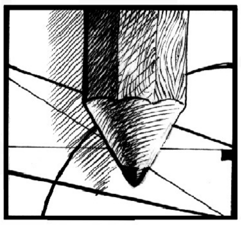

Kaksi kosinilauseen 3d-versiota

Juhani Fiskaali [1]

Kevään 2016 ylioppilaskirjoitusten matematiikan kokeessa tehtävänä oli todistaa suorakulmaista tetraedria koskeva 3d-Pythagoraan lause $A^2 + B^2 + C^2 = D^2$, missä A, B ja C ovat tetraedrin suorakulmaisten sivutahkojen pinta-alat ja D neljännen sivutahkon pinta-ala. Tavallisen Pythagoraan lauseen $a^2 + b^2 = c^2$ yleistys on kosinilause $a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2$. On luontevaa kysyä 3d-Pythagoraan lauseen yleistystä, 3d-kosinilausetta (3d viittaa kolmiulotteiseen avaruuteen).

Tarkastellaan seuraavassa kahta eri 3d-versiota. Ensimmäisessä lauseessa ”kosinitermi” ilmoitetaan sivusärmien ja niiden välisten kulmien avulla. Näin saadaan kaava (1). Toisen kosinilauseen ”kosinitermi” ilmaistaan sivutahkojen alojen ja tahkojen välisten diedrikulmien avulla. Näin saadaan 3d-kaava (2).

Käytetään seuraavia merkintöjä. Tetraedrin kärjestä (origosta) lähtevien sivusärmien pituudet olkoot a, b ja c, ja olkoot γ, α ja β vastaavasti särmäparien (a, b), (b, c) ja (c, a) väliset kulmat. Olkoon edelleen C sen sivutahkon ala, missä sivutahkokolmion sivuina ovat a, b ja z (ja sivun z vastaisena kulmana γ). Vastaavasti A olkoon sen sivutahkon ala, missä tahkokolmion sivuina ovat b, c ja x (ja sivun x vastaisena kulmana α), ja B olkoon sen sivutahkon ala, missä tahkokolmion sivuina ovat c, a ja y (ja sivun y vastaisena kulmana β). Ja lopulta, olkoon D sen sivutahkokolmion ala, missä kolmion sivut ovat x, y ja z.

Kaavan (1) todistamisessa käytetään tavallista kosinilausetta ja Heronin kaavaa. Ensiksikin, kolmen ensimmäisen sivutahkon alat ovat $A = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, $B = \frac{1}{2}ca\sin\beta$ ja $C = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Edelleen, tavallisen kosinilauseen mukaan on

$$\begin{cases} z^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma, \\ y^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta, \\ x^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \end{cases}$$

Alan D laskemiseksi on tässä luontevaa käyttää Heronin kaavaa muodossa

$$D = \frac{1}{4}\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^4 + y^4 + z^4)},$$

jolloin sievennettäväksi jää lauseke

$$D^2 = \frac{1}{16}(x^2 + y^2 + z^2)^2 - \frac{1}{8}(x^4 + y^4 + z^4).$$

Huolellinen suoraviivainen sievennys tuottaa ensimmäisen 3d-kosinilauseen

$$\begin{aligned} D^2 = A^2 + B^2 + C^2 - \frac{1}{2}abc\big[&a(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma) \\ &+ b(\cos\beta - \cos\gamma\cos\alpha) + c(\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta)\big]. \qquad (1) \end{aligned}$$

Jos tässä $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, saadaan 3d-Pythagoraan lause $D^2 = A^2 + B^2 + C^2$. Säännöllisen tedraedrin tapauksessa, kun $a = b = c = s$ ja $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$, saadaan

$$D^2 = 3 \times \frac{3s^4}{16} - \frac{s^4}{2}\left[3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\right] = \frac{3s^4}{16}.$$

[1] Kirjoittaja on Oulun lyseon eläkkeellä oleva matematiikan opettaja.

Tämä on sopusoinnussa sen kanssa, että säännöllisen tetraedrin sivutahkon ala on

$$\frac{s^2\sqrt{3}}{4}.$$

Sitten toiseen 3d-kosinilauseeseen. Edellisten merkintöjen lisäksi merkitkööt $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ tetraedrin kärjestä lähteviä paikkavektoreita, joiden pituudet ovat vastaavasti a, b ja c. Olkoon sivutahkojen C ja A välinen diedrikulma $\hat{B}$ (leikkaussärmänä b). Vastaavasti sivutahkojen A ja B diedrikulma olkoon $\hat{\Gamma}$ (leikkaussärmänä c) ja tahkojen B ja C välinen diedrikulma $\hat{A}$ (leikkaussärmänä a). Toisaalta diedrikulmat ovat sivutahkojen normaalien välisiä kulmia. Tarkastellaan aluksi tahkojen C ja A välistä diedrikulmaa. Näiden tahkojen normaalien suunnat ovat ristitulovektorit $\vec{a}\times\vec{b}$ ja $\vec{b}\times\vec{c}$, jolloin tahkojen C ja A välisen diedrikulman kosini on

$$\cos\hat{B} = \frac{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}{|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{b}\times\vec{c}|}.$$

Tässä nimittäjänä on ristitulojen pinta-alamerkityksen mukaisesti $4CA$. Osoittaja puolestaan sievenee skalaarikolmitulon pisteen ja ristin vaihdannaisuuden ja ristitulon kehityskaavan mukaan seuraavasti:

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) &= \vec{a}\cdot\left[\vec{b}\times(\vec{b}\times\vec{c})\right]\\ &= \vec{a}\cdot\left[(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{b})\vec{c}\right]\\ &= (\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{b})-(\vec{b}\cdot\vec{b})(\vec{a}\cdot\vec{c})\\ &= (bc\cos\alpha)(ab\cos\gamma)-b^2ac\cos\beta\\ &= -ab^2c(\cos\beta-\cos\gamma\cos\alpha).\end{aligned}$$

Näin ollen lauseen (1) kosinitermin yhteenlaskettava $-\frac{1}{2}ab^2c(\cos\beta-\cos\gamma\cos\alpha)$ on sama kuin $-2AC\cos\hat{B}$. Vastaavasti lauseen (1) kaksi muuta yhteenlaskettavaa ovat $-2CB\cos\hat{A}$ ja $-2AB\cos\hat{\Gamma}$. Siten 3d-kosinilause saa muodon

$$\begin{aligned}D^2 &= A^2+B^2+C^2\\ &\quad -2\left[AB\cos\hat{\Gamma}+BC\cos\hat{A}+CA\cos\hat{B}\right], \qquad (2)\end{aligned}$$

missä ”kosinitermi” riippuu sivutahkojen aloista ja vastaavien sivutahkojen välisistä diedrikulmista. Tässä kaavassa havaitaan enemmän analogiaa 2d-kosinilauseeseen kuin esityksessä (1). Kaava (2) on kirjallisuudesta varsin tuttu, mutta kaavaa (1) en ole sattunut huomaamaan.

Kaksi uutta matematiikkadiplomia

Solmun matematiikkadiplomisivulle osoitteeseen

`matematiikkalehtisolmu.fi/diplomi.html`

on lisätty diplomit IX ja X elokuussa 2016. IX on peruskoulun lopun tasoa, sen tehtävillä voi valmistaa pohjaa lukiota varten. X on entinen IX lisättynä ensimmäisellä luvulla. Se sisältää materiaalia esim. lukion kerhoille, harrastajille ja erikoiskursseille. Nämä diplomit voi suorittaa myös osioittain, ks. niiden esipuheet.

Uusia ovat siis sekä diplomit IX ja X, niiden tehtävät ja ratkaisut.