Differentiaaliyhtälöitä

Lehtori K.

Differentiaaliyhtälöt tulivat kouluopetukseen 1960-luvulla, kun differentiaalilaskentaa alkoi esiintyä ylioppilaskokeissa. Vaihtoehtoisina tehtävinä oli usein yhtälöitä. Oppikirjoissa niitä ei 60-luvulla ollut, mutta monissa lukioissa järjestettiin aiheesta erikoiskursseja ja kerhotoimintaa. Eturivin oppilaitoksissa vaikuttaneet opettajat julkaisivat kehittämiään kurssimateriaaleja kirjasina laajemmankin lukiolaisjoukon saataville. Tyypillisenä sisältönä oli ns. separoituvien yhtälöiden ratkaiseminen sekä vakiokertoimiset ensimmäisen ja toisen kertaluvun lineaariset yhtälöt. Lisäksi niissä mallinnettiin eräitä mekaniikan ja sähköopin ilmiöitä. Mainittujen yhtälöiden ratkaiseminen on varsin kaavamaista toimintaa, minkä lukiokurssit kohtuullisesti hallitseva pystyisi nykyisinkin helposti opiskelemaan itsenäisesti nettilähteistä, ks. esim. [6].

Suurena vaikuttimena tämän harrastuksen viriämiseen oli se, että teknilliseen korkeakouluun pyrittäessä oli osattava yhtälöiden alkeet – pääsykokeissa, ja ne olivat pakolliset, esiintyi differentiaaliyhtälöitä. Niihin valmistauduttaessa oli opiskeltava myös Väisälän vektorianalyysin [7] ensimmäinen luku, joka on sisällöltään hieman nykyistä lukion vektoriopin kurssia laajempi sisältäen mm. vektoritulon eräine fysikaalisine sovelluksineen.

Differentiaaliyhtälöt eivät kuulu lukion nykyiseen eivätkä tulevaankaan opetussuunnitelmaan, mutta eräitä yksinkertaisia yhtälöitä voi silti helposti ratkaista opetussuunnitelmiin sisältyvillä tiedoilla ja taidoilla. On vain yhdisteltävä eri kursseilla esiin tulevia asioita. Lehtori jätti edellisessä kirjoituksessaan [5] lukijan pohdittavaksi kolme tehtävää, jotka ratkaisemme seuraavassa yksinomaan lukion nykyistä oppimäärää soveltaen. Ensimmäisenä tehtävänä oli bakteeriviljelmän kasvun mallintaminen oletuksella, ettei kasvua rajoittavia esteitä ole. Bakteerit lisääntyvät jakautumalla kahtia, joten on järkevää olettaa, että pienessä aikavälissä tapahtuva lisäys on suoraan verrannollinen bakteerien määrään aikavälin alussa sekä tietenkin aikavälin pituuteen. Bakteerien lukumäärä ei ole jatkuva suure, mutta voimme silti laatia kasvua esittävän differentiaaliyhtälön tutkimalla lukumäärän sijasta kasvuston massaa. Olkoon se $m = m(t)$ hetkellä t sekä $m(0) = m_0 > 0$. Lisäksi on järkevää olettaa tunnetuksi viljelmän kahdentumisaika T, jonka kuluessa viljelmän koko tuplautuu; erityisesti $m(T) = 2m(0) = 2m_0$. Samalla tavalla kuin kirjoituksessa [5] päädymme yhtälöön

$$m'(t) = km(t)$$

alkuehdolla $m(0) = m_0$, missä vakio k on positiivinen verrannollisuuskerroin. Yhtälöstä nähdään, että m on aidosti kasvava, joten sillä on derivoituva käänteisfunktio $t = t(m)$. Käänteisfunktion derivoimissääntöä soveltaen saamme yhtälön

$$t'(m) = \frac{1}{km},$$

josta integroimalla seuraa

$$t(m) = \frac{1}{k} \ln m + d.$$

Ehdosta $m(0) = m_0$ saadaan $t(m_0) = 0$, joten integroimisvakioksi tulee

$$d = -\frac{1}{k}\ln m_0,$$

ja

$$t(m) = t = \frac{1}{k}\ln m - \frac{1}{k}\ln m_0 = \frac{1}{k}\ln\Big(\frac{m}{m_0}\Big).$$

Täten

$$m(t) = m_0 \mathrm{e}^{kt}.$$

Verrannollisuuskerroin k eliminoituu kahdentumisajan T avulla, minkä aktiivinen lukiolainen todetkoon nähtyään ensin tämän tehtävän vaihtoehtoisen ratkaisun. Voimme nimittäin lähes samalla tavalla johtaa ongelmasta *differenssiyhtälön*. Olkoon $N = N(t)$ bakteerien lukumäärä hetkellä t. Aika t oletetaan diskreetiksi muuttujaksi, joka saa arvoja $t = 0, 1, 2, \ldots$. Valitaan aikayksikkö pieneksi kahdentumisaikaan verrattuna. Verrannollisuutta soveltaen lukumäärän muutos aikavälissä $[t-1, t]$

$$N(t) - N(t-1) = k \cdot N(t-1) \cdot 1,$$

joten

$$N(t) = (1+k)N(t-1), \quad N(0) = N_0.$$

Saadun rekursiokaavan avulla nähdään välittömästi, että

$$N(t) = (1+k)^t N(0) = (1+k)^t N_0.$$

Kahdentumisajan avulla saamme edelleen

$$(1+k)^T N_0 = 2N_0,$$

mistä seuraa

$$(1+k) = 2^{1/T} \quad \text{ja} \quad N(t) = N_0\, 2^{t/T}.$$

Eliminoimalla verrannollisuuskerroin k kahdentumisajan T avulla nähdään, että ratkaisut

$$m(t) = m_0 \mathrm{e}^{kt} \quad \text{ja} \quad N(t) = N_0\, 2^{t/T}$$

ovat samat.

Toisena tehtävänä oli yhtälön

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 + y^2$$

ratkaiseminen alkuehdolla $y(0) = 1$. Trigonometrian kurssilta muistuu mieleen tangenttifunktion derivaatta, mutta käsittelemme tehtävän kuitenkin kirjoituksessa [5] esitetyn Lindelöf-sitaatin mukaisesti. Koska $y'(x) = 1 + y^2 \geq 1 > 0$, on ratkaisufunktio $y = y(x)$ aidosti kasvava, joten sillä on (derivoituva) käänteisfunktio $x = x(y)$. Käänteisfunktion derivoimissäännön mukaan

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = x'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Integroimalla saamme

$$x = x(y) = -d + \arctan y,$$

josta edelleen

$$y = y(x) = \tan(x + d).$$

Koska $y(0) = 1$, on $\tan d = 1$, mistä seuraa, että

$$d = \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ratkaisufunktioita on siis ääretön määrä,

$$y(x) = \tan\Big(x + \frac{\pi}{4} + n\pi\Big), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Kolmas kysymys oli ylioppilaskokeessa syksyllä 1967. Siinä pyydetään ratkaisemaan differentiaaliyhtälö

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos(x + y)$$

valitsemalla $x + y$ apumuuttujaksi. Ohjeen mukaan merkitsemme

$$z(x) = x + y(x),$$

jolloin

$$z'(x) = 1 + y'(x).$$

Tällä sijoituksella yhtälö tulee muotoon

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 1 + \cos z = 2\cos^2\frac{z}{2}.$$

Turvaudumme taas Lindelöfin [1] neuvoon. Jos

$$\frac{z}{2} \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

eli

$$y \neq -x + (1+2n)\pi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

niin funktiolla $z = z(x)$ on derivoituva käänteisfunktio $x = x(z)$, joka saadaan integroimalla yhtälöstä

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{2\cos^2\frac{z}{2}}.$$

Tulos on

$$x = -d + \tan\frac{z}{2} = -d + \tan\Big(\frac{z}{2} - n\pi\Big),$$

josta seuraa

$$\frac{z}{2} - n\pi = \arctan(x + d),$$

ja edelleen

$$y = -x + 2n\pi + 2\arctan(x + d),$$

missä $n \in \mathbb{Z}$ ja $d \in \mathbb{R}$. Tämä on yhtälön ratkaisu siinä tapauksessa, että

$$y \neq -x + (1+2n)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Entä jos

$$y = -x + (1 + 2n)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}?$$

Tällöin yhtälön $y'(x) = \cos(x + y)$ vasen puoli on -1 ja myös oikea puoli on -1, joten yhtälö toteutuu. Siis myös suoraparvi $y = -x + (1 + 2n)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ toteuttaa yhtälön. Ratkaisu koostuu siis kokonaisuudessaan kahdesta käyräparvesta

$$\begin{cases} y = -x + (1 + 2n)\pi, \\ y = -x + 2n\pi + 2\arctan(x + d), \end{cases}$$

missä $n \in \mathbb{Z}$ ja $d \in \mathbb{R}$. Helposti nähdään, että ylemmän parven suorat ovat alemman parven käyrien asymptootteja. Lisäksi alemman parven käyrät lähestyvät suoraparven suoria, kun $d \to \infty$ tai $d \to -\infty$.

1970-luvulla harrastettu, paljon parjattu uusi matematiikka toi koulumatematiikkaan monen murheen vastapainoksi myös tietynlaisen tarkkuuden. Yhtälöiden ja juurien määrittelyehtoja ja nimittäjien nollakohtia tutkittiin tarkemmin senkin jälkeen, kun joukko-opista oli suurelta osin luovuttu. Vielä 60-luvulla näihin asioihin ei koulumatematiikassa juuri kiinnitetty huomiota, ja niinpä esimerkiksi yo-tehtäväkokoelmassa [3] ja kirjasessa [4] ei tämän tehtävän yhteydessä huomata ollenkaan suoraparviratkaisua. Kokoelmassa [3] tehtävän ratkaisu on lähes täysin virheellinen ja [4] jättää käsittelyn vajaaksi ilmoittaen käyräparviratkaisun ainoastaan implisiittisesti.

Suomen matemaattisen yhdistyksen nettisivulta [8] löytyy lähes kaikki ylioppilastehtävät. Differentiaaliyhtälöistä kiinnostuneelle lukijalle lehtori suosittelee kevään 1999 tehtävää n:o 9b.

Kirjallisuutta

[1] E. Lindelöf, *Differentiali- ja integralilasku ja sen sovellutukset III. Ensimmäinen osa. Tavalliset differentialiyhtälöt.* Mercatorin kirjapaino oy, 1935.

[2] Y. Juve ja V. Lyytikäinen, *Differentiaaliyhtälöiden alkeet.* Kirjayhtymä, 1971.

[3] E. Kannisto, Y. Metsänkylä, *Matemaattiset tehtävät ylioppilastutkinnossa vuosina 1944–1968*, kahdeskymmenesseitsemäs painos, Gummerus osakeyhtiö, 1968.

[4] A. Kantanen, *Differentiaaliyhtälöiden harjoitus-esimerkkejä lukiota varten*, Otava 1968.

[5] `http://matematiikkalehtisolmu.fi/2016/1/lehtori_K_4.pdf`

[6] `https://matta.hut.fi/matta2/etc/vakkrtdy.html`

[7] K. Väisälä, *Vektorianalyysi.* 3. p. WSOY, 1961.

[8] `http://matemaattinenyhdistys.fi/yo/`

Verkko-Solmun oppimateriaalit

Osoitteesta `matematiikkalehtisolmu.fi/oppimateriaalit.html` löytyvät oppimateriaalit:

Ensiaskeleet Einsteinin avaruusaikaan, osa 1: Kinematiikka: aika, paikka ja liike (Teuvo Laurinolli)

Ensiaskeleet Einsteinin avaruusaikaan, osa 2: Dynamiikka: liikelait, liikemäärä ja energia (Teuvo Laurinolli)

Kilpailumatematiikan opas (Matti Lehtinen)

Geometrian perusteita (Matti Lehtinen)

Geometria (K. Väisälä)

Lukualueiden laajentamisesta (Tuomas Korppi)

Jaksolliset desimaaliesitykset algebrallisesta näkökulmasta (Jaska Poranen ja Pentti Haukkanen)

Algebra (Tauno Metsänkylä ja Marjatta Näätänen)

Algebra (K. Väisälä)

Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 1: Mekaniikkaa (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)

Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 2: Sähköoppia (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)

Lukuteorian helmiä lukiolaisille (Jukka Pihko)

Matematiikan peruskäsitteiden historia (Erkki Luoma-aho)

Matematiikan historia (Matti Lehtinen)

Reaalianalyysiä englanniksi (William Trench)