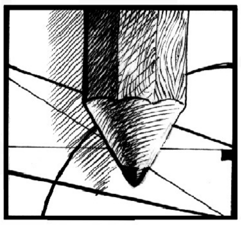


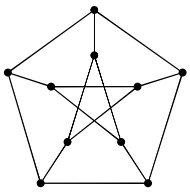
Tasograafit ja väritykset

Esa V. Vesalainen
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Graafi on matemaattinen olio, joka koostuu kahdesta eri asiasta:

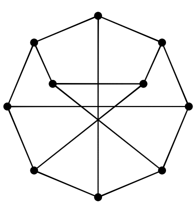
1) äärellisestä joukosta *kärkiä*; sekä
2) joukosta *särmiä*, eli eri kärkien pareja; kahden eri kärjen välillä joko on särmä tai sitten ei ole.

Tavanmukaisesti pieni graafi on helppo antaa kuvallisessa muodossa valitsemalla tason pisteitä kärjiksi, ja yhdistämällä kaksi kärkeä toisiinsa jonkinlaisella mukavalla viivalla silloin, kun ne ovat toistensa *naapureita*, eli silloin, kun niitä yhdistää särmä:

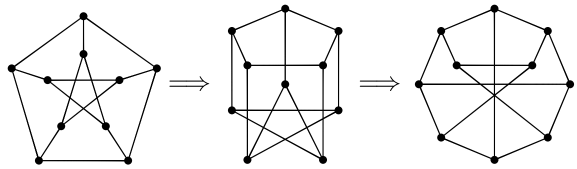


Kuva. Esimerkki graafista, *Petersenin graafi.*

On oleellista, että graafi itsessään ei tiedä sitä, miten se on piirretty tasoon. Esimerkiksi graafi



on sama kuin edellinen graafi, minkä näkee vaikkapa näin:



Voisimme myös antaa tämän saman graafin listana kärkien nimiä, ja listana näiden kärkien nimien pareja:

Kärjet:	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Särmät:	01, 12, 23, 34, 40,
	05, 16, 27, 38, 49,
	57, 79, 96, 68, 85.

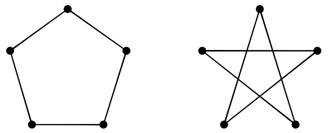
Toinen tapa esittää tämä listana olisi

Kärjet:	a, b, c, d, e, f, g, h, i, j.
Särmät:	ab, bc, cd, de, ef, fg, gh, ha,
	ae, cg, bi, if, dj, jh, ij.

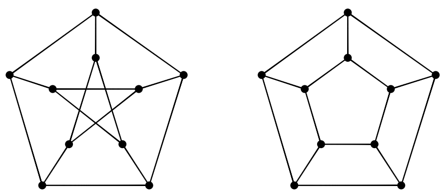
Se, että nämä kaksi eri listaa antavat saman graafin, ei ole mitenkään itsestäänselvää, mutta siitä voi vakuuttua esimerkiksi vaihtamalla kirjaimet numeroiksi $a \mapsto 0$, $b \mapsto 1$, $c \mapsto 6$, $d \mapsto 8$, $e \mapsto 5$, $f \mapsto 7$, $g \mapsto 9$, $h \mapsto 4$, $i \mapsto 2$ ja $j \mapsto 3$, jolloin jälkimmäisen graafin kärkien ja särmien listat muuttuvatkin edellisen graafin listoiksi, järjestystä lukuun ottamatta:

Kärjet:	0, 1, 6, 8, 5, 7, 9, 4, 2, 3.
Särmät:	01, 16, 68, 85, 57, 79, 94, 40,
	05, 69, 12, 27, 83, 34, 23.

Yleensä samaistamme graafit, jotka ovat keskenään samanlaisia, mutta emme luonnollisestikaan tee näin, jos ne ovat jonkin isomman graafin eri osia. Esimerkiksi seuraavat graafit ovat ensimmäisen Petersenin graafin kuvassa eri osia, vaikka ne ovatkin rakenteeltaan samat:



On helppo todeta, että jos kaksi graafia ovat rakenteeltaan samat (oikeasti pitäisi käyttää kreikasta johdettua ilmaisua ”graafit ovat keskenään isomorfiset”, mutta sivuuttakaamme tällaiset hienoudet), niin niillä on oltava yhtä paljon kärkiä ja yhtä paljon särmiä. Samoin asettamalla kärjet sopivasti vastakkain on vastinkärjillä aina oltava yhtä paljon naapureita. Mutta on myös tärkeää tiedostaa, että nämä ehdot eivät ole riittäviä sen toteamiseen, että kaksi graafia ovat sama graafi. Esimerkiksi kaksi graafia



ovat ihan aidosti eri graafeja, vaikka molemmissa on yhtä paljon kärkiä ja särmiä, ja kaikkien kärkien asteet ovat samat. Esimerkiksi oikeanpuoleisessa graafissa kärjestä pääsee takaisin lähtökärkeen kiertämällä kolmen muun kärjen kautta, kun taas vasemmanpuoleisessa graafissa on aina kierrettävä vähintään neljän kärjen kautta.

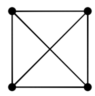
Graafit ovat eräitä yksinkertaisimpia kuviteltavissa olevia matemaattisia olioita. Siitä huolimatta niiden teoria on hämmästyttävän rikasta, mistä myöhemmin kuvattavat tulokset todistavatkin.

Luonnollisesti graafin käsitteellä on monia monituisia erilaisia variaatioita. Esimerkiksi, voisimme sallia särmän alkavan ja päättyvän samasta kärjestä, jolloin puhuisimme silmukasta. Tai voisimme sallia useampia särmiä kahden kärjen välille. Vielä yleisemmin voisimme tarkastella graafia, jossa yksittäisillä särmillä olisi suunta. Ja niin edelleen ja niin pois päin. Kaikilla tällaisilla variaatioilla on luonnollisesti paikkansa, vaikka emme niistä sen enempää tässä mainitsekaan.

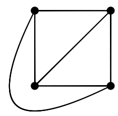
Ennen kuin siirrymme tarkastelemaan kiintoisia graafeihin liittyviä matemaattisia seikkoja, lienee paikallaan vielä sanoa muutama sananen graafien merkityksestä matematiikan ulkopuolella: ne ovat osoittautuneet hämmästyttävän hyödyllisiksi. Koska emme voi tässä tehdä enemmän oikeutta tälle tosiasialle, tyydymme vain mainitsemaan, että esimerkiksi algoritmiteos [6] sisältää katalogin usein käytännössä vastaan tulevista algoritmisista ongelmista, ja noin kolmasosa katalogin ongelmista liittyy graafeihin.

Tasograafit

Kutsumme graafia *tasograafiksi*, jos sen voi piirtää tasoon niin, että mitkään kaksi särmää kuvaavaa viivaa eivät leikkaa toisiaan, paitsi tietenkin mahdollisesti itse kärjissä, joiden puolestaan ajatellaan olevan tason pisteitä. Esimerkiksi graafi



on tasograafi, kuten helposti näkee:



Itse asiassa juuri nyt emme voi antaa mitään esimerkkiä graafista, joka ei olisi tasograafi, mutta voimme tehdä niin hieman myöhemmin, kun käytettävissämme on enemmän teoriaa.

Meidän lienee syytä varoittaa lukijaa eräästä seikasta: Tässä yhteydessä periaatteessa pitäisi olla varovainen sen kanssa, millaisia viivoja käyttää. Esimerkiksi, jos vaatisimme viivoilta vain ns. jatkuvuutta, niin osoittautuisi, että viivoja voisi piirtää niin, että ne peittäisivät kokonaisia tasoalueita, eivätkä siis enää näyttäisi lainkaan ”viivamaisilta”. Mutta osoittautuu, että jos rajoitamme piirrettävien viivojen luonnetta aivan vähänkin, niin tällaisia patologisia tilanteita ei yksinkertaisesti tule vastaan.

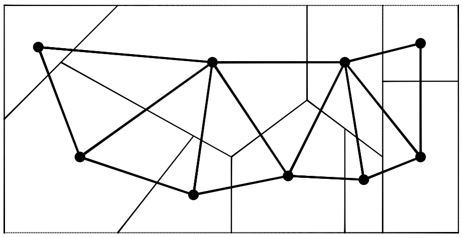
Luonnollisia mahdollisuuksia olisivat murtoviivat, eli viivat jotka koostuvat äärellisen monesta janasta. Kaikissa tämän artikkelin kuvissa, yhtä poikkeusta lukuun ottamatta, käytämmekin yksinkertaisuuden vuoksi janoja. Tai voisi valita jossakin mielessä sileitä viivoja, esim. sellaisia, joilla on jokaisessa pisteessä hyvin määritelty tangentti, tai äärellisen monesta tällaisesta osasta koostuvia viivoja. Se, miten tarkalleen ottaen valinta tehdään, ei ole kovin tärkeää alla kuvatun matematiikan kannalta.

Toki käytämme näillekin viivoille hieman epätriviaaleja, mutta intuitiivisesti täysin selviä, tosiasioita, kuten sitä, että jos viiva lähtee pisteestä ja itseään leikkaamatta palaa takaisin samaan pisteeseen, niin viiva jakaa tason kahteen osaan, rajoitettuun sisäosaan sekä rajoittamattoman isoon ulkopuoleen.

Väritykset

Eräs 1800-luvulta peräisin oleva ongelma kysyy: kuinka monella värillä voimme aina värittää kartan valtiot niin, että kaksi valtiota, joilla on yhteistä rajaviivaa, aina väritetään eri väreillä. Erityisesti, riittääkö neljä väriä aina tähän?

Tällä ongelmalla on helppo yhteys tasograafien kärkien värityksiin: oleellisesti ottaen joka valtion alueelle voi sijoittaa kärjen, ja jos kahdella naapurivaltiolla on yhteistä rajaviivaa, niin voimme yhdistää näiden valtioiden kärjet särmällä.



Kuva. Karttojen värityksistä graafien värityksiin.

Eli tarkastelemmekin ongelmaa, kuinka monta väriä tarvitaan tasograafin kärkien värittämiseen niin, että naapurikärjet aina väritetään eri väreillä? Erityisesti, riittääkö neljä väriä tähän aina?

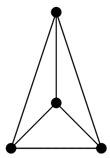
Tämä ongelma osoittautuu hämmästyttävän vaikeaksi. Ensimmäisenä sen ratkaisi Kempe vuonna 1879 osoittamalla, että neljä väriä riittää. Valitettavasti vain yksitoista vuotta myöhemmin Heawood huomasi todistuksessa virheen ja osoitti, että lähestymistapa kuitenkin riittää sen osoittamiseen, että viisi väriä on aina riittävästi. Esitämme alla viisivärilauseen todistuksen, oleellisesti ottaen samalla lähestymistavalla.

Tarina muuttuu erityisen kiehtovaksi vuonna 1976, jolloin Appel ja Haken lopulta todistivat nelivärilauseen. He hyödynsivät tietokonetta kuuluisassa todistuksessaan oleellisella tavalla. Alkuperäinen todistus oli monimutkainen myös tietokoneesta riippumattomilta osiltaan; se koostui 50 sivusta tekstiä ja kuvioita, 85 sivusta, joissa oli lähes 2500 kuviota lisää, sekä 400 mikrofilmisivusta, joissa oli lisää diagrammeja ja tuhansien pienten yksityiskohtien tarkistuksia. Tietokoneaikaa todistus oli vaatinut 1200 tuntia. Lisäksi vuosien varrella todistuksen pienistä yksityiskohdista on löytynyt useita virheitä, jotka on yksitellen korjattu.

Todistus synnytti kiivasta keskustelua matemaattisen todistuksen luonteesta ja tietokoneen hyödyntämisestä todistuksissa. Vaikka tietokonetta hyödyntäviin todistuksiin suhtaudutaankin nykyisin myönteisemmin kuin ennen, keskustelu jatkuu edelleen.

Tasograafien teoriaa

Olkoon G yhtenäinen tasograafi, jolla on v kärkeä, e särmää, ja jakakoot sen kärjet ja särmät tason f alueeseen. Tässä *yhtenäinen* tarkoittaa sitä, että graafissa mistä tahansa kärjestä pääsee särmiä pitkin kulkemalla mihin tahansa muuhun kärkeen.



Kuva. Esimerkkigraafi. Tämä on yhtenäinen tasograafi, jolle $v = 4$, $e = 6$ ja $f = 4$. Neljäs alue on siis kuvion ulkopuolelle jäävä rajattoman suuri alue.

Todistamme viisivärilauseen neljässä osassa osoittamalla, että

1. $v - e + f = 2$;
2. $e \leqslant 3v - 3$;
3. jollakin kärjellä on enintään viisi naapuria; ja että
4. viisi väriä riittää.

Eulerin kaava. *Jos yhtenäisellä tasograafilla on v kärkeä ja e särmää, ja se on piirretty tasoon niin, etteivät sen mitkään kaksi särmää leikkaa toisiaan, ja näin on syntynyt f aluetta mukaan lukien koko kuvion ulkopuolelle jäävä rajattoman iso alue, niin täytyy päteä $v - e + f = 2$.*

Todistus. Aloitamme toteamalla, että väite varmasti pätee graafille, jolla on täsmälleen yksi kärki, sillä onhan tällöin $v = 1$, $e = 0$ ja $f = 1$, ja siis

$$v - e + f = 1 - 0 + 1 = 2.$$

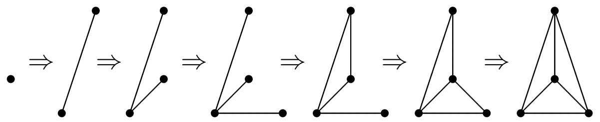
Todetaan seuraavaksi, että jos meillä on tasoon oikein piirretty yhtenäinen tasograafi, jolla on v kärkeä, e särmää ja f aluetta, ja jolle vieläpä pätee $v - e + f = 2$, niin tämä identiteetti säilyy lisättäessä graafiin yksi uusi kärki ja yksi uusi särmä, joka kytkee uuden kärjen johonkin jo olemassaolevaan kärkeen. Onhan nimittäin uudessa graafissa $v + 1$ kärkeä, $e + 1$ särmää ja f aluetta, ja

$$(v + 1) - (e + 1) + f = v - e + f = 2.$$

Seuraavaksi voimme todeta, että jos meillä on tasoon oikein piirretty yhtenäinen tasograafi, jolla on v kärkeä, e särmää ja f aluetta, ja jolle vieläpä pätee $v-e+f=2$, niin tämä identiteetti säilyy lisättäessä uusi särmä kahden jo olemassa olevan kärjen väliin. Onhan nimittäin uudessa graafissa v kärkeä, $e+1$ särmää ja $f+1$ aluetta – uusi särmä jakaa jonkin jo olemassa olevan alueen kahteen osaan – ja lisäksi

$$v-(e+1)+(f+1)=v-e+f=2.$$

Lopuksi, lukija toivottavasti uskoo, että näillä kahdella operaatiolla voi rakentaa minkä tahansa yhtenäisen tasograafin yhdestä kärjestä lähtien.



Kuva. Esimerkkikuva Eulerin kaavan todistuksen lähestymistavasta, eli siitä, miten yhtenäinen graafi voidaan rakentaa yhdestä kärjestä lähtien lisäämällä kerrallaan joko uusi kärki ja särmä, joka yhdistää sen johonkin jo olemassa olevaan kärkeen, tai lisäämällä uusi särmä kahden jo olemassaolevan kärjen välille.

Lause. *Jos yhtenäisellä tasograafilla on v kärkeä ja e särmää, niin $e \leqslant 3v-3$. Itse asiassa, jos $v \geqslant 3$, niin pätee vieläpä $e \leqslant 3v-6$.*

Todistus. Jos $v=1$ niin särmiä ei voi olla, ja $e=0=3v-3$. Jos taas $v=2$, niin särmiä on enintään yksi, eli $e \leqslant 1 \leqslant 3 = 3v-3$. Oletetaan siis, että $v \geqslant 3$.

Jokainen alue koskettaa jotakin määrää särmiä. Lasketaan nämä lukumäärät yhteen luvuksi N. Jos särmä koskettaa samaa aluetta molemmilta puoliltaan, niin se lasketaan sen alueen osalta mukaan kahdesti. Nyt jokainen särmä lasketaan kahdesti, eli $N=2e$. Toisaalta, varmasti jokaista äärellistä aluetta ympäröi vähintään kolme särmää, ja varmasti kuvion ulkopuolinen rajaton alue koskettaa vähintään kolmea särmää, eli on oltava $N \geqslant 3f$. Toisaalta, Eulerin kaavasta seuraa, että $f=2-v+e$. Täten siis

$$2e \geqslant 3f = 6-3v+3e,$$

mistä heti seuraakin, että

$$e \leqslant 3v-6.$$

Lause. *Yhtenäisestä tasograafista löytyy aina kärki, jolla on enintään viisi naapuria.*

Todistus. Olkoon kyseisessä graafissa v kärkeä ja e särmää. Lasketaan kaikkien kärkien kaikkien naapureiden lukumäärät yhteen. Koska tällöin jokainen särmä kasvattaa täsmälleen kahden kärjen naapurien lukumäärää kumpaakin yhdellä, on yhteenlaskun lopputuloksena $2e$. Jos jokaisella kärjellä olisi vähintään kuusi naapuria, niin yhteenlaskun lopputulos olisi väistämättä vähintään $6v$, eli olisi $2e \geqslant 6v$, eli $e \geqslant 3v$, vastoin edellisen lauseen tulosta. Siis jollakin kärjellä on oltava enintään viisi naapuria.

Viisivärilauseen todistus

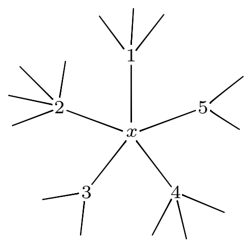
Viisivärilause. *Tasograafin kärjet voi aina värittää viidellä eri värillä niin, että naapurikärjet aina väritetään eri väreillä.*

Todistus. Käytämme induktiota graafin kärkien lukumäärän suhteen. Jos tasograafillamme on enintään viisi kärkeä, voi ne selvästi värittää viidellä eri värillä. Oletetaan sitten, että $N \in \mathbb{Z}_+$ on sellainen, että tiedämme väitteen todeksi enintään N kärjen tasograafeille, ja otetaan tarkasteluun mielivaltainen $N+1$ kärkeä sisältävä tasograafi.

Jos tarkasteltava $N+1$ kärjen tasograafi ei ole yhtenäinen, niin sen jokainen yhtenäinen osa sisältää enintään N kärkeä, ja yhtenäiset osat voi värittää yksitellen erikseen enintään viittä väriä käyttäen. Voimme siis huoletta olettaa, että tarkastelemme $N+1$ kärjen yhtenäistä tasograafia.

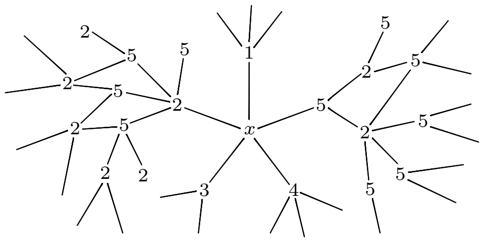
Tiedämme, että tarkasteltavassa graafissa on jollain kärjellä x enintään viisi naapuria. Poistamme kärjen x ja siihen liittyvät särmät hetkeksi, jolloin jäljelle jää N kärjen graafi, jonka kärjet voimme värittää viidellä värillä halutulla tavalla. Lisäämme nyt kärjen x ja siihen liittyvät särmät takaisin graafiin. Jos voimme jotenkin laajentaa värityksen koskemaan kärkeä x, mahdollisesti väritystä sopivasti muokkaamalla, niin olemme valmiit.

Jos kärjen x naapurit on väritetty enintään neljää väriä käyttämällä, niin tietenkin jäljelle on jäänyt ainakin yksi väri, jolla kärjen x voi värittää. Erityisesti, jos kärjellä x on enintään neljä naapuria, niin kärjen x voi värittää eri värillä kuin naapurinsa. Täten voimme huoletta olettaa, että kärjellä x on viisi naapuria ja että sen naapurit on väritetty kaikkia viittä väriä käyttäen. Voimme kutsua käytettyjä värejä vaikkapa nimillä 1, 2, 3, 4 ja 5 seuraavan kuvan mukaisesti:



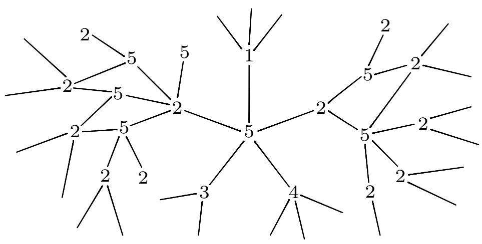
Kärjen naapureiden välillä saattaa olla särmiä, mutta selkeyden vuoksi emme ole piirtäneet kuvaan sellaisia.

Tarkastelemme nyt kärjen x väreillä 2 ja 5 väritettyjä naapureita, niiden väreillä 5 ja 2 väritettyjä naapureita, edelleen näiden väreillä 2 ja 5 väritettyja naapureita, ja niin edelleen. Tarkastelemme siis seuraavan kuvan mukaista väreillä 2 ja 5 väritettyjen kärkien joukkoa.



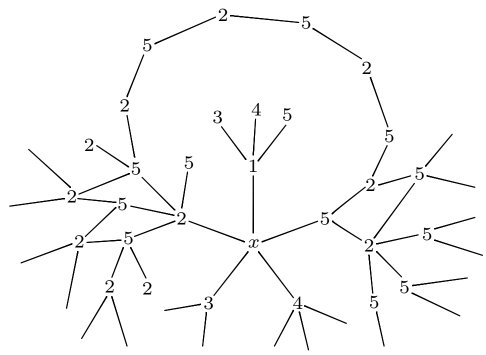
Ehkä varmuuden vuoksi on hyvä huomauttaa, että tarkastelussa eivät suinkaan ole välttämättä mukana kaikki väreillä 2 ja 5 väritetyt kärjet, vaan ainoastaan ne, joihin pääsee kärjestä x kulkemalla särmiä pitkin vain väreillä 2 ja 5 värjättyjen kärkien kautta.

Jos joukot eivät kohtaa, niin voimme vaihtaa värit 2 ja 5 päittäin värillä 5 väritetystä kärjen x naapurista kasvavassa joukossa, minkä jälkeen kärjen x voikin värjätä värillä 5:

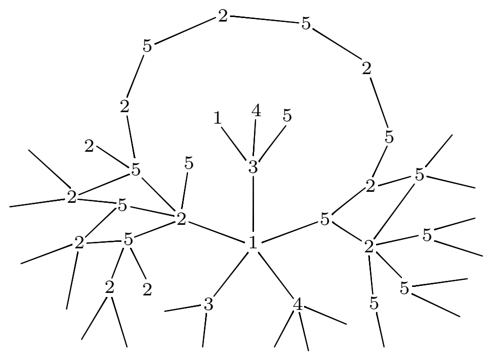


Jos taas kärkeen x väreillä 2 ja 5 värjättyjen kärkien kautta liittyvät väreillä 2 ja 5 värjätyt kärjet muodostavat yhtenäisen kokonaisuuden, niin kärki x liittyy väreillä 2 ja 5 värjättyjen kärkien polkuun, joka lähtee kärjestä x ja myös päättyy kärkeen x. Tarkastellaan jotakin lyhintä mahdollista tällaista polkua P. On helppo tarkistaa, ettei tämä polku voi kulkea minkään kärjen eikä minkään särmän kautta kuin enintään kerran.

Nyt polku P joko kiertää kärjen x värillä 1 värjättyä naapuria, tai kärjen x väreillä 3 ja 4 värjättyjä naapureita. Koska jälkimmäinen tapaus voidaan käsitellä aivan samoin kuin edellinenkin, oletamme, että polku kiertää kärjen x värillä 1 värjättyä naapuria:



Nyt polun sisäpuolella voimme yksinkertaisesti vaihtaa esimerkiksi värit 1 ja 3 keskenään, jolloin voimme värjätä kärjen x värillä 1, ja olemme valmiit:



Nelivärilauseen todistus

Miten nelivärilause sitten todistetaan? Todistus on hirmuisan monimutkainen; itse asiassa niin monimutkainen, ettei ihminen voi tarkistaa sitä kynällä ja paperilla. Voimme ehkäpä kuitenkin yrittää antaa jonkinlaisen karkean mielikuvan siitä, mistä nelivärilauseen todistuksissa on kyse.

Pohjimmiltaan nelivärilauseen todistus on rakenteeltaan samanlainen kuin yllä esitetyn viisivärilauseenkin. Ylimmällä tasolla suoritamme induktion graafien kärkien lukumäärän suhteen. Induktioaskeleessa ensin osoitamme, että graafin on sisällettävä jokin joistakin äärellisen monesta konfiguraatiosta. Sitten induktioaskel viimeistellään osoittamalla, että jokaisella konfiguraatiolla on se ominaisuus, että jos graafi sellaista lukuun ottamatta on jo väritetty neljällä värillä, niin väritystä voi muokata niin, että sen voi lopuksi laajentaa koko graafin väritykseksi.

Yllä olevan viisivärilauseen todistus oli täsmälleen tätä muotoa; teimme induktion graafin kärkien lukumäärän suhteen. Konfiguraatioita tarvitsimme vain yhden; kärjen, jolla on enintään viisi naapuria. Ja tämän konfiguraation osoittaminen suotuisaksi viiden värin väritysten laajentamisen kannalta osoittautui tehtävissä olevaksi ja varsin miellyttäväksikin askareeksi.

Nelivärilauseen todellinen haaste on siinä, että eri konfiguraatioita tarvitaan sen verran monta, että niiden käyminen läpi käsin kynällä ja paperilla ei enää tunnu kovin hyvältä ajatukselta. Jonkinlaisen kuvan nelivärilauseen todistusten monimutkaisuudesta saa esimerkiksi ihmettelemällä artikkelin [8] kaunista liitettä `http://arxiv.org/src/0905.0043v3/anc/U_2822.pdf`, jossa on annettu eräs riittävä 2822 konfiguraation lista. Kärkiä kuvaavat symbolit merkitsevät tietoa naapureiden lukumäärästä.

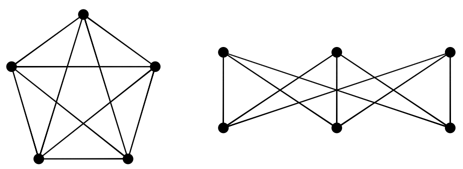
Luonnollisesti ajatuksena on, että kaikista näistä konfiguraatioista voi tarkistaa sen, että ne eivät aiheuta ongelmia värityksiä muokattaessa ja laajennettaessa induktioaskeleessa. Itse asiassa konfiguraatioita on niin paljon, että tämä tarkistuskin tehdään tietokoneella, ja on oleellista, että konfiguraatiot ovat sellaisia, että tämä on mahdollista.

Tietysti jäljelle jää kysymys, miten tällainen lista generoidaan? Se tuotetaan tietokoneella. Tämä vaatii epätriviaaleja ideoita, eikä ole mitenkään itsestäänselvä asia, emmekä ihmettele niitä tässä. Tosin, alkuperäisestä Appelin ja Hakenin todistuksesta, joka siis vaati 1200 tuntia tietokoneaikaa, voimme todeta, että he eivät tienneet etukäteen, että lasku koskaan loppuisi: jos tietokoneohjelma pysähtyi, niin sopiva lista konfiguraatioita oli saavutettu, mutta ennen tietokoneohjelman pysähtymistä ei ollut mitään takeita siitä, että se tosiaan pysähtyisi. . .

Tarkemmin tasograafeista

Nyt, kun olemme selvinneet viisivärilauseen todistuksesta, voisimme hyvällä syyllä kysyä, voimmeko ymmärtää paremmin sitä, milloin graafin ylipäätänsä voi piirtää tasoon? Osoittautuu, että tähän on olemassa varsin elegantti *Kuratowskin lauseen* nimellä kulkeva vastaus.

Aloitetaan nimeämällä kaksi erityistä graafia, *Kuratowskin graafit* K_5 ja $K_{3,3}$, jotka ovat seuraavan kuvan mukaisia.



Kuva. Kuratowskin graafit K_5 ja $K_{3,3}$.

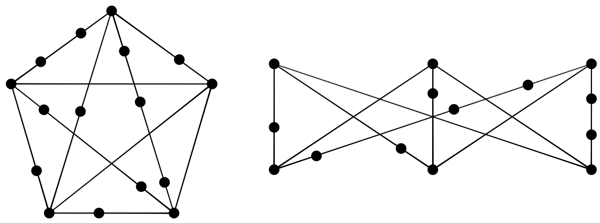
Nämä ovat ensimmäiset esimerkkimme graafeista, jotka eivät ole tasograafeja:

Lause. *Graafit K_5 ja $K_{3,3}$ eivät ole tasograafeja.*

Todistus. Graafille K_5 väite seuraa välittömästi siitä, että toisaalta sille $v = 5$ ja $e = 10$, ja toisaalta, jos se olisi tasograafi, niin aiemmin todistamamme lauseen nojalla olisi $e \leqslant 3v-6 = 15-6 = 9$, mikä ei tietenkään käy.

Graafille $K_{3,3}$ väite on hieman vaikeampi todistaa, mutta menee läpi ideoilla, jotka on jo yllä esitelty. Tehdään se vastaoletus, että $K_{3,3}$ olisi piirretty tasoon. Tällöin olisi $v = 6$ ja $e = 9$. Lisäksi Eulerin kaavan vuoksi olisi oltava $f = 2 - v + e = 5$. Jokainen alue koskettaa jotakin määrää särmiä; lasketaan nämä lukumäärät yhteen luvuksi N. Kuten aiemmin, on varmasti oltava $N = 2e$, eli $N = 18$. Toisaalta, on helppo vakuuttua siitä, että jokaista aluetta täytyy reunustaa ainakin neljä särmää (graafissa ei nimittäin ole kolmioita). Täten on oltava $N \geqslant 4f$, eli $N \geqslant 20$, mutta tämä on ristiriidassa edellisen lukua N koskevan ehdon kanssa. Täten $K_{3,3}$ ei voi olla tasograafi.

On myös selvää, että graafien K_5 ja $K_{3,3}$ *osaväleihinjaot*, jotka saadaan ottamalla toistuvasti jokin särmä ja korvaamalla se ketjulla kärkiä ja särmiä seuraavan kuvan mukaisesti, eivät myöskään ole tasograafeja.



Kuva. Graafien K_5 ja $K_{3,3}$ eräät osaväleihinjaot.

Yllättäen K_5 ja $K_{3,3}$ sekä niiden osaväleihinjaot ovat ainoat esteet graafin piirtämiselle tasoon:

Kuratowskin lause. *Graafin voi piirtää tasoon täsmälleen silloin, kun se ei sisällä kummankaan graafeista K_5 ja $K_{3,3}$ mitään osaväleihinjakoa.*

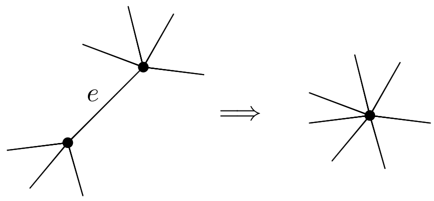
Tämän todistaminen on riittävän hankalaa, ettemme valitettavasti mitenkään voi sitä tässä tehdä.

Avoin tie. . .

Tietenkään tarina ei pääty tähän. Esimerkiksi tasograafeihin liittyen voi pyrkiä ymmärtämään tarkemmin graafien K_5 ja $K_{3,3}$ osaväleihinjaon sisältymistä. Pienenä esimerkkinä mainittakoon Maderin lause, jonka mukaan graafi, jolle pätee $v \geqslant 5$ ja $e > 3v - 6$, sisältää aina jonkin graafin K_5 osaväleihinjaon. Samoin voi tutkia graafien piirtämistä monimutkaisemmille pinnoille kuin tasoon, jolloin päädytään topologiseksi graafiteoriaksi kutsuttuun alaan.

Värityksistä on vielä paljon tutkimusta tehtävänä. Ehkäpä merkittävin avoin ongelma värityksiin liittyen on

Hadwigerin konjektuuri, joka tarjoaa erään mahdollisen syvällisen selityksen sille, miksi graafissa tarvitaan ainakin tietty määrä värejä kärkien värjäämiseen. Kutsutaan särmän *kontraktioksi* sellaista operaatiota, jossa särmä poistetaan, ja sen päätekärjet yhdistetään yhdeksi kärjeksi, jonka naapureina ovat samat kärjet kuin kahdella aiemmalla kärjellä:

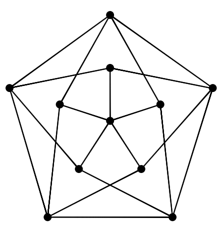


Hadwigerin konjektuuri sanoo, että yhtenäisen graafin kärkien värittäminen vaatii ainakin k väriä täsmälleen silloin, kun tekemällä sopivasti särmien kontraktioita sen voi muuttaa graafiksi K_k. Graafi K_k on se graafi, jolla on k kärkeä ja jossa kaikkia kärkipareja yhdistää särmä.

Hadwigerin konjektuuristakin toki tiedetään jo joitakin asioita. Esimerkiksi sen tiedetään pitävän paikkansa paitsi yhdelle, kahdelle ja kolmelle värille, jotka ovat helppoja tapauksia, myös neljälle, viidelle ja kuudelle värille. Itse asiassa Hadwigerin konjektuuri viidelle värille osoittautuu yhtäpitäväksi nelivärilauseen kanssa. Mainittakoon myös se yllättävä Robertsonin, Seymourin ja Thomasin tulos, että myös Hadwigerin konjektuuri kuudelle värille on yhtäpitävä nelivärilauseen kanssa.

Ongelmia pohdittavaksi

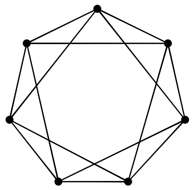
Ongelma 1. Onko Petersenin graafi tasograafi? Mikä on pienin määrä värejä, jolla Petersenin graafin kärjet voi värittää? Onko seuraava Grötzschin graafi tasograafi? Mikä on pienin määrä värejä, jolla Grötzschin graafin kärjet voi värittää?

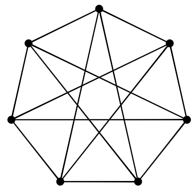


Kuva. Grötzschin graafi.

Ongelma 2. Miten yllä annettua viisivärilauseen todistusta voi yksinkertaistaa, jos halutaankin osoittaa vain se heikompi tulos, että tasograafin kärjet voi värjätä kuudella värillä?

Ongelma 3. Ovatko seuraavat graafit eri graafeja vai sama graafi?





Kirjallisuudesta

Johdatuksia graafiteoriaan on olemassa paljon. Eräs helppolukuinen sellainen on [2], jolle yllä esitelty viisivärilauseen todistuksen esittely on epäilemättä eniten velkaa. Yliopistollisempia esityksiä löytyy esimerkiksi teoksesta [3], josta löytyy esitys niin Kuratowskin lauseesta todistuksineen kuin monista monituisista muistakin aiheista, tai vaikkapa mainiosta pienestä vironkielisestä kirjasta [1]. Molemmat viimeksi mainitut olivat myös hyödyllisiä tätä artikkelia kirjoitettaessa.

Nelivärilauseen historiaa ja sen ympärillä käytyä keskustelua on valotettu muun muassa teoksen [4] luvussa 6 sekä laajassa väritysten matematiikkaan keskittyvässä teoksessa [7]. Molemmat kirjat ovat erittäin luettavia ja sisältävät mielenkiintoista materiaalia hyvin esitettynä. Vakavampi ja yksityiskohtaisempi matemaattinen nelivärilauseen ja sen historian esittely löytyy teoksesta [5].

Viitteet

[1] Buldas, A., P. Laud, ja J. Villemson: *Graafid*, Tartu Ülikool, 2003.

[2] Chartrand, G.: *Graphs as Mathematical Models*, Prindle, Weber & Schmidt, Inc., 1977.

[3] Diestel, R.: *Graph Theory*, Springer, 2000. Uusin painos löytyy sähköisessä muodossa Internetistä sivuilta `http://diestel-graph-theory.com`.

[4] Krantz, S.: *The Proof is in the Pudding: The Changing Nature of Mathematical Proof*, Springer, 2011.

[5] Saaty, T. L., ja P. C. Kainen: *The Four-Color Problem*, Dover Publications, 1986.

[6] Skiena, S. S.: *The Algorithm Design Manual*, Springer, 2008.

[7] Soifer, A.: *The Mathematical Coloring Book: Mathematics of Coloring and the Colorful Life of its Creators*, Springer, 2009.

[8] Steinberger, J. P.: *An unavoidable set of D-reducible configurations*, Trans. Amer. Math. Soc., 362 (2010), 6633–6661.