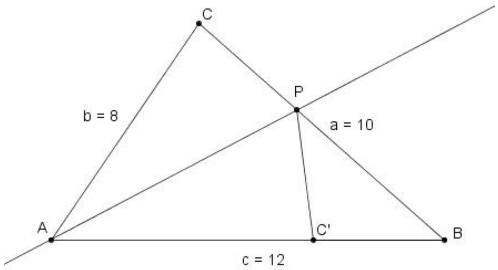
Lisää unkarilaisia matematiikan tehtäviä koululaisille

Käännös: Meri Kähkönen

1. Geometria

1. Paperista leikatun kolmion sivujen pituudet ovat 8 cm, 10 cm ja 12 cm. Kolmio taitetaan pitkin yhden kulman läpi kulkevaa suoraa niin, että lyhin ja pisin sivu tulevat päällekkäin. Saadaan kaksikerroksinen osa ja yksikerroksinen osa. Todista, että yksikerroksinen osa on tasakylkinen kolmio.



Ratkaisu:

Yksikerroksinen osa on kolmio $PC'B$, ja on siis todistettava $PC' = BC'$.

Kolmio APC on taitettu kolmioksi APC', joten $\Delta APC \cong \Delta APC'$. Jana AP puolittaa kulman CAC', joten kulmat CAP ja PAC' ovat yhtä suuret. $AC = AC = 8$, joten $BC = 4$.

Kolmion sisäkulman puolittajasuora jakaa kulman vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa, joten $\frac{BP}{PC} = \frac{12}{8} \Leftrightarrow BP = 12x, PC = 8x$

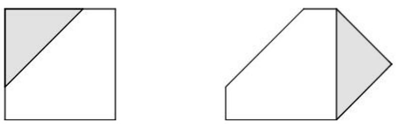
$$12x + 8x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$PC = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4, \quad PC = PC = 4 = BC.$$

2. Onko olemassa muuta tasokuviota kuin 1x1-neliö, jonka pinta-ala on 1 ja piiri 4?

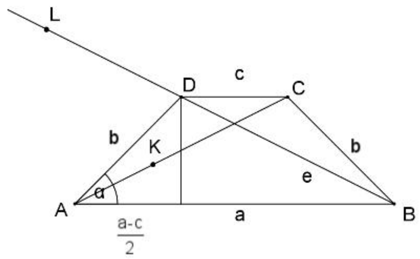
Ratkaisu:

Esim.



3. $ABCD$ on tasakylkinen puolisuunnikas. Lävistäjää BD jatketaan kärjen D yli kyljen pituuden verran, ja saadaan piste L. K on piste lävistäjällä AC, ja sen etäisyys pisteestä C on sama kuin kyljen pituus. Todista, että janojen AB ja CD sekä janojen AK ja BL muodostamien suorakulmioiden pinta-alat ovat samat.

Ratkaisu:



On siis todistettava, että
$AB \cdot DC = AK \cdot BL$

$AB \cdot DC = AK \cdot BL \quad \Leftrightarrow ac = (e - b)(e + b)$

$\Leftrightarrow e^2 = b^2 - ac$

Koska kolmion *ABC* kosinilause on $e^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(180° - \alpha)$, riittää osoittaa, että

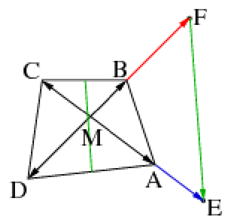
$c^2 - 2bc\cos(180° - \alpha) = ac \;\|: c$

$c - 2b\cos(180° - \alpha) = a$

eli $\cos(180° - \alpha) = \dfrac{\frac{c-a}{2}}{b}$ tai $\cos\alpha = \dfrac{\frac{a-c}{2}}{b}$. Jälkimmäinen pitää paikkansa.

4. Kuperan nelikulmion *ABCD* lävistäjät leikkaavat pisteessä *M*. Jatka lävistäjää *AC* *A*:n toiselle puolelle *MC*:n pituuden verran pisteeseen *E*, ja jatka lävistäjää *BD* *B*:n toiselle puolelle *MD*:n pituuden verran pisteeseen *F*. Osoita, että *EF* on yhdensuuntainen sivujen *AD* ja *BC* keskipisteitä yhdistävän janan kanssa.

Ratkaisu:



Nimetään pisteestä M lähtevät vektorit

$\overrightarrow{MA} = a$, $\overrightarrow{MB} = b$, $\overrightarrow{MC} = c$ ja $\overrightarrow{MD} = d$.

$\overrightarrow{ME} = a - c$ ja $\overrightarrow{MF} = b - d \Rightarrow \overrightarrow{EF} = a - c - b + d$.

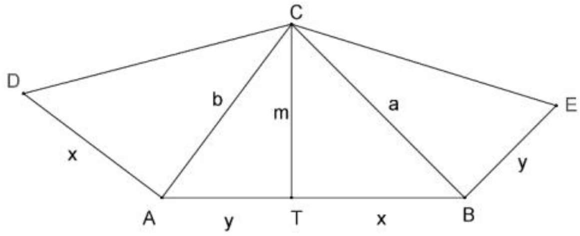
Vektori pisteestä M janan AD keskipisteeseen on $\frac{1}{2}(a + d)$ ja janan BC keskipisteeseen $\frac{1}{2}(b + c)$. Tällöin sivujen *AD* ja *BC* keskipisteitä yhdistävä jana on

$\frac{1}{2}(a + d) + \frac{1}{2}(b + c) = \frac{1}{2}(a + d - b - c) = \frac{1}{2}\overrightarrow{FE}$.

5. Kolmiossa *ABC* kärjestä *C* piirretty korkeusjana leikkaa sivun *AB* pisteessä *T*. Sivujen *AC* ja *BC* ulkopuolille piirretään suorakulmaiset kolmiot *CAD* ja *CBE* siten, että suorat kulmat ovat kulmissa *A* ja *B*. Todista, että ∠*CDE*=∠*CED*, kun *AD*=*TB* ja *BE*=*TA*.

Ratkaisu:

Muodostetaan pythagoraan lauseet kolmioille *ATC* ja *CAD*:



$b^2 = y^2 + m^2$ (1)

$CD^2 = x^2 + b^2$ (2)

Sijoitetaan kaava (1) kaavaan (2):

$CD^2 = x^2 + y^2 + m^2$ (3)

Vastaavasti pythagoraan lauseet kolmioille *BTC* ja *CBE* ovat:

$a^2 = x^2 + m^2$ (4)

$CE^2 = y^2 + a^2$ (5)

Sijoitetaan kaava (4) kaavaan (5):

$CE^2 = y^2 + x^2 + m^2$ (6)

Kaavoista (3) ja (6) seuraa: $CD^2 = CE^2$ ja koska kyseessä ovat pituudet, jotka ovat aina positiiviset: $CD = CE$. Kolmio *CDE* on siis tasakylkinen, jolloin sen kantakulmat ovat yhtä suuret, $\angle CDE = \angle CED$.

6. Punaisen pallon pinnalla on 30 valkoista täplää. (Täplät ovat pallokalotin muotoisia). Pallon ympärysmitta on 54 cm ja täplien kehän pituus 11 cm. Montako prosenttia pallon pinta-alasta on täplien peitossa?

Ratkaisu:

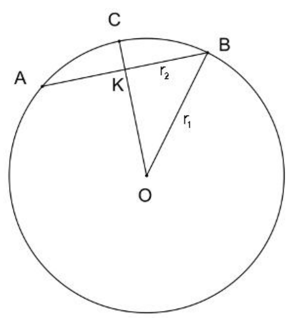
Pallon ympärysmitta on $54cm$, joten sen säde on $r_1 = \dfrac{54cm}{2\pi} \approx 8,59cm$.

Pallon pinta-ala on

$A_1 = 4\pi r^2 = 4\pi(8,59cm)^2 \approx 927,25cm^2$.

Pallokalotin muotoisen täplän pinta-ala on

$A_2 = 2\pi r_2 h = 2\pi \cdot BK \cdot CK$.



r_2 on sellaisen ympyrän säde, jonka piiri on $11cm$: $r_2 = \dfrac{11}{2\pi} \approx 1{,}75cm$.

$h = CK = r_1 - OK$. Jana OK Saadaan Pythagoraan lauseen avulla:

$OK = \sqrt{r_1^{\,2} - r_2^{\,2}} = \sqrt{8{,}59^2 - 1{,}75^2} \approx 8{,}41cm$

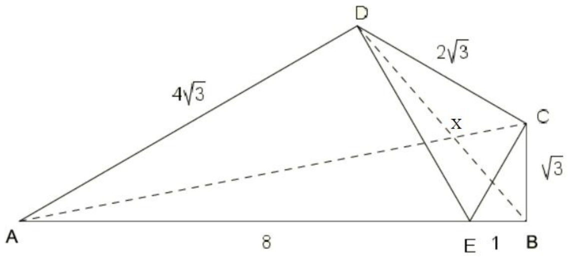
eli $h = 8{,}59cm - 8{,}41cm = 0{,}18cm$ ja

$A_2 = 2\pi r_1 h = 2\pi \cdot 8{,}59cm \cdot 0{,}18cm \approx 9{,}72cm^2$

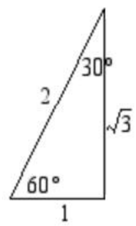
Täplien yhteenlaskettu pinta-ala on $30 \cdot 9{,}72cm^2 = 291{,}6cm^2$ ja tämän osuus koko pallon pinta-alasta on $\dfrac{291{,}6cm^2}{927{,}25cm^2} \cdot 100\% \approx 31{,}45\%$.

7. Nelikulmion kolme sivua ovat $a = 4\sqrt{3}$, $b = 9$ ja $c = \sqrt{3}$. Sivujen a ja b välisen kulman suuruus on 30° ja sivujen b ja c välisen kulman 90°. Miten suuri on lävistäjien välinen kulma?

<u>Ratkaisu:</u>



Piirretään pisteestä D Sivua AD kohtisuoraan oleva jana, joka leikkaa sivun AB pisteessä E. Tutkitaan kolmiota ADE: Koska $\angle DAE = 30^\circ$ ja $\angle ADE = 90^\circ$, niin $\angle AED = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Sivun AD pituus tuntien voidaan saadaan muistikolmion avulla $AE = 8$ ja $DE = 4$.



Yhdistetään pisteet C ja E janalla, jolloin muodostuu kolmio EBC. Sen kateetit ovat $EB = AB - AE = 9 - 8 = 1$ ja $BC = \sqrt{3}$, joten sen hypotenuusa $EC = 2$, $\angle CEB = 60^\circ$ ja $\angle ECB = 30^\circ$.

Kolmiosta DEC tiedetään nyt sen sivujen pituudet: $EC = 2$, $ED = 4$ ja $CD = 2\sqrt{3}$, joten sen kulmien suuruudet saadaan muistikolmiosta: $\angle DEC = 90^\circ$, $\angle DCE = 30^\circ$ ja $\angle EDC = 60^\circ$.

Kolmiot ADC ja DCB ovat yhdenmuotoiset, sillä $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{DC}{CB}$ ja $\angle ADC = \angle DCB = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$.

Koska kolmio *DCE* on saatu kiertämällä kolmiota *ADC*, on sivujen *AC* ja *DB* välinen kulma sama kuin sivujen *AD* ja *DC* välinen kulma, eli $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, joka on siis kysytty lävistäjien välinen kulma.

8. Kolmion sivujen pituudet ovat kokonaislukuja. Yhden sivun pituus on 7 ja tämän vastainen kulma on 60°. Mikä voisi olla kolmion pinta-ala?

Ratkaisu:

Kolmion kahden sivun pituuksia ei tiedetä, merkitään näitä sivuja a ja b. Tiedetään, että yksi kulmista on 60°, joten kolmion ala on $t = \frac{1}{2}ab \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}ab}{4}$.

Kosinilause: $7^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow 49 = a^2 + b^2 - ab = (a-b)^2 + ab$.

Koska ab on positiivinen, lausekkeella $(a-b)^2$ on 7 mahdollista arvoa. Symmetrian vuoksi voidaan olettaa $a \le b$.

Jos $a - b = 6$, niin $ab = 49 - 6^2 = 13$, mikä ei anna kokonaislukuratkaisuja.

Jos $a - b = 5$, niin $ab = 49 - 5^2 = 24$, joten $a_1 = 8$, $b_1 = 3$

Tutkimalla kaikki vaihtoehdot löytyy vielä kaksi mahdollista tapausta:

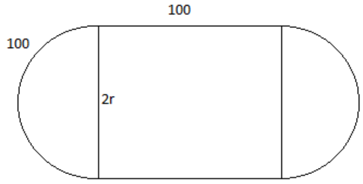
$a - b = 3$, $ab = 49 - 3^2 = 40$, $a_2 = 8$, $b_2 = 5$

$a - b = 0$, $a_3 = b_3 = 7$

Vastaavat pinta-alat ovat $t_1 = 6\sqrt{3}$, $t_2 = 10\sqrt{3}$ ja $t_3 = \frac{49\sqrt{3}}{4}$.

9. Stadionin nurmikkoa rajoittaa kaksi yhdensuuntaista 100 metrin mittaista janaa sekä niitä yhdistävät kaksi 100 metrin mittaista puoliympyrää. Kuinka paljon ympyrän, jonka piiri on 400 metriä, pinta-ala on suurempi kuin nurmikon?

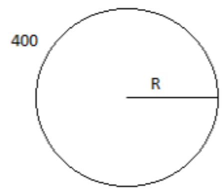
Ratkaisu:



Puoliympyrän kehä $= \pi r = 100m \Leftrightarrow r = \frac{100}{\pi} m$

Nurmikentän pinta-ala

$$A_1 = \pi r^2 + 100 \cdot 2r = \pi\left(\frac{100}{\pi}\right)^2 + 200 \cdot \frac{100}{\pi} = \frac{30000}{\pi} m^2$$

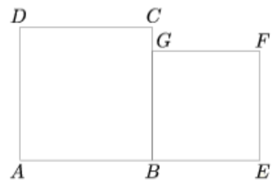


Ympyrän, jonka piiri on 400 m, säde on $R = \dfrac{400}{2\pi}$ ja pinta-ala $A_2 = \pi R^2 = \pi\left(\dfrac{400}{2\pi}\right)^2 = \dfrac{40000}{\pi} m^2$.

Pinta-alojen suhde $\dfrac{A_2}{A_1} = \dfrac{\frac{40000}{\pi}}{\frac{30000}{\pi}} = \dfrac{4}{3}$.

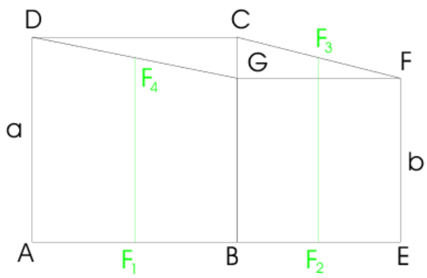
10. Neliöt *ABCD* ja *BEFG* piirretään niin, että neliön *ABCD* sivu a ja neliön *BEFG* sivu b ovat vierekkäin. Ilmoita termejä a ja b käyttäen nelikulmion ala, kun sen kärjet kärjet ovat janojen *AB*, *BE*, *FC* ja *DG* keskipisteissä.

<u>Ratkaisu:</u>



Merkitään $AD = a$ ja $EF = b$.

F_1F_4 on puolisuunnikkaan *ABGD* sivujen *AB* ja *DG* keskipisteitä yhdistävä jana, joka on yhdensuuntainen janan *AD* kanssa ja jonka pituus on $\dfrac{AD + BG}{2} = \dfrac{a+b}{2}$.

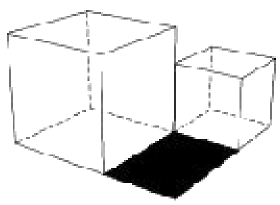


Vastaavasti F_2F_3 on puolisuunnikkaan *EFCB* sivujen *BE* ja *CF* keskipisteitä yhdistävä jana, joka on yhdensuuntainen janan *BC* kanssa ja jonka pituus on $\dfrac{BC + EF}{2} = \dfrac{a+b}{2}$.

Koska $AB \| BC$, niin nelikulmion $F_1F_2F_3F_4$ sivut F_1F_4 ja F_2F_3 ovat myös keskenään yhdensuuntaiset. Koska $F_1F_4 \| AD \perp AE$ on $F_1F_2F_3F_4$ suorakulmio.

$F_1F_2 = F_1B + BF_2 = \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{2}$, joten $F_1F_2F_3F_4$ on neliö ja sen pinta-ala on $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$.

11. Kuvassa olevat kaksi kuutiota ovat saman tason päällä. Niiden sivujen pituuksien summa on 2 cm ja tilavuuksien summa 5,375 cm^3. Määritä mustan suorakulmion pinta-ala.



Ratkaisu:

Tiedetään, että $a+b=2$, $a^3+b^3=5{,}375$. Etsitään ratkaisu lausekkeelle ab.

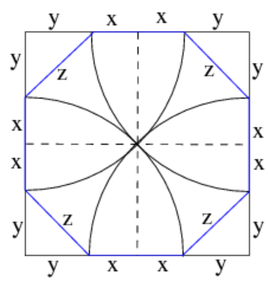
$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b),$$

josta $ab=\dfrac{(a+b)^3-(a^3+b^3)}{3(a+b)}=\dfrac{2^3-5{,}357}{3\cdot 2}=0{,}4375$.

Mustan suorakulmion pinta-ala on $0{,}4375\,cm^3$.

12. Neliön keskipisteen kautta piirretään neljä ympyrää siten, että jokainen neliön kärjistä on yhden ympyrän keskipiste. Ympyrät leikkaavat neliön sivuja yhteensä kahdeksassa pisteessä. Todista, että leikkauspisteet muodostavat säännöllisen kahdeksankulmion.

Ratkaisu:



Olkoon neliön sivu 2 yksikköä, $x+y=1$. Piirrettyjen ympyröiden säde on puolet neliön kulmasta kulmaan piirretystä halkaisijasta, joka on $2\sqrt{2}$ (Pythagoraan lause), siis säde on $\sqrt{2}$.

$x=\sqrt{2}-1$, $y=2-\sqrt{2}$

Pythagoraan lauseella saadaan: $z=\sqrt{2}\left(2-\sqrt{2}\right)=2\left(\sqrt{2}-1\right)$

Siis $z=2x$, eli kaikki kahdeksankulmion sivut ovat samanpituiset, joten se on säännöllinen.

13. Onko mahdollista osittaa tasasivuinen kolmio

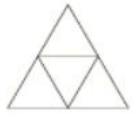
a) 2007:ään

b) 2008:aan

tasasivuiseen kolmioon?

Ratkaisu:

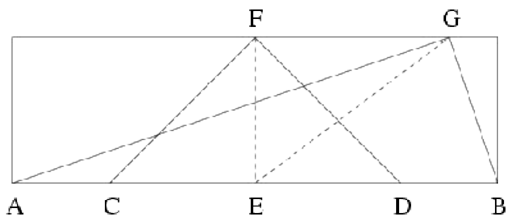
a) Jaetaan kolmio ensin yhdeksäksi tasasivuiseksi kolmioksi. Jaetaan sitten yksi saaduista kolmioista neljäksi tasasivuiseksi kolmioksi, jolloin kolmioiden kokonaismäärä lisääntyy kolmella. Toistetaan jako 666 kertaa. Kolmioita on nyt $9 + 666 \cdot 3 = 2007$.



b) Aloitetaan jakamalla kolmio neljäksi tasasivuiseksi kolmioksi, ja jatketaan kuten edellä: $4 + 668 \cdot 3 = 2008$

14. Suorakulman muotoisen 10 m pitkän luokkahuoneen katossa on kaksi lamppua. Lampuista lähtevä valo muodostaa kartion, jonka huippukulma on 90°. Yksi lampuista on katon keskellä ja se valaisee lattiaan ympyrän, jonka halkaisija on 6 metriä. Toisen lampun lampunvarjostin on käännetty niin, että valaistu alue lattiassa on niin pitkä, että siihen voidaan piirtää 10 metrin mittainen jana huoneen pituuden suuntaisesti, mutta valo ei osu seiniin huoneen päissä. Kuinka pitkä on lamppujen välinen etäisyys?

Ratkaisu:



Kolmiossa AGB sivun AB vastainen kulma $\angle AGB = 90^{\circ}$, joten Thaleen lauseesta seuraa:

$$AE = EB = EG = \frac{10}{2} = 5.$$

Tiedetään, että $CE = ED = 3$. Kolmiossa CFG $\angle AGB = 90^{\circ}$, joten myös $EF = 3$ (Thaleen lause).

Kolmiosta EFG saadaan Pythagoraan lauseella:

$$FG^2 = EG^2 - FE^2 = 5^2 - 3^2 = 16, \text{ joten } FG = 4.$$

15. Kolme tikkua asetetaan toisesta päästään kiinni toisiinsa pareittain kohtisuoraan toisiaan vasten. Tikkujen pituudet ovat 1, 2 ja 3. Kiinteä rakennelma asetetaan pöydälle niin, että tikkujen vapaat päät koskevat pöytää. Määritä yhteisen pisteen korkeus pöydän pinnasta.

Ratkaisu:

1:n pituinen tikku koskettaa pöytää pisteessä *A*, 2:n pituinen tikku koskettaa pöytää pisteessä *B* ja 3:n pituinen tikku koskettaa pöytää pisteessä *C*. Tikkujen yhteinen piste on *D*, joka on rakennelman muodostaman kolmiopohjaisen pyramidin huippu. Kysytty korkeus on tämän pyramidin korkeus.

Koska kolmiot ovat toisiaan kohtisuoraan, muodostuu suorakulmaisia kolmioita, joista Pythagoraan lauseella saadaan:

$AB = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{9+1} = \sqrt{13}$ ja $AC = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$.

Kolmion ABC pisin sivu on siis BC. Merkitään sen vastaista kulmaa $\angle BAC = \alpha$. Kosinilauseella: $13 = 5 + 10 - 2\sqrt{5}\sqrt{10}\cos\alpha$, mistä $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{50}}$.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \dfrac{1}{50} = \dfrac{49}{50}$. Kun $\sin\alpha > 0$, niin $\sin\alpha = \dfrac{7}{\sqrt{50}}$.

$$A_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{10}\,\frac{7}{\sqrt{50}}}{2} = \frac{7}{2},\; V_{ABCD} = \frac{A_{ABC} \cdot h}{3} = \frac{7}{6}h$$

Toisaalta $V_{ABCD} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$, joten $\dfrac{7}{6}h = 1 \Leftrightarrow h = \dfrac{6}{7}$.

16. Niiden suorakulmioiden alat, jotka saadaan, kun suorakulmaista särmiötä leikataan tasolla kahden samansuuntaisen reunan läpi, voi olla $t_1 = 60$, $t_2 = 4\sqrt{153}$ tai $t_3 = 12\sqrt{10}$. Laske suorakulmaisen särmiön tilavuus ja pinnan pinta-ala.

Ratkaisu:

tiedetään:

$t_1 = a\sqrt{b^2 + c^2} = 60$, $t_2 = b\sqrt{c^2 + a^2} = 4\sqrt{153}$ ja $t_3 = c\sqrt{a^2 + b^2} = 12\sqrt{10}$

Yhtälöitä muokkaamalla saadaan:

$a^2b^2 + a^2c^2 = 3600$, $b^2c^2 + a^2b^2 = 2448$ ja $a^2c^2 + b^2c^2 = 1440$

Lasketaan nämä yhtälöt yhteen ja jaetaan kahdella, jolloin saadaan:

$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = 3744$

Vähennetään tästä vuorotellen edelliset kolme yhtälöä saadaan

$b^2c^2 = 144$, $a^2c^2 = 1296$ ja $a^2b^2 = 2304$, joten $bc = 12$, $ac = 36$ ja $ab = 48$

$A = 2\left(ab + ac + bc\right) = 2\left(48 + 36 + 12\right) = 192$

$V = \sqrt{ab \cdot ac \cdot bc} = \sqrt{48 \cdot 36 \cdot 12} = 144$

2. Luvut, lausekkeet ja yhtälöt

1. Todista: Jos n on positiivinen kokonaisluku, niin $2^{4n}-1$ tai $2^{4n}+1$ on jaollinen luvulla 17.

   Ratkaisu:

   $2^{4n}=(2^4)^n=16^n$

   1° n on parillinen:

   Olkoon $n=2k$

   $2^{4n}-1=16^{2k}-1^{2k}=(16+1)(16^{2k-1}-16^{2k-2}+16^{2k-3}-...+16-1)=17a$, $a\geq 1$, $k\geq 1$

   2° n on pariton:

   Olkoon $n=2k+1$

   $2^{4n}+1=16^{2k-1}-1^{2k+1}=(16+1)(16^{2k}-16^{2k-1}+16^{2k-2}-...-16+1)=17b$, $b\geq 1$, $k\geq 1$

2. Mitkä alkuluvut voidaan ilmaista kahden positiivisen jaollisen kokonaisluvun summana?

   Ratkaisu:

   2, 3, 5, 7 ja 11 ei voida ilmoittaa

   $13=9+4$, $17=9+8$,…, $4k+1=9+4(k-2)$ kun $k\geq 3$

   $19=15+4$, $23=15+8$,…, $4k+3=15+4(k-3)$, kun $k\geq 4$

   Eli kaikki alkuluvut ≥ 13 voidaan kirjoittaa.

3. Pelissä on käytössä 11 punaista, 7 sinistä ja 20 vihreää pelimerkkiä. Pankki antaa yhdestä punaisesta ja yhdestä sinisestä pelimerkistä kaksi vihreää pelimerkkiä, yhdestä punaisesta ja yhdestä vihreästä kaksi sinistä pelimerkkiä, ja yhdestä sinisestä ja yhdestä vihreästä kaksi punaista pelimerkkiä. Näitä vaihtoja tekemällä pelaajan tavoitteena on saada haltuunsa vain yhden värisiä pelimerkkejä. Minkä värisiä?

Ratkaisu:

Ensin pyritään siihen, että kahta väriä olisi yhtä paljon, jolloin ne voidaan vaihtaa kolmanteen väriin ilman, että yhtään jää yli.

Kun yksi vähenee yhdellä, toinen lisääntyy kahdella, eli muutos lukumäärien erotuksessa 3, erotuksen oltava siis kolmella jaollinen, jotta päästään samaan lukumäärään.

$11-7=4$ ei käy

$20-7=13$ ei käy

$20-11=9$ jaollinen kolmella, siis vaihdetaan punaisiin kolme kertaa,

Nyt pelaajalla on 17 punaista, 4 sinistä ja 17 vihreää merkkiä. Vaihdetaan punainen ja vihreä kahdeksi siniseksi 17 kertaa, lopuksi jäljellä $4+2\cdot 17=38$ sinistä merkkiä.

4. Yhdeksän kokonaislukua, joiden summa on 90, kirjoitetaan ympyrän kehälle. Todista, että löytyy neljä vierekkäistä lukua, joiden summa on vähintään 40.

Ratkaisu:

Olkoot 9 lukua *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h* ja *i* tässä järjestyksessä. Oletetaan, että neljän luvun summa on aina pienempi kuin 40.

$$(a+b+c+d)+(b+c+d+e)+(c+d+e+f)+...+(i+a+b+c)<9\cdot 40$$
$$4(a+b+c+d+e+f+g+h+i)<360$$
$$4\cdot 90<360$$

Saadaan ristiriita, joten löytyy neljä vierekkäistä lukua, joiden summa on vähintään 40.

5. Mitkä kokonaislukuparit toteuttavat seuraavan yhtälön: $(x+2)^4-x^4=y^3$?

Ratkaisu:

Muokataan yhtälön vasenta puolta:

$$
\begin{aligned}
&(x+2)^4 - x^4 \\
&= \left[(x+2)-x\right]\left[(x+2)^3 + (x+2)^2 x + (x+2)x^2 + x^3\right] \\
&= 2(4x^3 + 12x + 16x + 8) \\
&= 8(x^3 + 3x^2 + 4x + 2) \\
&= 8\left[(x+1)^3 + (x+1)\right] \\
&= 2^3 (x+1)\left[(x+1)^2 + 1\right]
\end{aligned}
$$

$x+1$ ja $(x+1)^2 + 1$ ovat keskenään jaottomia.

Jos $x+1 = a^3$, niin $b^3 = (x+1)^2 + 1 = (a^3)^2 + 1 = (a^2)^3 = 1$

Ts. etsimme kahta lukua, joiden välinen erotus on 1. Tällöin mahdollisia ovat -1 ja 0 sekä 0 ja 1.

1.tapaus: $x+1 = -1$, $x = -2$, mutta toisaalta $(x+1)^2 + 1 \neq 0$.

2.tapaus: $x+1 = 0$, $x = -1$ ja siten $(x+1)^2 + 1 = 1$ pätee.

$y^3 = 0$, $y = 0$

Vastaus: $x = -1$, $y = 0$

6. Etsi positiiviset kokonaisluvut *n*, joille $n^3 + 1$ ja $n^2 - 1$ ovat molemmat jaollisia luvulla 101.

Ratkaisua:

$n^3 + 1 = (n+1)(n^2 - n + 1)$ ja $n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$. Koska l01 on alkuluku, on kaksi mahdollisuutta:

1° $101 | n+1$, 2° $101 | n^2 - n + 1$ ja $101 | n-1$

1° $n = 101k - 1$, jossa *k* on mielivaltainen positiivinen tekijä.

2° $101 \left| \left(n^2 - n + 1\right) + (n-1) = 2^2\right.$ koska 101 on alkuluku $101 | n$

$101 | n-1$ ei mahdollinen $\Rightarrow$ ei ratkaisua

7. Ratkaise seuraava yhtälöryhmä, kun *a*, *b*, *c* ja *d* ovat annettuja reaalilukuja:

$x + 2y + 3z + 4v = a$,

$y + 2z + 3v + 4x = b$,

$z + 2v + 3x + 4y = c$,

$v + 2x + 3y + 4z = d$

<u>Ratkaisu:</u>

Ratkaistaan *v* viimeisestä yhtälöstä ja sijoitetaan se muihin yhtälöihin:

(1) $v = d - 2x - 3y - 4z$

(2) $-7x - 10y - 13z = a - 4d$

(3) $-2x - 8y - 10z = b - 3d$

(4) $-x - 2y - 7z = c - 2d$

Ratkaistaan *x* yhtälöstä (4) ja sijoitetaan se yhtälöihin (2) ja (3):

(5) $x = -2y - 7z - c + 2d$

(6) $4y + 36z = a + 10d - 7c$

(7) $-4y + 4z = b + d - 2c$

Lasketaan yhteen yhtälöt (6) ja (7): $40z = a + b - 9c + 11d$

$$z = \frac{1}{40}(a + b - 9c + 11d)$$

Sijoitetaan *z* yhtälöön (7): $y = \frac{1}{40}(a - 9b + 11c + d)$

Sijoitetaan *y* ja *z* yhtälöön (5): $x = \frac{1}{40}(-9a + 11b + c + d)$

Sijoitetaan *x*, *y* ja *z* yhtälöön (1): $v = \frac{1}{40}(11a + b + c - 9d)$

8. Etsi kaikki kokonaislukuratkaisut yhtälölle $x^2 + 12 = y^4$.

Ratkaisu:

$x^2 + 12 = y^4 \Leftrightarrow 12 = y^4 - x^2 \Leftrightarrow 12 = (y^2)^2 - x^2$.

x ja y^2 ovat kaksi neliölukua, joiden erotus on 12. Luetellaan neliölukuja:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49

($49 - 36 = 13$, suurempien lukujen erotus on suurempi, joten x ja y^2 näiden joukossa)

$16 - 4 = 12$ $\quad (y^2)^2 = 16 \quad\quad x^2 = 4$

$\quad y = 2$ tai $y = -2 \quad\quad x = 2$ tai $x = -2$

Ratkaisuja on siis neljä:
$x_1 = 2$ ja $y_1 = 2$
$x_2 = 2$ ja $y_2 = -2$
$x_3 = -2$ ja $y_3 = 2$
$x_4 = -2$ ja $y_4 = -2$

9. Millä muuttujan v arvoilla seuraavalla yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua?

(1) $x + y + z = v$

(2) $x + vy + z = v$

(3) $x + y + v^2 z = v^2$

Ratkaisu:

Yhtälöiden (1) ja (2) erotus:

$$\begin{array}{l} x + vy + z = v \\ \underline{-\; x + y + z = v} \\ vy - y = 0 \\ (v-1)y = 0 \ \ (4) \end{array}$$

Yhtälöiden (3) ja (1) erotus:

$$\begin{array}{l} x + y + v^2 z = v^2 \\ \underline{-\; x + y + z = v} \\ v^2 z - z = v^2 - v \end{array}$$

$$(v^2-1)z = v(v-1)$$

$$(v+1)(v-1)z = v(v-1) \quad (5)$$

1. $v=1$: y ja z voidaan valita mielivaltaisesti (yhtälöt 4 ja 5) ja x ratkaista esim. yhtälöstä (1).

2. $v \neq \pm 1$: yhtälöstä (4) $y=0$ ja yhtälöstä (5) $z=\dfrac{v}{v-1}$ ja esim. yhtälöstä (1) $x=\dfrac{v^2}{v+1}$.

3. $v=-1$: esim. yhtälöstä (5) saadaan $0=2$, joka on epätosi.

Vastaus: Yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua, kun $v=-1$.

10. Ratkaise yhtälö $x+y=x^2-xy+y^2$, jossa x ja y ovat kokonaislukuja.

Ratkaisu:

Tutkitaan ensin, mitä arvoja y voi saada. Muutetaan yhtälö muotoon $x^2-(y+1)x+y^2-y=0$. Yhtälöllä on ratkaisuja, kun sen diskriminantti on ei-negatiivinen eli $D=(y+1)^2-4(y^2-y)=1+6y-3y^2>0$. Käänteisesti $3y^2-6y-1\leq 0$. Funktion $3y^2-6y-1$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten epäyhtälö pätee, kun $1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\leq y\leq 1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ (funktion nollakohdat). Tällä välillä y voi saada kokonaislukuarvot 0, 1 tai 2.

Kun $y=0$: $x^2-x=0$, jolloin $x=0$ tai $x=1$.
Kun $y=1$: $x^2-2x=0$, jolloin $x=0$ tai $x=2$.
Kun $y=2$: $x^2-3x+2=0$, jolloin $x=1$ tai $x=2$.

Kaikki mahdolliset ratkaisut ovat siis (0,0), (0,1), (1,0), (1,2), (2,1), (2,2).

11. Ratkaise yhtälö $\log_{2010}(2009x)=\log_{2009}(2010x)$.

Ratkaisu:

Muunnetaan logaritmit samankantaisiksi: $\dfrac{\log_{2009}(2009x)}{\log_{2009}2010}=\log_{2009}(2010x)$

Kerrotaan nimittäjällä ($\neq 0$): $\log_{2009}(2009x) = \log_{2009} 2010 \cdot \log_{2009}(2010x)$

Logaritmin laskusääntöjä käyttäen:

$$\log_{2009} 2009 + \log_{2009} x = \log_{2009} 2010 \cdot (\log_{2009} 2010 + \log_{2009} x)$$
$$1 + \log_{2009} x = \log^2_{2009} 2010 + \log_{2009} 2010 \cdot \log_{2009} x$$
$$\log_{2009} x = -\frac{\log^2_{2009} 2010 - 1}{\log_{2009} 2010 - 1}$$
$$\log_{2009} x = -\log_{2009} 2010 - 1$$
$$\log_{2009} x = \log_{2009} 2010^{-1} - \log_{2009} 2009$$
$$\log_{2009} x = \log_{2009} \frac{1}{2009 \cdot 2010}$$
$$x = \frac{1}{2009 \cdot 2010}$$

12. Kokonaisluvuille a ja b, merkitköön $a \circ b$ lukua, joka on yhtä suurempi kuin ei-pienempi luvuista a ja b, ja merkitköön $a * b$ lukua, joka on yhtä suurempi kuin ei-suurempi luvuista a ja b. Ratkaise yhtälö $(x \circ 2010) * 2011 = x + 2$.

Ratkaisu:

Tutkitaan erikseen neljä tapausta:

1°	$x = 2010$:	$(x \circ 2010) * 2011 = x + 2$ $2011 * 2011 = x + 2$ $2012 = x + 2$ $2012 = 2012$	tosi
2°	$x = 2011$:	$(x \circ 2010) * 2011 = x + 2$ $2012 * 2011 = x + 2$ $2012 = 2011 + 2$ $2012 = 2013$	epätosi
3°	$x < 2010$:	$(x \circ 2010) * 2011 = x + 2$ $2011 * 2011 = x + 2$ $2012 = x + 2$ $x = 2010$	ristiriita

$$4^\circ \quad x > 2011: \qquad \begin{aligned} (x \circ 2010) * 2011 &= \mathrm{x} + 2 \\ (x+1) * 2011 &= \mathrm{x} + 2 \\ 2012 &= \mathrm{x} + 2 \\ \mathrm{x} &= 2010 \end{aligned} \qquad \text{ristiriita}$$

Vastaus: $x = 2010$.

13. Todista, että lausekkeen $a^3 - 3ab^2 + 2b^3$ arvo on ei-negatiivinen, kun a ja b ovat ei-negatiivisia reaalilukuja.

Ratkaisu:

$$a^3 - 3ab^2 + 2b^3 = a(a^2 - b^2) - 2b^2(a - b) = (a - b)(a(a + b) - 2b^2)$$

$a \geq 0$, $b \geq 0$

1. Jos $a \geq b$, niin $a - b \geq 0$. Toisaalta, koska $b \geq 0$, niin $a^2 \geq b^2$ ja edelleen $ab \geq b^2$. Näin ollen $a^2 + ab \geq b \ \ + b^2 \Rightarrow a(a+b) - 2b^2 \geq 0$ ja koska ei-negatiivisten tekijöiden tulo on ei-negatiivinen, niin

$$(a - b)(a(a + b) - 2b^2) \geq 0.$$

2. Jos $a < b$, niin $a - b < 0$. Toisaalta koska $a \geq 0$, niin $a^2 < b^2$ ja edelleen $ab < b^2$. Näin ollen $a^2 + ab < b \ \ + b^2 \Rightarrow a(a+b) - 2b^2 < 0$. Koska kahden negatiivisen tekijän tulo on positiivinen, niin

$$(a - b)(a(a + b) - 2b^2) > 0.$$

14. Olkoon $x < y < z$. Ratkaise seuraava yhtälö luonnollisten lukujen joukossa: $3^x + 3^y + 3^z = 1795415$.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} 3^x + 3^y + 3^z &= 1795415 \\ 3^x\left(1 + 3^{y-x} + 3^{z-x}\right) &= 3^4 \cdot 2215 \\ 3^x &= 3^4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + 3^{y-4} + 3^{z-4} &= 2215 \\ 3^{y-4}\left(1 + 3^{z-4}\right) &= 3^3 \cdot 82 \\ 3^{y-4} &= 3^3 \\ y &= 7 \end{aligned}$$

$$1+3^{z-7}=82$$
$$3^{z-7}=81$$
$$3^{x}=3^{4}$$
$$z=11$$

vastaus: $\begin{aligned} x &= 4 \\ y &= 7 \\ z &= 11 \end{aligned}$

15. Ratkaise yhtälö $1+\cos 3x = 2\cos 2x$.

Ratkaisu:

Tiedetään, että $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ ja $\sin 2x = 2\sin x \cos x$.

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\ &= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2(1-\cos^2 x)\cos x \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned}$$

Yhtälö voidaan ratkaista:

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 1 = 4\cos^2 x - 2$$
$$4\cos^3 x - 4\cos^2 x - 3\cos x + 3 = 0$$
$$(\cos x - 1)(4\cos^2 x - 3) = 0$$

1) $\cos x = 1 \Rightarrow x_1 = 2k\pi$, missä $k \in Z$.

2) $\cos^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + l\pi$, missä $l \in Z$.

3. Prosenttilaskenta

1. Vuonna 2006 vakuutusyhtiön tulot lisääntyivät 25% ja menot 15% edelliseen vuoteen verrattuna. Yhtiön voitto (tulot – menot) lisääntyi 40%. Kuinka monta prosenttia tuloista kului menoihin vuonna 2006?

    Ratkaisu:

    $$T_{2006} = 1{,}25T_{2005}\,,\; M_{2006} = 1{,}15M_{2005}\,,\; T_{2006} - M_{2006} = 1{,}4\left(T_{2005} - M_{2005}\right)$$

    $$T_{2005} = 0{,}8T_{2006}\,,\; M_{2005} = \frac{1}{1{,}15}M_{2006}$$

    $$T_{2006} - M_{2006} = 1{,}4\left(0{,}8T_{2006} - \frac{1}{1{,}15}M_{2006}\right)$$

    $$T_{2006} - M_{2006} = 1{,}12T_{2006} - \frac{1{,}4}{1{,}15}M_{2006}$$

    $$0{,}12T_{2006} = \left(\frac{1{,}4}{1{,}15} - 1\right)M_{2006}$$

    $$\frac{M_{2006}}{T_{2006}} = \frac{0{,}12}{\frac{1{,}4}{1{,}15} - 1} = 0{,}552 = 55{,}2\%.$$

2. Yksityisyrittäjä on ottanut tuetun 120 000 euron lainan, jonka kiinteä vuotuinen korko on 8%. Paljonko hänellä on lainaa 10 vuoden kuluttua, jos hän lyhentää lainaa joka vuosi 12 000 euroa?

    Ratkaisu:

    $$120000€ \cdot 1{,}08^{10} - 12000€ \cdot 1 \cdot \frac{1{,}08^{10} - 1}{1{,}08 - 1} \approx 85232{,}25€$$

4. Lukujonot ja sarjat

1. Todista, että joka neljäs luku Fibonaccin jonosta on jaollinen kolmella. (Fibonaccin jonossa a_1=1, a_2=1 ja $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.)

   Ratkaisu:

   Todistus induktiolla:

   i. Selvästi $a_4 = 3$ on jaollinen kolmella.

   ii. Oletetaan, että on a_{4n} jaollinen kolmella, ja osoitetaan, että myös $a_{4(n+1)}$ on jaollinen kolmella.

   iii. $a_{4(n+1)} = a_{4n+3} + a_{4n+2} = a_{4n+2} + a_{4n+1} + a_{4n+2}$

   $= 2(a_{4n} + a_{4n+1}) + a_{4n+1} = 2a_{4n} + 3a_{4n+1}$

2. Tien laidassa olevat rakennukset on numeroitu peräkkäisillä parillisilla luvuilla. Lukujen summa korttelissa on 78. Olettaen, että korttelissa on vähintään 5 rakennusta, mikä voisi olla neljännen rakennuksen luku?

   Ratkaisu:

   $x + (x+2) + ... + (x+2k) = 78,\ k \geq 4,$ on aritmeettinen kaava.

   Muodostetaan aritmeettinen summa

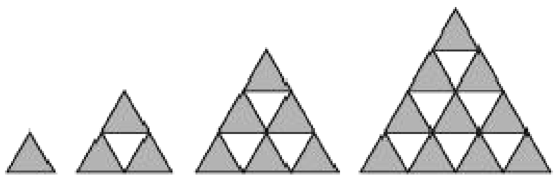
   $$\frac{(2x+2k)(k+1)}{2} = 78$$
   $$(x+k)(k+1) = 78 = 2 \cdot 3 \cdot 13.$$

   Koska $k \geq 5$, niin $k+1 = 6$, 13, 26, 39 tai 78.

   Koska $x \geq 2$, viimeiset 4 lukua ovat liian isoja. Ensimmäisessä tapauksessa $k = 5$, $x = 13 - 5 = 8$.

   Neljännen talon numero on $8 + 3 \cdot 2 = 14$.

3. Alla näkyvien kuvioiden sarja koostuu yhä useammista tummista ja valkoisista tasasivuisista kolmioista. Sarjaa jatketaan *n*:nteen kuvioon nähtävissä olevan säännön mukaan. Kuinka paljon tummia kolmioita yhteensä käytetään?



Ratkaisu:

$$1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+(1+2+\ldots+n)=\frac{2\cdot 1}{2}+\frac{3\cdot 2}{2}+\frac{4\cdot 3}{2}+\ldots+\frac{(n+1)\cdot n}{2}$$
$$=\frac{(1+1)\cdot 1+(2+1)\cdot 2+(3+1)\cdot 3+\ldots+(n+1)\cdot n}{2}$$
$$=\frac{\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)+1\cdot(1+2+3+\ldots+n)}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}+\frac{(n+1)\cdot n}{2}\right)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{6}.$$

4. Kokonaisluvut kirjoitetaan ylös tiettyyn luvulla 50 jaolliseen lukuun n asti. Tämän jälkeen kaikki luvun 50 monikerrat poistetaan. Todista, että jäljelle jääneiden lukujen summa on jonkin luvun neliö.

Ratkaisu:

Jäljelle jäävä sarja, kun monikerrat poistetaan:

1, 2, 3,…, 47, 48, 49, 1+50, 2+50,…, 47+50, 48+50, 49+50, 1+100, 2+100,…, 47+100, 48+100, 49+100,…

$$1+2+\ldots+49=\frac{50\cdot 49}{2}=25\cdot 49$$

Merkitään $k=\frac{n}{50}-1$

Muodostetaan aritmeettinen summa $\quad 49(25+75+...+(25+k\cdot 50)$

$$= 49(25(1+3+...+(1+2k))$$
$$= 49\cdot 25\left(\frac{(2+2k)(k+1)}{2}\right)$$
$$= (7\cdot 5(k+1))^2$$

5. a, b ja c ovat kolme, ei välttämättä peräkkäistä, termiä positiivisten lukujen aritmeettisesta sarjasta. Kun $\frac{c-b}{a}+\frac{a-c}{b}+\frac{b-a}{c}=0$, etsi aritmeettisen sarjan yleinen erotus.

   Ratkaisu:

$$0=(c-b)bc+(a-c)ac+(b-a)ab=c^2b-b^2c+a^2c-c^2a+b^2a-a^2b$$
$$=c^2(b-a)+ab(b-a)+c(a^2-b^2)=c^2(b-a)+ab(b-a)+c(a-b)(a+b)$$
$$=(b-a)(c^2ab-ac-bc)=(b-a)[c(c-a)+b(a-c)]=(b-a)(c-a)(c-b).$$

   Jotta edellinen pätee, oltava $a=b$, $a=c$ tai $b=c$. $\Rightarrow$ yleinen erotus on 0.

6. Suorakulmaisen kolmion sivujen pituudet muodostavat aritmeettisen sarjan. Määritä sivujen suhde. Todista, että kolmion sisään piirretyn ympyrän säde on aritmeettisen sarjan yleinen erotus.

   Ratkaisu:

   Sivujen pituudet ovat $a-x, a, a+x$. Pythagoraan lauseella

   $a^2+(a-x)^2=(a+x)^2$. $a\neq 0$, edellisestä yhtälöstä $a=4x$.

   Sivujen suhde: $(a-x):a:(a+x)=3x:4x:5x=3:4:5$.

   Merkitään $A=$ kolmion pinta-ala ja $r=$ kolmion sisään piirretyn ympyrän säde.

$$r=\frac{2A}{a+b+c}\Leftrightarrow 2A=r(a+b+c)=3x\cdot 4x.\text{ Koska } x\neq 0, \text{ niin } x=r.\ \square$$

5. Todennäköisyyslaskenta

1. Petterin lempilevyllä on 11 kappaletta. Hän pitää kahdeksannesta kappaleesta eniten. Kun hän laittaa levyn soittimeen, hän painaa nappia aloittaakseen ensimmäisen kappaleen, jonka jälkeen hänen on painettava toista nappia seitsemän kertaa päästäkseen lempikappaleeseensa. Jos hän säätää soittimen soittamaan kappaleet sattumanvaraisessa järjestyksessä, millä todennäköisyydellä hän tällöin saavuttaa lempikappaleensa edellistä vähemmillä napin painalluksilla?

   Ratkaisu:

   Todennäköisyys, että Petterin lempikappale on jollakin tietyllä paikalla (ensimmäinen, toinen, kolmas jne.) on aina sama $\frac{1}{11}$. Painalluksia on oltava vähemmän kuin 7 eli 0-6 (7 alkeistapausta), joten todennäköisyys on $7 \cdot \frac{1}{11} = \frac{7}{11} \approx 64\%$.

2. Riku, Taneli ja Antti pelaavat pöytätennistä kaksi yhtä vastaan. Kun Taneli ja Antti pelaavat yhdessä Rikua vastaan, he voittavat Rikun kolme kertaa niin usein kuin Riku heidät. Taneli voittaa pelin Rikua ja Anttia vastaan yhtä usein kuin häviää. Antti voittaa pelin Rikua ja Tanelia vastaan kaksi kertaa niin usein kuin häviää. Viimeksi he pelasivat kuusi peliä, kaksi jokaista pelaajayhdistelmää käyttäen. Millä todennäköisyydellä Riku voitti ainakin kerran?

   Ratkaisu:

   Taneli ja Antti vs. Riku: $P(\text{Riku voittaa}) = \frac{1}{4}$.

   Riku ja Antti vs. Taneli: $P(\text{Riku voittaa}) = \frac{1}{2}$.

   Riku ja Taneli vs. Antti: $P(\text{Riku voittaa}) = \frac{1}{3}$.

   $P(\text{Riku voittaa ainakin kerran}) = 1 - P(\text{Riku ei voita kertaakaan})$
   $= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{15}{16} \approx 94\%$.

3. Jalkapallojoukkueen valmentajan mukaan todennäköisyys sille, että pelaaja tekee maalin rangaistuspotkulla, on 95%. Mikä on todennäköisyys sille, että viidestä pelaajasta tasan kolme ei tee maalia rangaistuspotkusta?

Ratkaisu:

Alkeistapauksia (ketkä pelaajista tekevät maalin ja ketkä eivät) on yhteensä 10 kpl. Todennäköisyys:
$10 \cdot (0{,}95^2 \cdot 0{,}05^3) \approx 1{,}13 \cdot 10^{-3} \approx 0{,}1\%$.

4. Erään valtion lotossa arvotaan viisi numeroa väliltä 1-90. Lottokupongin ostaneet merkitsevät viisi numeroa jokaiseen kuponkiin. Mies osti kaksi kuponkia ja merkitsi niihin kymmenen eri numeroa kaikkiaan. Olettaen, että hänen kymmenestä numerostaan neljä osui oikeaan, millä todennäköisyydellä hänellä oli kuponki, jossa oli

   a) neljä oikeaa numeroa?
   b) kaksi oikeaa numeroa?

Ratkaisu:

$P(\text{numero oikein}) = 0{,}4$, $P(\text{numero väärin}) = 0{,}6$

a) Kupongissa neljä oikeaa ja yksi väärä numero, mahdollisia yhdistelmiä 5 kpl. Oikeat numerot voivat olla kummassa tahansa kahdesta kupongista. $P(\text{4 oikein samassa kupongissa})$
$= 2 \cdot 5 \cdot P(\text{neljä oikein, yksi väärin}) = 2 \cdot 5 \cdot 0{,}4^4 \cdot 0{,}6 \approx 15\%$.

b) Viidestä numerosta kaksi oikein, vaihtoehtoja 10 kpl.
$P(\text{kaksi oikein samassa kupongissa}) = 10 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^3 \approx 35\%$.

5. Kuusi korttia numeroidaan yhdestä kuuteen ja sekoitetaan. Kolme korttia nostetaan peräkkäin ilman takaisinpanoa. Millä todennäköisyydellä saatu lukujono on kasvava?

Ratkaisu:

Jonoja yhteensä $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ kpl. Kasvavia jonoja 20 kpl:

1,2,3	1,3,4	1,4,6	2,3,6	3,4,5
1,2,4	1,3,5	1,5,6	2,4,5	3,4,6
1,2,5	1,3,6	2,3,4	2,4,6	3,5,6
1,2,6	1,4,5	2,3,5	2,5,6	4,5,6

$\text{P(lukujono kasvava)} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} \approx 17\%$.

6. Numerot 0, 1, 2, 3, 4, 5 ja 6 kirjoitetaan satunnaisessa järjestyksessä. Millä todennäköisyydellä saatu 7-numeroinen luku (joka ei ala nollalla) on jaollinen neljällä?

Ratkaisu:

Numerot voidaan kirjoittaa $7!(=5040)$ järjestykseen, mikä on kaikkien alkeistapausten määrä. Luku on jaollinen neljällä, jos sen kahden viimeisen numeron muodostama luku on jaollinen neljällä. Luvun viimeiset numerot ovat siis 04, 12, 16, 20, 24, 32, 36, 40, 52, 56, 60 tai 64. Lukuja, joka päättyy 04, 20, 40 tai 60 on yhteensä 5! (5 jäljellä olevaa numeroa voidaan järjestää näin monella tavalla). Muissa tapauksissa on huomioitava, ettei 0 saa olla luvun ensimmäinen numero. Luvun ensimmäinen numero voi siis olla joku neljästä numerosta, ja seuraavat neljä numeroa voivat olla missä tahansa järjestyksessä, siis $4 \cdot 4!$. Yhteensä suotuisia alkeistapauksia on siis $4 \cdot 5! + 8 \cdot 4 \cdot 4!$ ja kysytty todennäköisyys on $\dfrac{4 \cdot 5! + 8 \cdot 4 \cdot 4!}{7!} = \dfrac{26}{105} \approx 0{,}25$.

7. Kolikkoa heitetään neljä kertaa. Sen jälkeen sitä heitetään uudelleen niin monta kertaa kuin ensimmäisillä heitoilla saatiin kruunia. Millä todennäköisyydellä saadaan yhteensä vähintään viisi kruunaa?

Ratkaisu:

Kolikkoa heitetään neljä kertaa, alkeistapauksia $2^4 = 16$ kpl. Ensimmäisillä neljällä heitolla on saatava vähintään 3 kruunaa, jotta näitä on mahdollista saada yhteensä 5. Mahdollisia tapoja saada 3 kruunaa on 4 (KKKL, KKLK, KLKK ja LKKK) joten P(neljällä heitolla 3 kruunaa) $= \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$.

P(neljällä heitolla 4 kruunaa) $= \dfrac{1}{16}$.

Jos ensimmäisillä heitoilla saadaan 3 kruunaa, saadaan 3 uutta heittoa, joilla on saatava vähintään 2 kruunaa. Kolmella heitolla alkeistapauksia on $2^3 = 8$. Suotuisia alkeistapauksia (2 tai 3 kruunaa) on 4 (KKK, KKL, KLK ja LKK). Joten P(kolmella heitolla vähintään 2 kruunaa) $= \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$.

Jos ensimmäisillä heitoilla saatiin 4 kruunaa, saadaan 4 uutta heittoa, joilla on saatava vähintään yksi kruuna. Suotuisia tapauksia 15 (kaikki paitsi LLLL), P(neljällä heitolla vähintään yksi kruuna) $= \dfrac{15}{16}$.

P(yhteensä vähintään 5 kruunaa) $= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{4} + \dfrac{15}{16} \cdot \dfrac{1}{16} \approx 18\%$.

8. Eräiden karamellien myyntiä parantaakseen niitä valmistava yritys laittaa osaan karamellipaketeista lahjakortit. Johtajat arvioivat, että kampanja tulee olemaan tehokas ja kulut siedettäviä, mikäli todennäköisyys, että kymmenen pakettia ostava asiakas saa vähintään yhden lahjakortin, on 50%. Moneenko pakettiin tulisi tällöin laittaa lahjakortti?

Ratkaisu:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^0 \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{10} = 0{,}5 .$$

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{10} = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{n-1}{n} \approx 0{,}933 \Leftrightarrow n \approx 14{,}93.$$

Vastaus: keskimäärin joka 15. laatikkoon.

9. Kuusivaunuisessa metrossa on neljä matkustajaa, joilla on flunssa. Millä todennäköisyydellä metrossa on enintään kaksi vaunua, joissa on matkustajia, joilla on flunssa?

Ratkaisu:

Matkustajat voivat olla vaunuissa $6^4 = 1296$ eri tavalla. Mahdollisia tapauksia on kolme:

a) Kaikki 4 sairasta matkustajaa yhdessä vaunussa, suotuisia alkeistapauksia 6.

b) Kaksi sairasta yhdessä vaunussa, kaksi toisessa vaunussa. Suotuisia alkeistapauksia $\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{2} = 90$.

c) Kolme sairasta samassa vaunussa, neljäs eri vanussa. Suotuisia alkeistapauksia $\binom{4}{3} \cdot 6 \cdot 5 = 120$.

Kysytty todennäköisyys on $\dfrac{6 + 90 + 120}{1296} = \dfrac{1}{6}$.

10. Kahvilassa on kahden hengen pöytiä. Tällä hetkellä kahvilassa on kuusi asiakasta kolmessa pöydässä. Heistä kolme juo kahvia ja kolme teetä. Millä todennäköisyydellä kahvilassa on pöytä, jossa molemmat asiakkaat juovat teetä?

Ratkaisu:

Jotta samassa pöydässä olisi kaksi teen juojaa, voivat he järjestäytyä $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$:lla eri tavalla (ensimmäinen valitsee kolmesta pöydästä, toinen kahdesta vapaana olevasta ja kolmas kahdesta, jossa jo istuu teen juoja). Jos kahta teen juojaa ei istu samassa pöydässä, on silloin kaikissa pöydissä yksi teen ja yksi kahvin juoja. Tällaisia tapauksia on $2^3 = 8$. Yhteensä alkeistapauksia siis on 20 ja $P(\text{on pöytä jossa kaksi teen juojaa}) = \frac{12}{20} = 0{,}6 = 60\%$.

11. Rakennuksen portin vieressä on 10 postilaatikkoa. Mainoksia jakava mies kävelee ohi ja laittaa mainoksia viiteen postilaatikkoon. Myöhemmin toinen mainosten jakaja kulkee ohi ja laittaa myös mainoksia viiteen laatikkoon. Millä todennäköisyydellä vähintään kahdeksassa postilaatikossa on mainoksia?

Ratkaisu:

Jakaja voi jakaa mainokset $\binom{10}{5}$ eri tavalla. Kun kaksi jakajaa jakaa mainoksia, on tapoja $\binom{10}{5}^2$. Toisen jakajan on jaettava mainoksensa niin, että niitä tulee vähintään kolmeen sellaiseen laatikkoon, joihin ensimmäinen jakaja ei mainoksia laittanut.

a) Kaikki 5 mainosta tyhjiin laatikoihin: $\binom{5}{0}\binom{5}{5} = 1$.

b) Yksi mainos laatikkoon, jossa on jo mainos, ja 4 tyhjiin laatikoihin: $\binom{5}{1}\binom{5}{4} = 5^2$

c) Kaksi mainosta laatikoihin, joissa on jo mainokset, ja kolme tyhjiin laatikoihin: $\binom{5}{2}\binom{5}{3} = 10^2$.

Kysytty todennäköisyys: $\dfrac{\binom{10}{5} \cdot \left(1 + 5^2 + 10^2\right)}{\binom{10}{5}^2} = \dfrac{126}{252} = \dfrac{1}{2} = 50\%$.

6. Lisää tehtäviä

Luvut, Lausekkeet ja yhtälöt

1. Näytä, että lausekkeella $\frac{x}{y^3-1}+\frac{y}{1-x^3}+\frac{2(x-y)}{x^2y^2+3}$ on vakioarvo kaikilla x ja y, joille se on mielekäs, ja $x+y=1$.

2. x ja y ovat reaalilukuja niin, että $x+3y=12$ ja $x \geq 2y \geq 0$. Mitä arvoja $x+2y$ voi saada?

3. Ratkaise yhtälö $\left(ax^2+bx+14\right)^2+\left(bx^2+ax+8\right)^2=0$ kokonaislukujen joukossa. a ja b ovat kokonaislukuja.

4. Polynomin $p(x)$ aste on korkeintaan neljä. Polynomilla on nollakohtia ja sillä on minimikohdat kun $x_1=-3$ ja $x_2=5$. Olettaen, että polynomi $q(x)=p(x-1)$ on parillinen ja sillä on lokaalimaksimiarvo 256, määritä polynomi $p(x)$.

5. Osoita, että yhtälöryhmällä $x-y+2z=0$, $-2x+y-2z=-2$, $2x+cy+3z=1$ on ratkaisu, joka on riippumaton parametrin c arvosta.

6. Etsi kaikki kokonaisluvut x, joille lausekkeen $6x^2-167y-482z$ ratkaisu on

   a) alkuluku;
   b) mahdollisimman pieni kokonaisluku.

Geometria

7. Suorakulmio, jonka sivut ovat 15 cm ja 20 cm, kierretään lävistäjän ympäri. Mikä on syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus?

8. *ABC* on annettu kolmio. Etsi jana, joka kulkee kärjen *C* läpi niin, että kolmion *ABD* piiri on suurempi kuin kolmion *ABC* piiri, kaikilla janalla olevilla pisteillä *D*, jotka ovat eri piste kuin *C*.

9. Kuinka monta sellaista erimuotoista kolmiota on olemassa, jonka kaikkien kulmien asteluvut ovat kokonaislukuja?

10. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on c, ja kolmion pinta-ala on $t = \frac{c^2}{8}$. Määritä kolmion kulmien tarkat suuruudet.

11. Katkaistun pyramidin pohjasärmät ja sivusärmät ovat kaikki neljän yksikön mittaiset. Päätytahkon sivut ovat kaksi yksikköä. Mikä on suurin mahdollinen etäisyys katkaistun pyramidin kahden kärjen välillä?

12. Pelto rajoittuu yhdeltä reunaltaan 50 metriä pitkään muuriin. Matti haluaa ympäröidä suurimman mahdollisen suorakulmaisen alueen sähköaidalla lehmiensä laitumeksi. Miten hän saavuttaa tämän, jos hänellä on 44 metriä johtoa jonka hän voi kiinnittää maahan pylväillä, joiden välinen etäisyys on

    a) 1 metri,

    b) 2 metriä.

    Mikä on ympäröidyn alueen pinta-ala kummassakin tapauksessa?

13. Puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat $a = 10$, $c = 15$ ja ympäripiirretyn ympyrän säde on $r = 10$. Mikä voi olla kylkien pituus? Mikä on puolisuunnikkaan pinta-ala?

14. Yhdistä suorakulmion sivujen keskipisteet vastakkaisiin kulmiin. Näin saadut kahdeksan janaa muodostavat kahdeksankulmion. Miten suuren osan koko suorakulmion pinta-alasta tämä kahdeksankulmio muodostaa?

15. Suorakulmainen kolmio jaetaan kolmioon ja nelikulmioon hypotenuusan kohtisuoralla puolittajalla. Nelikulmion lävistäjien pituuksien suhde on $\left(1+\sqrt{3}\right):2\sqrt{2}$. Määritä kolmion kulmien tarkat suuruudet.

16. Kolmion ABC kärjet ovat tason pisteissä $A(0,3)$, $B(3,0)$ ja $C(c,6)$. Kolmion pinta-ala on 7. Etsi c siten, että $0 < c < 3$.

17. Vinoneliön, jonka sivun pituus on 1, terävä kulma on 60°. Kuinka monta sellaista ympyrää on, että vinoneliön kärjet ovat yhtä kaukana ympyrän kehältä? Mitkä ovat ympyröiden säteet?

18. Tasasivuisen kolmion ABC sivujen pituus on 6 cm. Ötökkä lähtee kolmion kärjestä C ryömimään tasaista vauhtia, 4mm/s kohti pistettä A. Samaan aikaan toinen ötökkä lähtee ryömimään pisteestä B kohti pistettä C 3mm/s vauhdilla. Kauanko kestää, kunnes ötökät ovat mahdollisimman lähellä toisiaan ja mikä on tämän lyhimmän mahdollisen välimatkan pituus?

19. Etsi pinta-alaltaan mahdollisimman pieni tasakylkinen kolmio, joka on piirretty puoliympyrän ympäri niin, että sen kanta on puoliympyrän halkaisijalla ja sen kyljet ovat puoliympyrän tangentit.

20. Pallon sisällä on neljä yksikköpalloa siten, että jokainen niistä sivuaa sekä isoa palloa että kolmea muuta yksikköpalloa. Kuinka suuren osan ison pallon tilavuudesta neljä yksikköpalloa täyttävät?

21. Kolmion kulmat B ja C yhdistetään pisteisiin, jotka jakavat kulmien vastaiset sivut kolmeen yhtä suureen osaan. Näin syntyvien janojen sisään muodostuu nelikulmio. Todista, että nelikulmiolla on lävistäjä, joka on yhdensuuntainen kolmion sivun BC kanssa.

22. Säännöllinen kuusikulmio pyörähtää symmetria-akseleidensa ympäri. Määritä syntyneiden kappaleiden pinta-alojen suhde.

23. Jatka neliön kumpaakin lävistäjää toiseen suuntaan neliön sivun pituuden verran. Kuinka monta tasakylkistä kolmiota voidaan määrätä sivujen jatkojen päätepisteiden ja neliön kärkien avulla?

24. *ABC* on tasasivuinen kolmio tasossa. Ajatellaan tasokuviota joka muodostuu pisteistä, joiden etäisyys kärjestä *A* on pienempi tai yhtä suuri kuin kolmion sivun pituus, ja etäisyys kärjistä *B* ja *C* suurempi tai yhtä suuri kuin kolmion sivun pituus. Millä ehdoilla tasokuvion pinta-ala on suurempi kuin kolmion pinta-ala?

25. *P* on piste sivulla *AC* ja *Q* on piste sivulla *BC* kolmiossa *ABC*. Pisteen *P* kautta kulkeva suora, joka on yhdensuuntainen sivun *BC* kanssa, leikkaa sivun *AB* pisteessä *K* ja pisteen *Q* kautta kulkeva suora, joka on yhdensuuntainen sivun *AC* kanssa, leikkaa sivun *AB* pisteessä *L*. Todista, että jos jana *PQ* on yhdensuuntainen kolmion sivun *AB* kanssa, niin *AK*=*BL*.

26. Neljäkäs muodostetaan neljästä metallitangosta, jotka liitetään toisiinsa kärjistä. Pidempi lävistäjä on alun perin 32 cm pitkä. Neljäkästä puristetaan hieman kasaan pitempää lävistäjää vasten. Seurauksena toinen lävistäjä pitenee 1,2 kertaa niin paljon kuin pitempi lävistäjä lyhenee. Mitkä ovat lävistäjien uudet pituudet?

27. Suorakulmaisessa kolmiossa *ABC* on 30° kulma kärjessä *B*. *D* on sellaisen kolmion ulkopuolelle piirretyn neliön keskipiste, jonka yksi sivu on kolmion hypotenuusa *BC*. Määritä kulma $\angle ADB$.

28. Todista, että suorakulmaisen kolmion sisään piirretyn ympyrän halkaisija on yhtä pitkä kuin hypotenuusan ja toisen kateetin pituuksien erotus ja kaksi kertaa niin pitkä kuin hypotenuusan ja toisen kateetin pituuksien erotus.

29. Olettaen, että ympyrälle $x^2 - 6x + y^2 - 2py + 17 = 0$ voidaan piirtää kaksi kohtisuoraa tangenttia, jotka kulkevat origon kautta, mitä arvoja muuttuja *p* voi saada?

30. Etsi ne suorakulmaiset kolmiot, joiden sivujen pituudet ovat kokonaislukuja ja piiri yhtä suuri kuin pinta-ala.

31. Neliön $ABCD$ kulman A kautta piirretään mielivaltainen suora (joka ei saa kulkea kulmien B ja C kautta) ja tälle suoralle piirretään kohtisuorat kulmista B and D. Kohtisuorien ja suoran leikkauspisteet ovat B_1 ja D_1. Todista, että $AB_1^{\ 2} + AD_1^{\ 2} = BB_1^{\ 2} + DD_1^{\ 2}$.

32. Olkoon annettu kuusi eri pistettä tasossa niin, että ainakin kolme mistä tahansa neljästä on samalla suoralla. Todista, että ainakin viisi pisteistä on samalla suoralla.

33. Pisteet A, B, C ja D sijaitsevat samalla suoralla tässä järjestyksessä ja $AB = BC$. Piirrä janaa AD vastaan kohtisuorat pisteisiin B ja C. Pisteen B kautta piirretty kohtisuora leikkaa pisteissä P ja Q ympyrää, jonka halkaisija on AD. Vastaavasti pisteen C kautta piirretty kohtisuora leikkaa pisteissä K ja L ympyrää, jonka halkaisija on BD. Osoita, että pisteiden P, K, L ja Q kautta kulkevan ympyrän keskipiste on B.

34. Suorakulmainen kolmio, jonka sivujen pituudet ovat 3, 4 ja 5 leikataan kahteen osaan suoralla, joka on kohtisuorassa hypotenuusaa vastaan. Toinen osista on nelikulmio, jonka sisään voidaan piirtää ympyrä, joka sivuaa nelikulmion jokaista sivua. Toinen osa on suorakulmainen kolmio. Määritä suorakulmion sivujen pituudet.

35. Tasakylkisen kolmion ABC kannan AB keskipiste on F. Olkoon D pisteen F kohtisuora projektio sivulle BC. Olkoon E janan DF keskipiste. Todista, että CE ja AD ovat kohtisuorassa keskenään.

36. Etsi kaikki kokonaisluvut, jotka voivat olla säännöllisen monikulmion kulmien astelukuja.

37. Olkoon annettu jana BD, sekä pisteestä A janalle CD, pisteestä B janalle DA, pisteestä C janalle AB sekä pisteestä D janalle BC piirretyt kohtisuorat janat. Konstruoi nelikulmio $ABCD$. (Ei tarvitse pohtia mahdollisten ratkaisujen lukumäärää.)

Sekalaisia tehtäviä

38. Millä kantalukujärjestelmällä kertolasku $166 \cdot 56 = 8590$ pitää paikkansa?

39. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut, joilla on yhtä monta kuudella jaollista tekijää, kuin tekijöitä, jotka eivät ole kuudella jaollisia.

40. Etsi kaikki sellaiset positiiviset kokonaisluvut, joilla saadaan tulokseksi 2007, kun luvusta vähennetään kaikkien siinä esiintyvien numeroiden summa.

41. Luentosalissa on 24 valaisinta. Jokaisessa valaisimessa voi olla korkeintaan 4 hehkulamppua. Kun huoltohenkilökunta oli asettanut osaan valaisimista 4 lamppua, he huomasivat, ettei lamppuja ollut tarpeeksi. Sitten he jatkoivat laittamalla valaisimiin kolme lamppua, sitten kaksi lamppua, ja loppuihin valaisimiin yhden lampun. Montako lamppua puuttui, jos luentosalissa oli kaksi kertaa niin monta valaisinta yhdellä lampulla kuin valaisimia neljällä lampulla, ja valaisimia, joihin ei riittänyt lamppuja ollenkaan, oli puolet siitä, mitä valaisimia, joissa oli kolme lamppua?

42. Teemun matematiikan numeroiden keskiarvo oli 4:n ja 5:n välillä ennen kuin ensimmäisen lukukauden viimeinen matematiikan koe palautettiin oppilaille. (Arvosanat unkarilaisessa koulussa ovat 1:stä 5:een, 5 on erinomainen ja 1 hylätty. Opettajat antavat joskus puolikkaita arvosanoja, kuten 3 ja puoli, joka tarkoittaa, että arvosana on 3:n ja 4:n välissä. Lopulliset numerot ovat kokonaislukuja.) Opettaja sanoi Teemulle: "16 teistä teki tämän kokeen. Olen antanut myös puolikkaita numeroita. Arvosanojenne vaihteluväli on 2, moodi on 4,5 ja mediaani on 4. Keskiarvo on huonoin mahdollinen, jonka 16 oppilaan ryhmä voi näillä ehdoilla saada. Jos osaat kertoa minulle, oletko voinut saada kokeesta arvosanan 5, niin saat lukukauden arvosanaksi 5." Teemu sai arvosanan 5. Mitä hän vastasi opettajan kysymykseen?

43. Anna kirjoittaa ylös kaksi mielivaltaista luonnollista lukua, jotka koostuvat samoista numeroista eri järjestyksessä. Hän vähentää pienemmän luvun suuremmasta, ja kertoo erotuksen mielivaltaisella luonnollisella luvulla. Sitten hän poistaa saadusta luvusta numeron, joka ei ole 0. Hän kertoo jäljelle jääneen luvun Pekalle. Hieman mietittyään Pekka osaa arvata poistetun numeron. Miten?

44. Kymmenen henkilön joukko meni elokuviin. He ostivat liput viidelle vierekkäiselle paikalle kahdella eri rivillä. Ari ja Pentti halusivat istua vierekkäin, kun taas Susanna

ja Annika eivät halunneet istua vierekkäin. Kuinka monta erilaista mahdollista istumajärjestystä oli?

45. 2010-numeroisen yhdeksällä jaollisen luvun numerot lasketaan yhteen. Myös näin saadun luvun numerot lasketaan yhteen, ja tämä toistetaan vielä kerran. Mikä lopullinen tulos voisi olla?

46. Määritä funktion $\mathrm{f}(x) = \dfrac{(x+a)^2}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{(x+b)^2}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{(x+c)^2}{(c-a)(c-b)}$

arvojoukko; a, b ja c ovat eri reaalilukuja.

47. Matematiikkakilpailussa oli ratkaistavana kolme tehtävää. 56 osallistujaa ratkaisi ainakin yhden tehtävän. 2 osallistujaa ratkaisi kaikki tehtävät. Niistä, jotka ratkaisivat toisen tehtävän, kolmannen tehtävän ratkaisi 10 enemmän kuin ensimmäisen tehtävän. Niiden lukumäärä, jotka ratkaisivat sekä ensimmäisen että toisen tehtävän, oli 10 suurempi kuin niiden lukumäärä, jotka ratkaisivat vain kolmannen tehtävän. Kaikki osallistujat, jotka ratkaisivat ensimmäisen ja kolmannen tehtävän, ratkaisivat myös toisen tehtävän. Yhteensä 14 osallistujaa ratkaisi ainoastaan ensimmäisen tai toisen tehtävän. Kuinka moni osallistuja ratkaisi kolmannen tehtävän?

48. Kuinka monta sellaista 9-numeroista lukua on olemassa (kymmenjärjestelmässä), jotka ovat jaollisia luvulla 11, ja joissa esiintyy kaikki numerot nollaa lukuun ottamatta?

49. Lahjatavarakaupassa on myynnissä 160 pääsiäiskorttia pinossa tiskillä. Asiakas jakaa korttipinon kahteen pinoon, joissa kummassakin on vähintään kaksi korttia. Hän ostaa yhden kortin jommastakummasta pinosta. Seuraava asiakas toimii samalla tavalla: hän jakaa toisen pinoista kahteen pinoon (samalla säännöllä kuin edellä) ja ostaa kortin toisesta näistä pinoista. Seuraava asiakas menettelee samoin, ja niin edelleen. Onko näin toimien mahdollista päätyä tilanteeseen, jossa jokaisessa pöydällä olevassa pinossa on neljä kortti jokaisessa?

50. Mikä-Mikä-Maan parlamentin edustajista koostuvan pienen ryhmän jäsenet osallistuvat neljän komitean toimintaan. Jokainen ryhmän jäsen työskentelee kahdessa ko-

miteassa, ja millä tahansa kahdella komitealla on yksi yhteinen edustaja ryhmästä. Kuinka monta edustajaa ryhmään kuuluu?

51. Jos erääseen kolminumeroiseen lukuun lisätään sen numeroiden summa, saatu luku koostuu kolmesta samasta numerosta. Jos taas numeroiden summa vähennetään alkuperäisestä luvusta, saadaan myös luku, joka koostuu kolmesta samasta numerosta. Mikä on alkuperäinen luku?

52. Viidestä tytöstä ja seitsemästä pojasta koostuva ryhmä lastentarhalaisia leikkii häitä. He valitsevat morsiamen ja sulhasen, vihkijän, kaksi morsiusneitoa, yhden bestmanin morsiamelle ja yhden bestmanin sulhaselle, sekä kaksi todistajaa. Kolmella tytöistä on myös veli ryhmässä, muita sisaruspareja ei ole. Monellako eri tavalla valinnat voi tehdä, kun sisko ja veli eivät voi olla morsian ja sulhanen, eikä vihkijä voi olla morsiamen tai sulhasen sisko tai veli. (Morsiusneidot ovat tyttöjä ja bestmanit poikia. Todistajien sukupuolella ei ole väliä.)

53. Joulupukki jakaa 53 joulukaramellia kolmeen säkkiin niin, että jokaisessa säkissä on eri määrä karamelleja, mutta mitkä tahansa kaksi säkkiä sisältävät yhteensä enemmän karamelleja kuin kolmas säkki. Kuinka monella tavalla tämä on mahdollista?

54. Määritä tason pisteparit (x, y), joiden koordinaatit täyttävät ehdot $x^2 + y^2 \le 25$ ja $-1 \le \dfrac{x}{x+y} \le 1$.

55. Uuden vuoden konserttiin lipun varanneiden henkilöiden lukumäärä on neliöluku. Jos 100 henkilöä lisää varaisi lipun konserttiin, henkilöiden lukumäärä olisi jokin neliöluku +1. Jos vielä 100 henkilöä varaisi lipun, olisi lukumäärä taas jokin neliöluku. Kuinka moni henkilö varasi lipun?

56. Pikajuna ohittaa tavarajunan samansuuntaista viereistä rataa pitkin. Paluumatkallaan pikajuna ohittaa saman tavarajunan, nyt kulkien vastakkaiseen suuntaan. Pikajunan vauhdin suhde tavarajunan vauhtiin on sama kuin samansuuntaiseen ohitukseen kuluneen ajan suhde vastakkaissuuntaiseen ohitukseen kuluneeseen aikaan. Kuinka paljon nopeampi pikajuna on kuin tavarajuna, jos molemmat kulkevat vakionopeutta?

57. Todista, että kuusinumeroisella luvulla $ababab$ ei voi olla yli kaksinumeroisia alkutekijöitä.

58. Pyöreän pöydän ympärillä istuu 30 henkilöä. Osa heistä on valehtelijoita, osa puhuu totta. Tiedämme, että jokaisen valehtelijan vierustovereista tasan yksi on valehtelija. Jokaiselta kysytään, montako valehtelijaa hänen vieressään istuu. 12 heistä vastaa, että tasan yksi, ja loput vastaavat, että molemmat vierustoverit ovat valehtelijoita. Montako valehtelijaa pöydän ääressä istuu?

59. Eräällä kokonaisluvulla on kaksi alkutekijää. Sen jakajien lukumäärä on kuusi ja sen jakajien summa on 28. Mikä luku on kyseessä?

60. Tukkukauppias myy kemikaliotuotteita ja paperitavaroita. Hänellä on kontti, jonka tilavuus on 12 m^3 ja johon mahtuu 5000 kg tuotteita. Tonni kemikaliotuotteita vie tilaa 1 m^3 ja tonni paperitavaroita 3 m^3. Tukkukauppias tekee voittoa 100 000 euroa tonnia kohti kemikaliotuotteissa ja 200 000 euroa tonnia kohti paperitavaroissa. Miten suuren voiton hän voi korkeintaan tehdä myydessään yhden kontillisen tuotteita?

61. Eräs kaksinumeroinen luku kerrotaan neljällä ja näin saadun luvun perään kirjoitetaan alkuperäinen luku. Näin saadulla luvulla on tasan kuusi jakajaa. Mikä alkuperäinen kaksinumeroinen luku on?

62. Oletetaan, että allergiasta kärsivien ihmisten joukossa on suhteellisesti enemmän teini-ikäisiä, kuin koko väestössä, ja että teini-ikäisten joukossa urheilua harrastavien osuus on suurempi kuin koko väestössä. Seuraako tästä, että urheilua harrastavien joukossa on suhteellisesti enemmän allergiasta kärsiviä?

63. Laivan kapteeni kirjoitti kaavan $d = p\sqrt{h}$ lokikirjaansa horisontin etäisyydeksi. Valitettavasti numero p sottaantui, eikä siitä saanut selvää. d merkitsee etäisyyttä horisonttiin kilometreinä ja h tarkoittaa katsojan silmien korkeutta meren pinnasta metreinä. Määritä p:n arvo niin, että kaava on käytännössä mahdollinen. (Käytä maapallon säteenä 6370km.)

64. Todista, että $5^{2008} + 4$ on yhdistetty luku (ykköstä suurempi kokonaisluku, joka ei ole alkuluku).

65. Kolmen positiivisen luvun summa kerrotaan niiden käänteisarvojen summalla. Etsi pienin mahdollinen väli, missä tulo voi olla.

66. Roosa, Inka ja Vilma päättivät ratkaista kaikki tehtävät matematiikan kirjastaan. Roosa ratkaisi a tehtävää, Inka b tehtävää ja Vilma c tehtävää päivässä. (Jokainen tehtävä tuli ratkaistuksi vain kerran.) Jos Roosa olisi ratkaissut 11 kertaa niin monta tehtävää päivässä, kuin mitä hän ratkaisi, Inka seitsemän kertaa niin monta ja Vilma yhdeksän kertaa niin monta, olisi aikaa kaikkiaan kulunut 5 päivää. Jos taas Roosa olisi ratkaissut neljä kertaa niin monta, Inka kaksi kertaa ja Vilma kolme kertaa niin monta tehtävää, olisi aikaa kulunut 16 päivää. Kauanko aikaa kului?