja sen tangentin suuntainen.
Hiukkasen nelinopeusvektori on siis hiukkasen maailmanviivan tangentti. Alla oleva kuvio havainnollistaa asiaa typistetyssä tx-avaruusaikakoordinaatistossa, jossa hiukkasen liike tapahtuu pitkin x-akselia.



KUVIO 28. Hiukkasen maailmanviiva tx-avaruusaikakoordinaatistossa. Pisteessä $\boldsymbol{X}(\tau) = (t(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau))$ on nelinopeusvektori $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(\tau)$ maailmanviivan tangentti.

6.3.6. Nelinopeus $\boldsymbol{U}$ ja kolminopeus $\boldsymbol{u}$.

Määritelmän 6.3.2. mukaan nelinopeusvektori K-koordinaattimuodossa esitettynä on

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(t) = \gamma\left(1, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right), \qquad \text{missä } \gamma = \gamma(u) = 1/\sqrt{1-u^2}.$$

Mutta tässä kolme viimeistä komponenttia ovatkin hiukkasen klassisen kolminopeuden $\boldsymbol{u}$ komponentteja, sillä

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3) = (u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right).$$

Tästä syystä nelinopeusvektori K-koordinaateissa kirjoitetaankin usein muotoon

$$\boldsymbol{U} = \gamma(1, \boldsymbol{u}) = (\gamma, \gamma\boldsymbol{u}), \qquad \text{missä } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \text{ ja } \boldsymbol{u} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right),$$

jolloin nelinopeusvektorin itseisarvon neliö on

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U} &= (U_0)^2 - (U_1)^2 - (U_2)^2 - (U_3)^2 \\
&= \gamma^2 - (\gamma u_1)^2 - (\gamma u_2)^2 - (\gamma u_3)^2 \\
&= \gamma^2(1 - [(u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2] \\
&= \gamma^2(1 - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}) \\
&= \gamma^2(1-u^2), \qquad \text{koska } \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = u^2 \\
&= \frac{1}{1-u^2}(1-u^2), \qquad \text{koska } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

minkä tuloksen todistimme jo edellä kappaleessa 6.3.4. Nelinopeuden itseisarvon neliöllä on kaikille hiukkasille koordinaateista riippumaton invariantti arvo $\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U} = 1$.

6.4. Nelikiihtyvyys

Klassisessa Newtonin mekaniikassa (ks. kappale 4.1.) hiukkasen kiihtyvyysvektori $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t)$ määritellään kolminopeusvektorin $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t)) = (u_x(t), u_y(t), u_z(t))$ aikaderivaattana $\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{u}/dt$. Tällä tavoin määritelty kiihtyvyys ei ole Lorentz-kovariantti eikä siksi kelpaa relativistisen mekaniikan kiihtyvyyskäsitteeksi. Luonteva relativistinen määritelmä saadaan korvaamalla hiukkasen kolminopeus $\boldsymbol{u}$ nelinopeudella $\boldsymbol{U}$ ja koordinaattiaika t ominaisajalla τ. Näin määritelty vektori

(1) $$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\tau) = \frac{d\boldsymbol{U}}{d\tau} = \left(\frac{dU_0}{d\tau}, \frac{dU_1}{d\tau}, \frac{dU_2}{d\tau}, \frac{dU_3}{d\tau}\right) = \left(\frac{dU_t}{d\tau}, \frac{dU_x}{d\tau}, \frac{dU_y}{d\tau}, \frac{dU_z}{d\tau}\right)$$

on nelivektori eli Lorentz-kovariantti vektori (koska $d\boldsymbol{U}$ on nelivektori ja $d\tau$ on invariantti skalaari). Kutsumme nelivektoria $\boldsymbol{A}$ hiukkasen *nelikiihtyvyydeksi*.
Koska $d\tau = dt/\gamma$, niin nelikiihtyvyys voidaan esittää myös K-koordinaattiajan avulla

(2) $$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(t) = \gamma\frac{d\boldsymbol{U}}{dt} = \gamma\left(\frac{dU_0}{dt}, \frac{dU_1}{dt}, \frac{dU_2}{dt}, \frac{dU_3}{dt}\right) = \gamma\left(\frac{dU_t}{dt}, \frac{dU_x}{dt}, \frac{dU_y}{dt}, \frac{dU_z}{dt}\right)$$

Nelikiihtyvyyden $\boldsymbol{A}$ komponenteille $\boldsymbol{A} = (A_0, A_1, A_2, A_3) = (A_t, A_x, A_y, A_z)$ pätee siis

(3) $$A_k = \frac{dU_k}{d\tau} = \gamma\frac{dU_k}{dt}\ , \qquad \text{kaikilla } k = 0, 1, 2, 3\ ,$$

ja edelleen, koska $U_k = dx_k/d\tau = \gamma(dx_k/dt)$, niin

(4) $$A_k = \frac{d^2x_k}{d\tau^2} = \gamma^2\frac{d^2x_k}{dt^2}\ , \qquad \text{kaikilla } k = 0, 1, 2, 3\ ,$$

tai vektorimuodossa

(5) $$\boldsymbol{A} = \frac{d^2\boldsymbol{X}}{d\tau^2} = \gamma^2\frac{d^2\boldsymbol{X}}{dt^2}\ , \qquad \text{kaikilla } k = 0, 1, 2, 3\ .$$

Yhtälöt (4) ja (5) määrittelevät hiukkasen nelikiihtyvyyden $\boldsymbol{A}$ nelipaikan $\boldsymbol{X}$ toisena derivaattana ominaisajan suhteen. Tässäkin on selvä analogia klassiseen mekaniikkaan, jossa (kolmi)kiihtyvyys $\boldsymbol{a}$ määritellään myös nopeuden derivaattana eli paikan toisena derivaattana. Erona on tietysti se, että nelikiihtyvyys on Lorentz-kovariantti, mitä kolmikiihtyvyys ei ole.

6.4.1. Nelikiihtyvyyden ja nelinopeuden skalaaritulo

Olemme aiemmin todistaneet (ks. kappale 6.3.4. tai 6.3.6.), että jokaisen hiukkasen nelinopeusvektorin $\boldsymbol{U}$ itseisarvolla eli skalaaritulolla itsensä kanssa on vakioarvo

$$\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{U} = 1\ .$$

Derivoimalla tämä yhtälö puolittain ominaisajan τ suhteen saadaan

$$\frac{d(\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{U})}{d\tau} = 0\,,$$

josta soveltamalla tulon derivoimissääntöä (ks. kappale 3.3.) seuraa

$$\frac{d\boldsymbol{U}}{d\tau} \cdot \boldsymbol{U} = 0\,,$$

eli

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{U} = 0\,.$$

Tämän tuloksen voi kuvaannollisesti[1] ilmaista sanomalla, että nelikiihtyvyys ja nelinopeus ovat ortogonaaliset (tarkemmin: *Minkowski-ortogonaaliset*). Kolmivektoreillahan skalaaritulon häviämisestä (=0) seuraa vektoreiden kohtisuoruus aivan konkreettisesti. Tämän totesimme aiemmin mm. käsitellessämme esimerkissä 3.4.1. tasaista ympyräliikettä, jossa vastaava tulos $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ tarkoitti kiihtyvyys- ja nopeusvektoreiden kohtisuoruutta: nopeusvektori oli ympyrän tangentin suuntainen ja kiihtyvyysvektori säteen suuntainen.

6.4.2. Nelikiihtyvyys hiukkasen omassa lepokoordinaatistossa

Tarkastelemme nyt avaruusajassa liikkuvaa hiukkasta sen omassa lepokoordinaatistossa, jossa hiukkasen kolminopeus $u = 0$ ja $\gamma = 1$ sekä koordinaattiaika on sama kuin ominaisaika eli $t = \tau$.

Edellisessä kappaleessa todettiin, että hiukkaselle on aina voimassa yhtälö

$$(1) \qquad \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{U} = 0\,,$$

eli komponenttimuodossa

$$(2) \qquad A_0 U_0 - A_1 U_1 - A_2 U_2 - A_3 U_3 = 0\,.$$

Mutta hiukkasen lepokoordinaatistossa nelinopeuden komponentit ovat

$$(3) \qquad U_0 = \frac{d\tau}{d\tau} = 1, \qquad U_1 = U_2 = U_3 = 0\,,$$

[1] Mutta vain kuvaannollisesti, koska nelivektoreiden Minkowski-skalaarituloa $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{U}$ ei voida tulkita geometrisesti samalla tavalla kuin kolmivektoreiden euklidista skalaarituloa. Kuvioon 28 ei siis voi piirtää vektoria $\boldsymbol{A}$ kohtisuoraan $\boldsymbol{U}$ vastaan.

joten yhtälö (2) sievenee muotoon

(4) $$A_0 = 0\,.$$

Hiukkasen lepokoordinaatistossa nelikiihtyvyyden komponentit ovat siis

(5) $$\boldsymbol{A} = (0, A_1, A_2, A_3) = (0, \boldsymbol{a}).$$

Omassa lepokoordinaatistossaan hiukkasen nelikiihtyvyydellä ei ole *ajankaltaista* komponenttia. Avaruudenkaltaiset komponentit muodostavat kolmivektorin

(6) $$\boldsymbol{a} = (A_1, A_2, A_3) = \left(\frac{d^2x_1}{d\tau^2}, \frac{d^2x_2}{d\tau^2}, \frac{d^2x_3}{d\tau^2}\right) = \left(\frac{d^2x}{d\tau^2}, \frac{d^2y}{d\tau^2}, \frac{d^2z}{d\tau^2}\right),$$

joka on klassinen kiihtyvyysvektori hiukkasen lepokoordinaatistossa.

6.5. Avaruusmatka vakiokiihtyvyydellä raketin koordinaatiston suhteen

Olkoon $\mathrm{K}(t, x, y, z)$ Maahan kiinnitetty koordinaatisto. Avaruusraketti lähtee matkalle hetkellä $t = 0$ ja etenee suoraviivaisesti Maan x-akselin suunnassa siten, että raketin nelikiihtyvyys sen omassa lepokoordinaatistossa $\boldsymbol{A} = (0, A_1, A_2, A_3) = (0, a, 0, 0)$, missä komponentti a on vakio ja yhtä suuri kuin Maan putouskiihtyvyys[1]. Oletamme, että raketin lepokoordinaatiston akselit ovat samansuuntaisia K:n akseleiden kanssa.

TEHTÄVÄ:

(i) Määritä raketin nopeus Maan suhteen Maan hetkellä t. **(ii)** Raketti ohittaa kolmoistähti Triplan[2] Maan hetkellä t, jolloin raketin Maanopeus on 99 % valon nopeudesta. Määritä t. **(iii)** Mitä aikaa τ raketin kello näyttää Triplan ohitushetkellä? Oletetaan, että raketinkin kello on nollattu lähtöhetkellä, jolloin siis $t = \tau = 0$. **(iv)** Kuinka kaukana Maasta Tripla on?

<u>RATKAISUN ALKULAUSE:</u>

Raketin kiihtyvän liikkeen vuoksi sen ja Maan ja koordinaatistot eivät ole pysyvästi inertiaalisia, koska niiden välinen suhteellinen nopeus u ei ole vakio, vaan muuttuu ajan

---

[1] eli $a = g = 10\ \mathrm{m/s^2}$, jolloin matkustajat kokevat samanlaisen ”painon” kuin Maan pinnalla ollessaan.
[2] Tripla on puhtaasti kuvitteellinen kohde.

funktiona (joko Maan koordinaattiajan t funktiona $u = u(t)$ tai raketin kellon mittaaman ominaisajan τ funktiona $u = u(\tau)$). Voimme kuitenkin pitää Maan ja raketin koordinaatistoja *hetkellisesti inertiaalisina* Maan hetkellä t (eli infinitesimaalisella välillä $(t, t + dt)$) tai raketin hetkellä τ (eli välillä $(\tau, \tau + d\tau)$), joten Lorentz-muunnoskaavat koordinaatistojen välillä ovat voimassa jokaisella hetkellä. Tällöin on huomattava, että muunnoskaavoissa esiintyvä Lorentz-kerroin $\gamma = \gamma(u) = 1/\sqrt{1 - u^2}$ ei ole vakio, koska $u = u(t) = u(\tau)$ ei ole vakio vaan muuttuu ajan (Maan ajan t tai raketin ajan τ) funktiona.

<u>RATKAISUN STRATEGIA:</u>

Ratkaisun lähtökohtana ovat raketin nelikiihtyvyyden $\boldsymbol{A}$ ja nelinopeuden $\boldsymbol{U}$ typistetyt komponenttiesitykset

(1) $\boldsymbol{A} = (A_0, A_1) = (0, a)$,

(2) $\boldsymbol{U} = (U_0, U_1) = (1,0)$

raketin omassa koordinaatistossa. Kuten usein aiemminkin jätämme komponentit 2 ja 3 pois sillä ne ovat molemmissa (raketin ja Maan) koordinaatistoissa nollia.

Lähtemällä nelivektoreista (1) ja (2) voimme Lorentz-muunnoskaavoja käyttäen *kahdella eri tavalla* laskea nelikiihtyvyyden $\boldsymbol{A}$ *hetkelliset* komponentit (itse asiassa tarvitsemme vain komponentin A_1) Maan koordinaatistossa. Kun nämä eri tavoilla saadut komponentin A_1 lausekkeet merkitään yhtä suuriksi, saadaan differentiaaliyhtälö, josta nopeusfunktio $u = u(\tau)$ ratkaista.

<u>RATKAISUN VAIHE 1 (kiihtyvyyden Maakomponentin A'_1 laskeminen kahdella eri tavalla):</u>

Kiihtyvyysnelivektorin $\boldsymbol{A}$ komponentit raketin koordinaatistossa[1] ovat yllä olevan yhtälön (1) mukaan $(A_0, A_1) = (0, a)$. Koska $\boldsymbol{A}$ on nelivektori, niin sen hetkelliset[2] komponentit (A'_0, A'_1) Maakoordinaatistossa[3] saadaan Lorentz-muunnoksella eli

(3) $A'_0 = \gamma(A_0 + uA_1) = \gamma u a$,

---

[1] Tässä näkyvät vain kaksi ensimmäistä komponenttia. Kaksi viimeistä nollakomponenttia on jätetty tilan säästämiseksi pois.
[2] tietyllä Maahetkellä t tai rakettihetkellä τ.
[3] Tässä joudumme merkitsemään pilkullisilla symboleilla (A'_0, A'_1) nelikiihtyvyyden Maakomponentteja. Pilkuttomat symbolit oli ehditty ja varata raketin lepokoordinaatistolle.

(4) $\quad A_1' = \gamma(A_1 + uA_0) = \gamma a\,,$

missä $u = u(t) = u(\tau)$ on raketin nopeus kyseisellä hetkellä Maan koordinaatiston suhteen sen x-akselin suunnassa, jolloin Maan nopeus raketin suhteen on $-u$, mistä syystä lausekkeissa (3) ja (4) on plusmerkit, ja $\gamma = \gamma(u) = 1/\sqrt{1-u^2} = (1-u^2)^{-1/2}$.

Toinen tapa laskea komponentit A_0' ja A_1' on lähteä yhtälöstä (2) ja laskea ensin Lorentz-muunnoksella raketin nelinopeuden hetkelliset komponentit (U_0', U_1') Maan koordinaatistossa. Tällöin saamme

(5) $\quad U_0' = \gamma(U_0 + uU_1) = \gamma\,,$

(6) $\quad U_1' = \gamma(U_1 + uU_0) = \gamma u\,,$

missä u ja γ ovat kuten edellä yhtälöissä (3) ja (4).
Tämän jälkeen saamme nelikiihtyvyyden määritelmän perusteella komponentin A_1' derivoimalla nelinopeuden komponentin U_1' ominaisajan (eli raketin ajan) τ suhteen.

$$A_1' = \frac{dU_1'}{d\tau} = \frac{d(\gamma u)}{d\tau}$$

$$= \frac{d(\gamma u)}{du} \cdot \frac{du}{d\tau} \qquad \text{[ketjusäännön perusteella, ks. kappale 3.3.]}$$

$$= \left[\frac{d(\gamma)}{du} \cdot u + \gamma \cdot \frac{du}{du}\right] \cdot \frac{du}{d\tau} \qquad \text{[tulon derivoimissäännön perusteella]}$$

$$= \left[\frac{d(\gamma)}{du} \cdot u + \gamma\right] \cdot \frac{du}{d\tau} \qquad \text{[koska } du/du = 1\text{]}\,.$$

Tässä on potenssin derivoimissäännön ja ketjusäännön perusteella

$$\frac{d(\gamma)}{du} = \frac{d}{du}(1-u^2)^{-1/2} = -\frac{1}{2} \cdot (1-u^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2u) = \frac{u}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{(1-u^2)\sqrt{1-u^2}}\,.$$

Näin voimme jatkaa keskeytynyttä laskelmaa ja saamme

$$A_1' = \left[\frac{u^2}{(1-u^2)\sqrt{1-u^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\right] \cdot \frac{du}{d\tau}$$

$$= \left[\frac{u^2}{(1-u^2)\sqrt{1-u^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\right] \cdot \frac{du}{d\tau},$$

joka sievenee muotoon

$$(7) \qquad A_1' = \left[\frac{1}{(1-u^2)\sqrt{1-u^2}}\right] \cdot \frac{du}{d\tau} = \left[\frac{\gamma}{(1-u^2)}\right] \cdot \frac{du}{d\tau}.$$

RATKAISUN VAIHE 2 (differentiaaliyhtälön muodostaminen ja ratkaiseminen):

Edellä laskimme raketin nelikiihtyvyyden Maakomponentin A_1' kahdella eri tavalla. Saatujen tulosten (4) ja (7) täytyy olla samat, joten saamme differentiaaliyhtälön

$$\left[\frac{\gamma}{(1-u^2)}\right] \cdot \frac{du}{d\tau} = \gamma a \qquad \text{[jaetaan puolittain tekijällä } \gamma\text{]}$$

eli

$$\left[\frac{1}{(1-u^2)}\right] \cdot \frac{du}{d\tau} = a \ .$$

Tässä differentiaaliyhtälössä on tuntemattomana funktio $u = u(\tau)$. Voimme vaihtaa aikamuuttujaksi Maakoordinaatiston koordinaattiajan t sijoittamalla $d\tau = dt/\gamma$, jolloin saamme yhtälön

$$\left[\frac{\gamma}{(1-u^2)}\right] \cdot \frac{du}{dt} = a$$

eli koska $\gamma = 1/(1-u^2)^{1/2}$

$$(8) \qquad \left[\frac{1}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}\right] \cdot \frac{du}{dt} = a.$$

Tässä yhtälössä on tuntemattomana raketin nopeus $u = u(t)$ ilmaistuna Maan koordinaattiajan t funktiona. Kellojen nollauksesta lähtöhetkellä seuraa, että funktio u toteuttaa alkuehdon $u(0) = 0$.

Kertomalla (8) puolittain tekijällä dt saadaan yhtälö

$$\frac{du}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} = a \cdot dt\,,$$

josta $u = u(t)$ ratkaistaan integroimalla molemmat puolet eli

$$(9) \qquad \int \frac{du}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \int a\, dt\,.$$

Vasemmalla puolella oleva integraalifunktio on

$$\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} + \text{vakio}\,,$$

minkä voi vahvistaa oikeaksi derivoimalla tuloksen u:n suhteen (käytä osamäärän derivoimissääntöä ja ketjusääntöä). Oikealla puolella oleva integraali antaa tulokseksi

$$at + \text{vakio},$$

joten yhtälö (9) sievenee muotoon

$$(10) \qquad \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} = at + \text{vakio}\,,$$

missä integroimisvakiot on yhdistetty oikealle puolelle. Alkuehdosta $u(0) = 0$ seuraa, että tämän vakion täytyy olla nolla. Tämän jälkeen yhtälöstä (10) ratkaistaan kysytty tuntematon funktio $u = u(t)$ korottamalla ensin molemmat puolet neliöön. Tulokseksi saadaan

$$(11) \qquad u = u(t) = \frac{at}{\sqrt{a^2t^2+1}}\,.$$

Tämä lauseke ilmaisee raketin Maanopeuden Maan hetkellä t.

RATKAISUN VAIHE 3 (Vastaukset tehtävän kysymyksiin):

(i) Määritä raketin nopeus Maan suhteen Maan hetkellä t.

Yhtälö (11) antaa vastauksen tähän kysymykseen, kun a:n paikalle sijoitetaan raketin oletettu vakiokiihtyvyys $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$ eli putouskiihtyvyys Maan pinnalla. Huomaa, että yhtälö (9) on johdettu käyttäen (esim. Lorentz-muunnoksissa) luonnollisia yksiköitä, jolloin sekunti on lausuttava metreinä eli $1\ \mathrm{s} = 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m}$ ja

$$g = 10 \cdot \frac{\mathrm{m}}{9 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m}^2} = 1{,}1 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{m}^{-1},$$

mistä sivumennen näemme, että kiihtyvyyden luonnollinen yksikkö on $1/\mathrm{m}$.

(ii) Raketti ohittaa kolmoistähti Triplan Maan hetkellä t, jolloin raketin Maanopeus on 99 % valon nopeudesta. Määritä t.

Sijoitamme yhtälöön (10) $u = 0{,}99c = 0{,}99$ ja $a = g$ (ja tietysti vakio = 0) ja sen jälkeen ratkaistaan t, jolloin saadaan kysytty aika luonnollisissa yksiköissä (metreinä)

(12) $$t = \frac{u}{g\sqrt{1-u^2}} = \frac{0{,}99}{1{,}1 \cdot 10^{-15} \cdot \sqrt{1-0{,}99^2}} \approx 6{,}4 \cdot 10^{15}\ \mathrm{m}\,.$$

Vastaus muunnetaan ensin sekunneiksi jakamalla valon nopeudella $3 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$, jolloin saadaan

(13) $$t \approx 2{,}1 \cdot 10^7\ \mathrm{s} \approx 0{,}67\ \text{vuotta} = 245\ \text{vrk}.$$

(iii) Mitä aikaa τ raketin kello näyttää Triplan ohitushetkellä? Oletetaan, että raketinkin kello on nollattu lähtöhetkellä, jolloin siis asetetaan $t = \tau = 0$.

Yhtälö $\tau = t/\gamma$ ilmaisee raketin ajan τ Maan ajan t avulla. Sen avulla emme voi kuitenkaan suoraan laskea matkaan kulunutta rakettiaikaa, sillä Lorentz-kerroin $\gamma = 1/\sqrt{1-u^2} = 1/\sqrt{1-u(t)^2}$ ei ole matkan aikana vakio, vaan muuttuu nopeuden u mukana (joka puolestaan muuttuu Maan ajan t funktiona. Kullakin hetkellä voimme kuitenkin käyttää yhtälön $\tau = t/\gamma$ differentiaaliversiota

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} = dt\sqrt{1-u(t)^2}\,,$$

jossa sijoitamme $u(t)$:n paikalle edellä johdetun lausekkeen (11). Saamme seuraavan differentiaaliyhtälön muuttujien τ ja t välille

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} = dt\sqrt{1 - \frac{a^2t^2}{a^2t^2+1}} = \frac{dt}{\sqrt{a^2t^2+1}},$$

josta edelleen integroimalla

$$\int d\tau = \int \frac{dt}{\sqrt{a^2t^2+1}} \ . \qquad \text{[integroimisvakio} = 0]$$

Tämän differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$(14) \qquad \tau(t) = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{1+q(t)}{1-q(t)}\right), \text{missä } q(t) = \frac{at}{\sqrt{a^2t^2+1}}$$

minkä voi derivoimalla vahvistaa oikeaksi[1].

Yhtälö (14) ilmaisee raketin ajan τ ja Maan ajan t funktiona. Sijoittamalla t:n paikalle yhtälön (12) tulos saamme

$$(15) \qquad \tau(t) = 2{,}4 \cdot 10^{15}\,\frac{1}{\mathrm{m}} \approx 0{,}25 \text{ vuotta} \approx 93 \text{ vrk}\,.$$

Vertaamalla tätä yhtälössä (13) saatuun tulokseen huomaamme, että Maan kellon mukaan samaan matkaan oli kulunut huomattavasti pidempi aika.

(iv) Kuinka kaukana Maasta Tripla on?

Oletamme, että Maakoordinaatiston x-akseli suuntautuu kohti matkan määränpäätä, jolloin raketin kulloisenkin sijainnin x-koordinaatti ilmaisee raketin kulkeman matkan. Yllä yhtälössä (11) selvisi, että raketin nopeus u Maan hetkellä t on

$$u = u(t) = \frac{at}{\sqrt{a^2t^2+1}}.$$

[1] Derivoinnissa tarvitaan kappaleessa 3.3. esitettyjä sääntöjä.

Näin ollen raketin infinitesimaalisella aikavälillä $(t, t + dt)$ kulkema matka on

$$dx = u(t) \cdot dt = \frac{at}{\sqrt{a^2t^2 + 1}} dt\,,$$

josta integroimalla ja käyttämällä alkuehtoa $x = x(t) = 0$, kun $t = 0$, saadaan

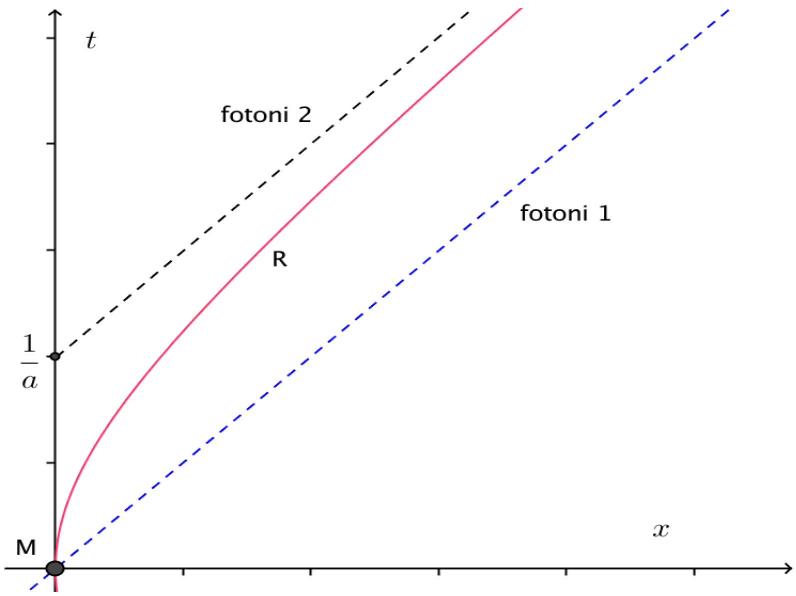
$$\int dx = \int \frac{at}{\sqrt{a^2t^2 + 1}} dt$$

ja

(16) $$x = x(t) = \frac{1}{a}\left(\sqrt{a^2t^2 + 1} - 1\right).$$

Sijoitamme tähän $a = g = 1{,}1 \cdot 10^{-15}\ 1/\mathrm{m}$ ja $t = 6{,}4 \cdot 10^{15}\ \mathrm{m}$, jolloin saamme

$$x \approx 5{,}55 \cdot 10^{15}\ \mathrm{m}\ \approx 210 \text{ valovuorokautta}\,.$$



KUVIO 29. Yhtälön (16) perusteella hahmoteltu origosta x-akselin suuntaan hetkellä $t = \tau = 0$ kiihtyvään liikkeeseen Maasta M lähteneen raketin maailmanviiva R (punainen hyperbeli). Fotoni 1 (suora $t = x$) lähti Maasta samanaikaisesti samaan suuntaan ja jätättää rakettia. Fotoni 2 (suora $t = x + 1/a$) lähti hetkellä $t = 1/a$ ja saavuttaa rakettia, mutta ei tavoita.

Huomautus 6.5.1. Edellä esitetty fiktiivinen avaruusmatka on puhtaasti teoreettinen esimerkki, jonka avulla voidaan harjoitella kiihtyvän liikkeen relativistista käsittelyä. Kuukausia kestävän kiihtyvyyden ylläpitäminen ei liene nykytekniikalla mahdollinen. Tämä huomautus koske myös aiempaa esimerkkiä kappaleessa 5.4.

* * * * * * *

6.6. Liikemäärä, voima ja energia

Klassisen mekaniikan (ks. luku 4) tärkeitä kolmivektorisuureita ovat hiukkasen paikka $\boldsymbol{r}$ (tai $\boldsymbol{x}$), nopeus $\boldsymbol{v}$ (tai $\boldsymbol{u}$), kiihtyvyys $\boldsymbol{a}$, liikemäärä $\boldsymbol{p}$ ja siihen kohdistuva voima $\boldsymbol{f}$. Olemme edellä määritelleet relativistiset *nelivektorivastineet* paikalle (nelipaikka $\boldsymbol{X}$), nopeudelle (nelinopeus $\boldsymbol{U}$) ja kiihtyvyydelle (nelikiihtyvyys $\boldsymbol{A}$). Tässä kappaleessa määrittelemme relativistiset[1] vastineet liikemäärälle (neliliikemäärä) ja voimalle (nelivoima). Niiden avulla johdamme relativistisen lausekkeen hiukkasen energialle.

6.6.1. Neliliikemäärä $\boldsymbol{P}$

Hiukkasen klassinen liikemäärä $\boldsymbol{p}$ määritellään kolmivektorina $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3) = m\boldsymbol{u}$, missä $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ on hiukkasen nopeus ja m on sen massa. Liikemäärän komponenteille pätee siis $p_k = mu_k$, missä $k = 1, 2, 3$. Vastaavasti määrittelemme hiukkasen relativistisen liikemäärän nelivektorina $\boldsymbol{P} = (P_0, P_1, P_2, P_3) = m\boldsymbol{U}$, missä $\boldsymbol{U} = (U_0, U_1, U_2, U_3)$ on hiukkasen nelinopeus. *Neliliikemäärän* komponenteille pätee $P_k = mU_k$, missä $k = 0, 1, 2, 3$.

Hiukkasen omassa lepokoordinaatistossa nelinopeuden komponentit ovat $\boldsymbol{U} = (1, 0, 0, 0)$, joten sen neliliikemäärän komponentit ovat $\boldsymbol{P} = (m, 0, 0, 0)$. Tällöin neliliikemäärän aikakomponentti p_0 on sama kuin hiukkasen massa ja avaruuskomponentit ovat nollia. (Klassinen liikemäärä $\boldsymbol{p}$ olisi nollavektori $\boldsymbol{p} = (0, 0, 0)$.)

Neliliikemäärän $\boldsymbol{P}$ komponentit yleisessä inertiaalikoordinaatistossa K(t, x, y, z) saadaan määritelmästä

$$(1) \qquad \boldsymbol{P} = m\boldsymbol{U} = m\frac{d\boldsymbol{X}}{d\tau} = m\gamma\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}\,, \qquad \text{missä } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \quad \text{ja} \quad u = |\boldsymbol{u}|\,.$$

Tässä $\boldsymbol{u}$ on hiukkasen klassinen kolminopeus K:ssa.

---

[1] eli Lorentz-kovariantit

Mutta derivaattavektorin $d\boldsymbol{X}/dt$ komponentit K:ssa ovat

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt} = \left(\frac{dt}{dt}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = \left(1, u_x, u_y, u_z\right)$$

tai toisin indeksoituina

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt} = \left(\frac{dx_0}{dt}, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}\right) = (1, u_1, u_2, u_3),$$

missä u_1, u_2, u_3 (tai u_x, u_y, u_z) ovat hiukkasen kolminopeuden $\boldsymbol{u}$ komponentit K:ssa.

Yhtälön (1) perusteella neliliikemäärän K-komponentit ovat

(2) $$\boldsymbol{P} = \gamma m(1, u_1, u_2, u_3) = \gamma(m, mu_1, mu_2, mu_3) = \gamma(m, p_1, p_2, p_3),$$

eli

(3) $$\begin{cases} P_0 = \gamma m \\ P_k = \gamma p_k, \qquad k = 1, 2, 3\,. \end{cases}$$

Neliliikemäärän aikakomponentin P_0 fysikaaliseen merkitykseen palaamme myöhemmin. Avaruuskomponenttien[1] muodostama kolmivektori $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3)$ on hiukkasen klassinen liikemäärä, minkä vuoksi yhtälö (2) usein kirjoitetaan muotoon

(4) $$\boldsymbol{P} = \gamma(m, \boldsymbol{p}).$$

Laskemme vielä invariantit (Minkowski) skalaaritulot $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{U}$ ja $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A}$.

(5) $$\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P} \;=\; m\boldsymbol{U} \cdot m\boldsymbol{U} = m^2(\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{U}\,) = m^2 \qquad\qquad [\text{koska } \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{U} = 1]$$

Neliliikemäärän itseisarvo $\sqrt{\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}}$ on siis sama kuin hiukkasen massa[2]. Vastaavasti saamme

(6) $$\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{U} \;= m(\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{U}) = m\,,$$

---

[1] ilman kerrointa γ

[2] Massalla m tarkoitamme ns. lepomassaa, joka on hiukkasen liikkeestä riippumaton (eli invariantti) vakio. Tässä kirjassa ei käytetä mitään muuta massan käsitettä. Fyysikot ovat pääosin hylänneet aiemmin käytetyn ”liikemassan” käsitteen sekaannusta aiheuttavana.

(7) $\quad \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A} = m(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{A}) = 0 \qquad$ [koska $\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{A} = 0$]

6.6.2. Nelivoima $\boldsymbol{F}$ ja relativistinen kolmivoima $\boldsymbol{\varphi}$ ja kolmiliikemäärä $\boldsymbol{\pi}$

Myös relativistisen voiman määrittelyssä otamme lähtökohdaksi Newtonin II lain (dynamiikan peruslaki) mukaisen idean, että voima $\boldsymbol{f}$ aiheuttaa liikemäärän muutoksen, joka on verrannollinen voiman suuruuteen eli matemaattisesti ilmaistuna $\boldsymbol{f} = d\boldsymbol{p}/dt$. Tästä saadaan nelivoiman $\boldsymbol{F}$ määritelmä vaihtamalla klassisen liikemäärän $\boldsymbol{p}$ paikalle neliliikemäärä $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{U}$ ja koordinaattiajan t paikalle (invariantti) ominaisaika τ. Siis

(R– D) $$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{P}}{d\tau}$$

Tämä yhtälö on samalla *relativistinen dynamiikan peruslaki*, joka voidaan kirjoittaa myös K-koordinaattiajan t avulla

(8) $$\boldsymbol{F} = \gamma\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \gamma m\frac{d\boldsymbol{U}}{dt}, \qquad \text{missä } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \quad \text{ja } u = |\boldsymbol{u}|$$

Nelivoiman $\boldsymbol{F}$ komponentit K:ssa ovat siten

(9) $$\boldsymbol{F} = (F_0, F_1, F_2, F_3) = \gamma\left(\frac{dP_0}{dt}, \frac{dP_1}{dt}, \frac{dP_2}{dt}, \frac{dP_3}{dt}\right).$$

Tarkastelemme aluksi nelivoiman avaruuskomponentteja

(10) $$F_k = \gamma m\frac{dU_k}{dt} = \gamma\frac{d(mU_k)}{dt}, \qquad k = 1,2,3 \text{ ja } m \text{ on vakio.}$$

Nelinopeuden avaruuskomponenteille puolestaan pätee $U_k = \gamma u_k$, missä $u_k = dx_k/dt$ on hiukkasen klassisen kolminopeuden $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ komponentti. Saamme siis

(11) $$F_k = \gamma\frac{d(\gamma m u_k)}{dt}, \qquad k = 1,2,3.$$

Jakamalla tämän yhtälön puolittain tekijällä γ saamme

(12) $$\frac{F_k}{\gamma} = \frac{d(\gamma m u_k)}{dt}, \qquad k = 1,2,3.$$

Tämä yhtälö muistuttaa klassista dynamiikan peruslakia $f_k = dp_k/dt$, joka ei ole Lorentz-kovariantti, mitä yhtälö (12) puolestaan on. Lisäksi näemme, että yhtälö (12) antaa klassisessa rajatapauksessa $u \ll 1$ (jolloin $\gamma \approx 1$) täsmälleen tuon klassisen lain, jos määrittelemme *relativistisen kolmivoiman* $\boldsymbol{\varphi}$ komponenteiksi $\varphi_k = F_k/\gamma$ (jolloin $F_k = \gamma\varphi_k$) ja *relativistisen kolmiliikemäärän* $\boldsymbol{\pi}$ komponenteiksi $\pi_k = \gamma m u_k = \gamma p_k$, missä $k = 1,2,3$. Yhtälö (12) voidaan silloin kirjoittaa K-komponenttimuotoon

$$(13) \qquad \varphi_k = \frac{d\pi_k}{dt}, \qquad k = 1,2,3.$$

tai kolmivektorimuotoon

$$(14) \qquad \boldsymbol{\varphi} = \frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt}.$$

Näillä merkinnöillä[1] voimme kirjoittaa nelivoiman K-komponenttiesityksen muotoon

$$(15) \qquad \boldsymbol{F} = (F_0, F_1, F_2, F_3) = \left(\gamma \frac{dP_0}{dt}, \gamma\varphi_1, \gamma\varphi_2, \gamma\varphi_3\right) = \gamma\left(\frac{dP_0}{dt}, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\right),$$

jota käytämme seuraavassa kappaleessa neliliikemäärän ja energian yhteyden selvittämiseen.

Huomautus 6.6.1.1. Relativististen ja klassisten kolmivektorien yhteys

Relativistinen kolmiliikemäärä $\boldsymbol{\pi}$ ja klassinen kolmiliikemäärä $\boldsymbol{p}$ liittyvät läheisesti toisiinsa sillä $\boldsymbol{\pi} = \gamma m\boldsymbol{u} = \gamma\boldsymbol{p}$ eli komponenttien avulla ilmaistuna $\pi_k = \gamma m u_k = \gamma p_k$. Klassisen Newtonin mekaniikan pienten nopeuksien tilanteessa $\gamma \approx 1$ ja $\pi_k \approx p_k$.

Relativistisen kolmivoiman $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ ja klassisen kolmivoiman $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)$ keskinäissuhde on monimutkaisempi, sillä yhtälön (12) mukaan on

$$(16) \qquad \frac{F_k}{\gamma} = \varphi_k = \frac{d(\gamma m u_k)}{dt} = m\,\frac{d(\gamma u_k)}{dt}, \qquad k = 1,2,3.$$

---

[1] *Relativistista* kolmivoimaa ja liikemäärää on tässä merkitty kreikkalaisilla kirjaimilla $\boldsymbol{\varphi}$ ja $\boldsymbol{\pi}$. Ne vastaavat latinalaisia $\boldsymbol{f}$ ja $\boldsymbol{p}$ kirjaimia, joita olemme käyttäneet klassisen kolmivoiman ja liikemäärän symboleina. Edellistä merkitään kirjallisuudessa yleisesti symbolilla $\boldsymbol{F}$, joka on tässä esityksessä varattu nelivoimalle. Huomaa, että symbolia $\boldsymbol{\pi}$ ei pidä tässä sekoittaa ympyrän kehän ja halkaisijan suhteeseen.

Jos derivaatassa $d(\gamma u_k)/dt$ tekijä γ olisi vakio, niin voisimme siirtää sen derivoinnin eteen ja saisimme liikemäärien yhteyttä vastaavan tuloksen $\varphi_k = \gamma(d(mu_k/dt)) = \gamma(dp_k/dt) = \gamma f_k$. Mutta $\gamma = \gamma(u)$ *ei ole vakio*, vaan riippuu ajasta t nopeuden $u = u(t)$ kautta. Liitteessä 2 tutkimme tarkemmin tätä asiaa. Huomattakoon kuitenkin, että klassisessa pienten nopeuksien tilanteessa $\gamma \approx 1$ eli likimain vakio, jolloin yhtälö (16) sievenee muotoon $\varphi_k \approx f_k$. Kolmivektorit $\boldsymbol{\pi}$ ja $\boldsymbol{\varphi}$ ovat siten klassisten kolmivektoreiden $\boldsymbol{p}$ ja $\boldsymbol{f}$ järkeviä yleistyksiä.

6.6.3. Neliliikemäärän *P* aikakomponentti ja energia

Tutkimme nyt tarkemmin neliliikemäärän $\boldsymbol{P}$ komponentteja koordinaatistossa K. Totesimme edellä yhtälössä (3), että komponentit ovat

$$\begin{cases} P_0 = \gamma m \\ P_k = \gamma p_k = \pi_k, \qquad k = 1, 2, 3\,. \end{cases}$$

Avaruuskomponenteilla P_1, P_2 ja P_3 on selvä fysikaalinen merkitys. Niistä muodostuva relativistinen kolmiliikemäärävektori $\boldsymbol{\pi} = (P_1, P_2, P_3)$ saadaan kertomalla klassinen kolmiliikemäärävektori $\boldsymbol{p} = (p, p_2, p_3)$ skalaarilla γ.

Aikakomponentilla $P_0 = \gamma m$ on mielenkiintoinen ja yllättäväkin fysikaalinen merkitys, jonka paljastaminen vaatii hieman matemaattista salapoliisityötä.

Lähtökohtanamme on edellisessä kappaleessa esitetty relativistisen dynamiikan peruslaki

$$\text{(R–D)} \qquad \boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{P}}{d\tau}\,.$$

Koska $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{U}$ ja $d\boldsymbol{U}/d\tau = \boldsymbol{A}$ niin saamme yhtälön

$$(17) \qquad \boldsymbol{F} = m\frac{d\boldsymbol{U}}{d\tau} = m\boldsymbol{A}$$

Kappaleen 6.4.2. yhtälössä (1) todettiin nelikiihtyvyyden $\boldsymbol{A}$ ja nelinopeuden $\boldsymbol{U}$ ortogonaalisuus $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{U} = 0$, jonka seurauksena

$$(18) \qquad \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{U} = m(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{U}) = 0.$$

Nelivoima ja nelinopeus ovat siis myöskin ortogonaalisia. Laskemme nyt pistetulon $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{U}$ näiden nelivektoreiden komponenttien avulla. Edellisen kappaleen yhtälön (15) perusteella nelivoiman $\boldsymbol{F}$ komponentit ovat

(19) $$\begin{cases} F_0 = \gamma\,(dP_0/dt) \\ F_k = \gamma\varphi_k,\ k = 1,2,3 \end{cases}$$

ja nelinopeuden $\boldsymbol{U}$ komponentit ovat

(20) $$\begin{cases} U_0 = \gamma \\ U_k = \gamma u_k,\ k = 1,2,3, \end{cases}$$

missä $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ on hiukkasen klassinen kolminopeus. Yhtälö (18) saa nyt muodon

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{U} &= F_0U_0 - F_1U_1 - F_2U_2 - F_3U_3 \\ &= \gamma\frac{dP_0}{dt} \cdot \gamma - \gamma\varphi_1 \cdot \gamma u_1 - \gamma\varphi_2 \cdot \gamma u_2 - \gamma\varphi_2 \cdot \gamma u_2 \\ &= \gamma^2\left(\frac{dP_0}{dt} - \varphi_1u_1 - \varphi_2u_2 - \varphi_2u_2\right) \\ &= \gamma^2\left[\frac{dP_0}{dt} - (\varphi_1u_1 + \varphi_2u_2 + \varphi_2u_2)\right] \\ &= \gamma^2\left[\frac{dP_0}{dt} - (\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{u})\right]. \end{aligned}$$

Koska $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{U} = 0$ ja $\gamma^2 \neq 0$, täytyy olla

(21) $$\frac{dP_0}{dt} = \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{u}\,.$$

Nelivoimavektorin $\boldsymbol{F}$ aikakomponentti koordinaatistossa K on siis

(22) $$F_0 = \gamma\frac{dP_0}{dt} = \gamma(\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{u}),$$

Ymmärtääksemme paremmin neliliikemäärän aikakomponentin P_0 fysikaalisen merkityksen tarkastelemme yhtälöä (21) klassisessa tilanteessa, jossa $\boldsymbol{\varphi} \approx \boldsymbol{f}$. Tällöin saamme

(23) $$\frac{dP_0}{dt} = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \cdot \frac{d\boldsymbol{s}}{dt} = \frac{\boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{s}}{dt}\,,$$

missä $\boldsymbol{ds}$ on hiukkasen ajassa dt kulkema differentiaalinen matka. Mutta luvussa 2 (ks. esimerkki 2.4.15) näimme, että kolmivoiman ja matkan skalaaritulo on sama kuin voiman tekemä työ. Tässä tapauksessa kyseessä on differentiaalinen työ $dW = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{ds}$. Niinpä (23) voidaan kirjoittaa muotoon

(24) $$\frac{dP_0}{dt} = \frac{dW}{dt},$$

mistä integroimalla seuraa, että

(25) $$P_0 = W + \text{vakio}\,.$$

Voimme siis tulkita neliliikemäärän aikakomponentin P_0 työksi, jonka hiukkaseen vaikuttava voima on tehnyt. Tämän työn voidaan ajatella varastoituneen hiukkaseen *energiana* (esimerkiksi liike-energiana) E, jonka nollatasoa yhtälön (25) vakio osoittaa. Toisin sanoen

(26) $$P_0 = E\,, \qquad\qquad [\text{tavallisia yksiköitä käytettäessä } P_0 = E/c]$$

jolloin neliliikemäärän komponenttiesitys saa muodon

(27) $$\boldsymbol{P} = (E, \gamma p_1, \gamma p_2, \gamma p_3) = (E, \gamma \boldsymbol{p}),$$

missä $\boldsymbol{p} = (p, p_2, p_3)$ on hiukkasen klassinen kolmiliikemäärä.

Laskemme komponenttiesityksen (27) avulla nelivektorin $\boldsymbol{P}$ skalaaritulon itsensä kanssa:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P} &= E^2 - (\gamma^2 {p_1}^2 + \gamma^2 {p_2}^2 + \gamma^2 {p_3}^2) \\ &= E^2 - ({\pi_1}^2 + {\pi_2}^2 + {\pi_3}^2) \\ &= E^2 - \pi^2,\end{aligned}$$

missä $\pi^2 = \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi}$ eli hiukkasen relativistisen kolmiliikemäärän $\boldsymbol{\pi}$ itseisarvon neliö.

Toisaalta tiedämme (ks. yhtälö (5) edellä), että

$$\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P} = m^2\,,$$

joten saamme yhtälön

$$(28) \qquad E^2 = m^2 + \pi^2,$$

joka sitoo hiukkasen energian, massan ja relativistisen kolmiliikemäärän yhteen.

Huomautus 6.6.3.1. Relativistiset ja muut mittayksiköt.
Tässä kirjassa olemme käyttäneet systemaattisesti luonnollista (eli *relativistista*) yksikköjärjestelmää, jossa sekä matkan että ajan yksikkönä on metri (= aika, joka valolta kuluu metrin pituiseen matkaan). Tällöin valon nopeus $c = 1$ ja kaikki muutkin nopeudet u ovat paljaita lukuja ja $|u| \leq 1$. Tämä pätee myös nopeusvektoreiden (sekä kolmi- ja nelivektoreiden) komponenteille. Kiihtyvyyden ja sen komponenttien yksikkö on nopeuden yksikkö jaettuna ajan yksiköllä eli $1/\mathrm{m}$. Massan yksikkö on tavalliseen tapaan kg. Liikemäärän ja sen komponenttien yksikkö on massan yksikkö kerrottuna nopeuden yksiköllä eli myös kg. Energia on liikemäärän komponentti, joten senkin yksikkö on kg. (Samaan yksikköön päädytään myös vaikkapa klassisesta liike-energian lausekkeesta $E_k = mv^2/2$ tai painovoimakentän potentiaalienergian lausekkeesta $E_p = mgh$.) Yhtälössä (28) on siis kaikkien termien (E^2, m^2 ja π^2) yksikkönä kg^2 eli kilogramman neliö, jolloin myös energian, massan ja liikemäärän yksiköt ovat samat eli kg. Tämä merkitään usein lyhyesti hakasulkeiden avulla: $[E] = [m] = [\pi] = \mathrm{kg}$

Luonnollisen yksikköjärjestelmän käyttö helpottaa relativistisen fysiikan matemaattista käsittelyä, mutta käytännön sovelluksissa on usein tarpeellista kirjoittaa kaavat esim. SI-järjestelmässä. Yleinen sääntö on, että luonnollisessa järjestelmässä kirjoitettu yhtälö voidaan muuntaa muuhun järjestelmään lisäämällä yhtälön termeihin tekijöitä c tai c^2 niin, että kummallekin puolelle tulee sama yksikkö eli *dimensio*. Tarkastelkaamme esimerkiksi usein käyttämämme aikakoordinaatin Lorentz-muunnoskaava (K → K')

$$(29) \qquad t' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(t - vx),$$

jossa on käytetty luonnollisia yksiköitä $[v] = 1$ ja $[t] = [x] = \mathrm{m}$. Kaava muunnetaan SI-järjestelmään, jossa $[v] = [c] = \mathrm{m/s}$, $[t] = [t'] = \mathrm{s}$ ja $[x] = \mathrm{m}$, lisäämällä (pienin mahdollinen määrä) tekijöitä c tai c^2 oikealle puolelle niin, että sen dimensio tulee samaksi (= sekunti) kuin vasemmallakin puolella. Huomaamme, että (i) neliöjuuren alla v on korvattava suhteella v/c, jotta juurrettava olisi paljas luku ja (ii) termin vx yksikkö on sopivalla kertoimella saatava samaksi kuin termin t yksikkö eli sekunniksi. Tämä sopiva kerroin on $1/c^2$. Näin saamme kaavan (29) SI-muodon

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \tag{30}$$

jossa molempien puolien yksiköt ovat samat (sekunti).

Soveltamalla samaa tekniikkaa kaavaan (28) saamme sen SI-muodon:

$$E^2 = m^2c^4 + \pi^2c^2, \tag{31}$$

jossa lähtökohtana oli vasemman puolen dimensio

$$[E^2] = \left(\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\right)^2 = \frac{\mathrm{kg}^2\cdot\mathrm{m}^4}{\mathrm{s}^4} = \mathrm{J}^2\,,$$

minkä jälkeen oikean puolen molemmat termit on täydennetty sopivilla c-kertoimilla samaan dimensioon.

* * * * * * *

Huomautus 6.6.3.2. Energia-massa-liikemäärä yhtälön yleinen muotoilu. Olemme edellä mm. kaavoissa (28) ja (31) merkinneet hiukkasen *relativistista kolmiliikemäärää* symbolilla $\boldsymbol{\pi}$ ja sen johdannaisilla $\pi = \sqrt{\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\pi}}$ tai π_k. Menettelimme näin tehdäksemme selvän eron relativistisen kolmiliikemäärän $\boldsymbol{\pi}$ ja Newtonin mekaniikan klassisen kolmiliikemäärän $\boldsymbol{p}$ välille. Näiden välillähän vallitsee yhteys $\boldsymbol{\pi} = \gamma\boldsymbol{p}$. Suhteellisuusteoriaa käsittelevässä kirjallisuudessa merkitään kuitenkin yleisesti, edellisestä poiketen, relativistista kolmiliikemäärää symbolilla $\boldsymbol{p}$ ja siksi kirjaamme alle tärkeät energia-massa-liikemäärä yhtälöt (28) ja (31) tämän standardimerkintätavan mukaisesti.

Energian, massan ja relativistisen kolmiliikemäärän yhteys standardimuodossa

Olkoon hiukkasen energia E, massa m ja relativistinen kolmiliikemäärä $\boldsymbol{p}$. Silloin pätevät yhtälöt

(28Y − lu) $\quad E^2 = m^2 + p^2,$

(31Y − c) $\quad E^2 = m^2c^4 + p^2c^2,$

missä $p^2 = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p}$ ja $\boldsymbol{p} = \gamma m \boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{u} = d\boldsymbol{r}/dt$ ja $\boldsymbol{r} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$.

6.6.4. Einsteinin energiayhtälö

Edellä johdetun yhtälön (26) mukaan $P_0 = E$ eli hiukkasen neliliikemäärän aikakomponentti on sama kuin hiukkasen energia. Toisaalta on $P_0 = mU_0 = \gamma m = m/\sqrt{1-u^2}$, joten saamme hiukkasen energialle yhtälön

(32) $$E = \frac{m}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Liitteessä 3 osoitetaan, että lauseke $1/\sqrt{1-u^2}$ voidaan esittää ns. päättymättömänä sarjana

(33) $$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = 1 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{3}{8}u^4 + \frac{5}{16}u^6 + \cdots \quad .$$

Jos hiukkasen nopeus u on valon nopeuteen verrattuna pieni (esim. alle 10 % valon nopeudesta eli $u < 0{,}1$), niin potenssit u^4, u^6, … ovat häviävän pieniä. Silloin on

(34) $$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}u^2$$

ja saamme hiukkasen energialle lausekkeen

(35– lu) $$E \approx m\left(1 + \frac{1}{2}u^2\right) = m + \frac{mu^2}{2}$$

tai SI-yksikköihin ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s) täydennettynä

(35– SI) $$E \approx mc^2 + \frac{mu^2}{2} \; .$$

Jälkimmäinen termi $mu^2/2$ on selvästi hiukkasen liike-energia. Mutta levossa $(u = 0)$ olevalla hiukkasellakin on energiaa, jota voimme kutsua *lepo-energiaksi*. Sen suuruus on

(36– lu) $$E \approx m \, ,$$

(35– SI) $$E \approx mc^2 \, .$$

Nämä empiirisestikin todennetut yhtälöt osoittavat, että massa ja energia ovat saman asian eri ilmenemismuotoja. Luonnollisessa yksikköjärjestelmässä niillä onkin sama yksikkö: $[E] = [m] = \mathrm{kg}$.

Esimerkki 6.6.4.1. Suomen sähköntuotanto.
Suomen sähköntuotannon vuotuinen volyymi on 175 miljoonaa megawattituntia. Kuinka suuren massan m lepoenergiaa tämä energiamäärä vastaa?

Vuodessa tuotettu sähköenergia E on SI-yksiköissä

$$E = 1{,}75 \cdot 10^8 \ \mathrm{MWh} \approx 6{,}3 \cdot 10^{17} \ \mathrm{Ws} = 6{,}3 \cdot 10^{17} \ \mathrm{J} = 6{,}3 \cdot 10^{17} \ \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

Massan m lepoenergian mc^2 tulee olla samansuuruinen, joten saamme yhtälön

$$mc^2 = 6{,}3 \cdot 10^{17} \ \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \, ,$$

josta jakamalla puolittain tekijällä $c^2 = 9 \cdot 10^{16} \ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$ saamme kysytyksi massaksi

$$m = \left(6{,}3 \cdot 10^{17} \ \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \right) \Bigg/ \left(9 \cdot 10^{16} \ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \right) \approx 7{,}0 \ \mathrm{kg} \, .$$

Esimerkki 6.6.4.2. Auringon massakato.

Auringon säteilyteho on $4 \cdot 10^{26}$ wattia. Kuinka paljon Auringon massa vähenee sekunnissa?

Auringon säteilemä energia on peräisin auringon sisäosissa tapahtuvista ydinreaktioista, joissa aineellinen massa muuttuu säteilyenergiaksi (fotoneiksi) Einsteinin energiayhtälön (35) mukaisesti. Yhden sekunnin aikana poistuva säteilyenergia $\Delta E = 4 \cdot 10^{26}$ J ja vastaava Auringon massakato Δm saadaan yhtälöstä (35 – SI)

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \left(4 \cdot 10^{26} \ \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \right) \Big/ \left(9 \cdot 10^{16} \ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \right) \approx 4 \cdot 10^9 \ \mathrm{kg}$$

eli neljä miljoonaa tonnia. Määrä tuntuu suurelta, mutta tällä vauhdilla Auringon massakato viidessä miljardissa vuodessa on ”vain”

$$5 \cdot 10^9 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 4 \cdot 10^9 \ \mathrm{kg} \ \approx 6{,}3 \cdot 10^{26} \ \mathrm{kg} \, ,$$

joka on vain kolmasosapromille Auringon massasta $2 \cdot 10^{30}$ kg.

* * * * * * *

LIITTEET

Liite 1.
Nelivektoreiden skalaaritulon invarianssi Lorentz-muunnoksessa

Liite 2.
Klassisen ja relativistisen kolmivoiman yhteys

Liite 3.
Binomisarja

LIITE 1. Nelivektoreiden skalaaritulon invarianssi Lorentz-muunnoksessa

Kappaleessa 6.2.3.5. näimme, että nelivektorin $\boldsymbol{A} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ skalaaritulo itsensä kanssa $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = {A_0}^2 - {A_1}^2 - {A_2}^2 - {A_3}^2$ säilyy invarianttina Lorentz-muunnoksessa. Tällä skalaaritulolla, jota kutsuttiin myös nelivektorin $\boldsymbol{A}$ nelipituuden neliöksi, on siis sama lukuarvo kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa. Yleistämme tämän havainnon kaikille nelivektoreiden välisille skalaarituloille $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$.

LAUSE: Olkoot $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ mielivaltaisia nelivektoreita. Silloin skalaaritulo $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ on Lorentz-invariantti eli tällä tulolla on sama lukuarvo kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa.

TODISTUS: Olkoot $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ mielivaltaisia avaruusajan nelivektoreita. Tarkastellaan näiden nelivektoreiden summaa $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$. On helppo nähdä, että $\boldsymbol{C}$ on myös nelivektori eli Lorentz-kovariantti. (Tämä seuraa Lorentz-muunnoksen lineaarisuudesta.) Koska $\boldsymbol{C}$ on nelivektori, niin sen skalaaritulo itsensä kanssa $\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{C}$ on invariantti lukuarvo. Mutta

$$\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B} + 2(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}),$$

sillä nelivektoreiden skalaaritulo noudattaa tuttuja kertolaskun laskulakeja[1]. Näin ollen

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{C} - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B})$$

missä oikealla puolella olevat skalaaritulot ovat Lorentz-invariantteja nelivektoreiden skalaarituloja itsensä kanssa. Tämän vuoksi myös vasemman puolen täytyy olla invariantti. MOT

[1] Skalaaritulohan on teknisesti koordinaattien (siis lukujen) kertomista ja sitä kautta skalaaritulo ”perii” lukujen laskulait.

LIITE 2. Klassisen ja relativistisen kolmivoiman yhteys

Klassisessa mekaniikassa hiukkaseen kohdistuva (kolmi)voima $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)$ määritellään Newtonin dynamiikan peruslailla

(1) $$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3\ ) = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d(m\boldsymbol{u})}{dt} = m\left(\frac{du_1}{dt}, \frac{du_2}{dt}, \frac{du_3}{dt}\right),$$

missä m on hiukkasen massa, $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{u}$ on klassinen 3-liikemäärä ja

(2) $$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3\ ) = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}\right) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

on klassinen 3-nopeus. Tässä $t = x_0, x = x_1, y = x_2$ ja $z = x_3$ ovat hiukkasen koordinaatit, jossakin inertiaalikoordinaatistossa K.

Relativistinen nelivoima $\boldsymbol{F} = (F_0, F_1, F_2, F_3\ )$ määriteltiin vastaavasti vaihtamalla klassinen 3-liikemäärä $\boldsymbol{p}$ relativistiseksi 4-liikemääräksi $\boldsymbol{P} = (P_0, P_1, P_2, P_3\ )$ ja koordinaattiaika t (invariantiksi) ominaisajaksi τ.

(3) $$\boldsymbol{F} = (F_0, F_1, F_2, F_3\ ) = \frac{d\boldsymbol{P}}{d\tau} = \frac{d(m\boldsymbol{U})}{d\tau} = m\left(\frac{dU_0}{d\tau}, \frac{dU}{d\tau}, \frac{dU_2}{d\tau}, \frac{dU_3}{d\tau}\right),$$

missä m on hiukkasen massa, $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{U}$ on 4-liikemäärä ja

(4) $$\boldsymbol{U} = (U_0, U_1, U_2, U_3\ ) = \left(\frac{dx_0}{d\tau}, \frac{dx_1}{d\tau}, \frac{dx_2}{d\tau}, \frac{dx_3}{d\tau}\right) = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right)$$

on klassinen 3-nopeus. Tässäkin $t = x_0, x = x_1, y = x_2$ ja $z = x_3$ ovat hiukkasen koordinaatit, jossakin inertiaalikoordinaatistossa K.

Yhtälö (3) on relativistisen dynamiikan peruslaki samoin kuin (1) on klassisen dynamiikan peruslaki.

Vektoreiden $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{P}$ ja $\boldsymbol{U}$ komponentit ovat derivaattoja ominaisajan τ suhteen. Usein on kuitenkin hyödyllistä ilmaista asiat käytetyn koordinaatiston K koordinaattiajan t avulla.

Tämä onnistuu, sillä t ja τ ovat sidoksissa toisiinsa yhtälön $d\tau = dt/\gamma$ välityksellä, missä γ on hiukkasen 3-nopeudesta[1] u riippuva Lorentz-kerroin $\gamma = (1-u^2)^{-1/2}$. Näin saamme 4-nopeuden, -liikemäärän ja –voiman lausutuksi koordinaattiajan avulla

(5) $$\boldsymbol{U} = (U_0, U_1, U_2, U_3) = \gamma\left(\frac{dt}{dt}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = \gamma(1, u_1, u_2, u_3) = \gamma(1, \boldsymbol{u}),$$

(6) $$\boldsymbol{P} = (P_0, P_1, P_2, P_3) = m\boldsymbol{U} = \gamma m(1, u_1, u_2, u_3) = \gamma m(1, \boldsymbol{u}) = \gamma(m, \boldsymbol{p}),$$

(7) $$\boldsymbol{F} = (F_0, F_1, F_2, F_3) = \frac{d\boldsymbol{P}}{d\tau} = \gamma\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \gamma\frac{d[\gamma m(1, \boldsymbol{u})]}{dt} = \gamma\frac{d[(\gamma m, \gamma\boldsymbol{p})]}{dt},$$

Arkielämän pienillä nopeuksilla (esimerkiksi alle 1000 km/s, joka on yksi kolmassadasosa valon nopeudesta) $\gamma \approx 1$ ja $d\tau \approx dt$ näiden 4-vektoreiden avaruusosat ovat suurella tarkkuudella samat kuin vastaavat Newtonin mekaniikan 3-vektorit $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}$ ja $\boldsymbol{f}$. Relativistisilla nopeuksilla näin ei ole. Jos esimerkiksi nopeus 15 000 km/s, joka on 5 % valon nopeudesta, niin $\gamma \approx 1{,}005$ ja poikkeama klassisista suureista on n. 5 promillea. Kymmenkertaisella nopeudella 150 000 km/s on $\gamma \approx 1{,}7$ ja poikkeama 70 %. Nämä arviot pätevät 4-nopeuden ja 4-liikemäärän avaruusosille, jotka ovat yhtälöiden (5) ja (6) perusteella $\gamma\boldsymbol{u}$ ja $\gamma\boldsymbol{p}$.

Nelivoiman tapauksessa tilanne on mutkikkaampi. Yhtälön (7) oikealla puolella viimeisen muodon avaruusosan laskeminen vaatii tulon[2] $\boldsymbol{\pi} = \gamma\boldsymbol{p}$ derivoimista ajan t suhteen. Tällöin on huomattava, että tekijä $\gamma = (1-u^2)^{-1/2}$ on vakio *vain tasaisessa liikkeessä* olevalle hiukkaselle, mutta yleisesti nopeuden $u = u(t)$ vaihdellessa ajan t funktiona myös γ riippuu ajasta. Ketjusäännön avulla saamme

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{du}{dt}\cdot\frac{d}{du}\left[(1-u^2)^{-1/2}\right] = \frac{du}{dt}\cdot\left[-\frac{1}{2}(1-u^2)^{-3/2}\cdot(-2u)\right]$$

$$= a\cdot\left[u(1-u^2)^{-3/2}\right] = a\cdot u\cdot\gamma^3\,,$$

missä $a = du/dt$ on hiukkasen klassisen kiihtyvyyden itseisarvo $a = |\boldsymbol{a}|$.

---

[1] Tavalliseen tapaan oletamme yksinkertaisuuden vuoksi, että hiukkanen liikkuu x-akselin suunnassa. Tämä ei vähennä tarkastelun yleispätevyyttä, sillä voimme aina valita koordinaattiakselien suunnat sopiviksi.

[2] Tekstissä annoimme tälle tulolle $\boldsymbol{\pi} = \gamma\boldsymbol{p}$ nimen ”relativistinen 3-liikemäärä”.

Tulon derivoimissäännön avulla saamme yhtälöstä (7) nelivoiman $\boldsymbol{F}$ avaruusosaksi

$$\gamma \frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} = \gamma \frac{d(\gamma \boldsymbol{p})}{dt} = \gamma \left(\frac{d\gamma}{dt}\boldsymbol{p} + \gamma \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\right)$$

$$= \gamma(au\gamma^3\, \boldsymbol{p} + \gamma \boldsymbol{f}),$$

missä sulkeissa oleva 3-vektori on juuri relativistinen kolmivoima $\boldsymbol{\varphi}$. Sehän määriteltiin kappaleessa 6.2.2. kolmivektoriksi, jonka komponentit ovat $\varphi_k = F_k/\gamma,\ k = 1, 2, 3$. Relativistinen 3-voima $\boldsymbol{\varphi}$ ja relativistinen 3-liikemäärä $\boldsymbol{\pi}$ toteuttavat yleistetyn Newtonin dynamiikan peruslain $\boldsymbol{\varphi} = d\boldsymbol{\pi}\,/dt$, joka epärelativistisella alueella (pienillä nopeuksilla) approksimoituu perinteiseksi Newtonin dynamiikan laiksi $\boldsymbol{f} = d\boldsymbol{p}\,/dt$.

Relativistiselle kolmivoimalle $\boldsymbol{\varphi}$ pätee siis

(8) $$\boldsymbol{\varphi} = \gamma(au\gamma^3\, \boldsymbol{p} + \gamma \boldsymbol{f}) = amu\gamma^4\, \boldsymbol{u} + \gamma^2 \boldsymbol{f} = \frac{amu}{(1-u^2)^2}\boldsymbol{u} + \frac{1}{1-u^2}\boldsymbol{f}\,,$$

missä $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{f}$ ovat klassinen 3-nopeus ja 3-voima. Näemme, että relativistisella 3-voimavektorilla $\boldsymbol{\varphi}$ on kaksi komponenttia: klassisen nopeuden $\boldsymbol{u}$ suuntainen (eli liikkeen suuntainen) komponentti ja klassisen voiman $\boldsymbol{f}$ suuntainen komponentti. Niinpä esimerkiksi ympyräradalla liikkuvaan relativistiseen hiukkaseen kohdistuu keskipisteeseen suuntautuvan keskeisvoiman $\boldsymbol{f}$ lisäksi myös rataympyrän tangentin suuntainen voima.

* * * * * * *

LIITE 3. Binomisarja

Binomin $x+1$ kokonaiset potenssit $(x+1)^n$, missä $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, voidaan kehittää polynomeiksi joko suorittamalla kertolaskut $(x+1)(x+1)\ldots(x+1)$ tai käyttämällä ns. *binomikaavaa*

$$\text{(Bin: } n) \qquad (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \cdots + \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)}x^{n-1} + x^n \,,$$

missä $(1+x)^n$ on kehitetty muuttujan x nousevien potenssien mukaan polynomiksi, jonka alin termi on $x^0 = 1$ ja ylin x^n. Polynomin kertoimet (ns. binomikertoimet) muodostavat n:nnen rivin ns. Pascalin kolmiossa. Potenssin x^k kerroin on

$$\text{(1)} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(k-1)\cdot k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,,$$

missä merkintä $\binom{n}{k}$ tarkoittaa potenssin x^k kerrointa kehitelmässä (Bin: n). Kaikki kertoimet ovat kokonaislukuja[1].

Isaac Newton (1643-1727) huomasi, että binomikaava voidaan yleistää koskemaan binomien murtopotensseja. Jos kaavaan (Bin: n) sijoitetaan $n = 1/2$ saadaan kehitelmä

$$\text{(2)} \qquad (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots \,,$$

joka onkin nyt päättymätön polynomi eli *sarja*. Sieventämällä saadaan seuraava *binomisarjakehitelmä* funktiolle $(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x}$.

$$\text{(3)} \qquad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{384}x^3 + \cdots \,,$$

[1] Tämä on selvää, kun ajatellaan polynomikehitelmän muodostamista kertolaskulla. Kerroinkaavan (1) perusteella asia ei olekaan yhä ilmeinen.

Matemaatikot ovat todistaneet, että tämä päättymätön summa *suppenee* eli jatkettaessa pidemmälle ja pidemmälle lähenee tiettyä arvoa (nimittäin arvoa $\sqrt{1+x}$), kun muuttujan x arvo on välillä $-1 < x < 1$. Jos $|x| > 1$, niin sarja *hajaantuu* eikä anna mitään järkevää loppusummaa. Sama suppenemis- tai hajaantumisehto pätee muillekin tässä käsiteltäville binomisarjoille.

Vastaavasti jos kaavaan (Bin: n) sijoitetaan $n = -1/2$ saadaan kehitelmä

(4) $$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots ,$$

joka sievenee muotoon

(5) $$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + - \cdots ,$$

Einsteinin energiayhtälöä käsittelevässä kappaleessa 6.6.4. kehitimme funktion $1/\sqrt{1-u^2}$ binomisarjaksi muuttujan u potenssien mukaan. Haluttu kehitelmä saadaan sijoittamalla yhtälössä (5) muuttujan x paikalle $(-u^2)$. Tällöin saadaan

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = 1 - \frac{1}{2}(-u^2) + \frac{3}{8}(-u^2)^2 - \frac{5}{16}(-u^2)^3 + - \cdots ,$$

joka sievenee muotoon

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = 1 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{3}{8}u^4 + \frac{5}{16}u^6 + \cdots ,$$

joka on tuon kappaleen yhtälössä (33) esitetty sarjakehitelmä. Suppenemisehto $|u^2| < 1$ on automaattisesti voimassa. Muuttuja u tarkoitti nimittäin hiukkasen nopeutta relativistisissa yksiköissä, joissa valon nopeus $c = 1$, ja sen seurauksena on $0 \leq u < 1$.