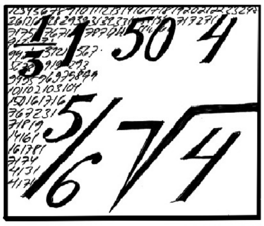

Juuson π-härveli

Markku Sointu
Soppeenharjun koulu

Nähtyään elokuvan ”Aku Ankka matematiikan maailmassa” Juuso kiinnostui π:n desimaaleista. Hän oli myös nähnyt asiaa koskevan julisteen. Eniten häntä kuitenkin kiinnosti, miten esitteeseen printattuja lukuja voisi laskea. Juuso salli itselleen vain tavallisen funktiolaskimen käytön.

Juuso tiesi, että

$$\tan\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \arctan 1 = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4},$$

joten

$$4\tan^{-1} 1 = \pi.$$

Derivointitaitoisena Juuso osasi laskea ja taulukkokirjasta löytyi helposti

$$\tan^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots \qquad (1)$$

Saadakseen luvun π desimaaleja oli laskettava

$$P(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots,$$

kun $x = 1$.

Lauseke $4P(x)$ lähestyi arvoa π, kun yhteen laskettavien määrää lisättiin. Juuso oivalsi melkein heti, että lähestyminen olisi hyvin hidasta:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.$$

Ottamalla summaan kymmenen ensimmäistä termiä saatiin

$$4\sum_{n=1}^{10} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \approx 3{,}041839619,$$

eli oltiin vielä kaukana luvusta π. Oikeita desimaaleja ei ollut vielä yhtään. Juuso asetti itselleen tavoitteen laatia $P_1(x)$ siten, että sen 5 ensimmäistä termiä takaisivat niin paljon π:n oikeita desimaaleja kuin tavallinen funktiolaskin pystyi näyttämään.

Juuson strategia oli selvä. Hän käyttäisi kaavaa

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}. \qquad (2)$$

Pelkän funktion $\tan x$ käyttäminen johti polynomiin

$$P(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

ja edellä nähtyihin ongelmiin, eli hitaaseen suppenemiseen.

Juuson tavoitteena oli kaava, joka olisi muotoa

$$4\left(m\tan^{-1}(x) - \tan^{-1}(y)\right) = \pi,\ m \in \mathbb{N},\ x, y \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

koska kaava $4\tan^{-1}(1) = \pi$ ei toiminut halutulla tavalla. Luku yksi oli yksinkertaisesti liian yksinkertainen. Tarvittiin kunnon ”härveli”, eli kaava (3). Ensin piti valita luku x. Juuso valitsi luvuksi $x = \frac{1}{10}$, koska hän ajatteli, että kymmenjärjestelmässä sillä laskemalla laskut voisivat olla mukavia tehdä.

Härveli alkoi muotoutua:

$$4\left(8\tan^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)-\tan^{-1}(y)\right)=\pi.$$

Käyttämällä kaavaa (2) saatiin yhtälö

$$\frac{\tan\left(8\tan^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)\right)-\tan\left(\tan^{-1}(y)\right)}{1+\tan\left(8\tan^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)\right)\tan\left(\tan^{-1}(y)\right)}=1,$$

josta tuli ratkaista luvun $x=\frac{1}{10}$ kaveri luku y murtolukuna.

Juuso oivalsi, että se olisi paljon helpompaa kuin miltä se näytti. Koska $\tan(x)$ ja $\tan^{-1}(x)$ olivat käänteisfunktioita, ne kumosivat toisensa:

$$\tan\left(\tan^{-1}(x)\right)=x.$$

Ainoan haasteen tarjosi, mitä on $\tan\left(8\tan^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)\right)$? Ensin piti selvittää $\tan\left(2\tan^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)\right)$ ja sitten $\tan\left(4\tan^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)\right)$:

$$\begin{aligned}
&\tan\left(2\tan^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)\right)\\
&=\frac{\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)\right)+\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)\right)}{1-\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)\right)\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)\right)}\\
&=\frac{2\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)\right)}{1-\tan^2\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)\right)}=\frac{2\cdot\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{100}}\\
&=\frac{1}{5}:\frac{99}{100}=\frac{20}{99},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tan\left(4\tan^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)\right)&=\frac{2\tan\left(2\tan^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)\right)}{1-\tan^2\left(2\tan^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)\right)}\\
&=2\cdot\frac{20}{99}:\left(1-\left(\frac{20}{99}\right)^2\right)\\
&=\frac{40}{99}:\left(1-\frac{400}{9801}\right)=\frac{40}{99}:\frac{9401}{9801}\\
&=\frac{392040}{930699}
\end{aligned}$$

ja näin ollen

$$\begin{aligned}
\tan\left(8\tan^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)\right)&=\frac{2\cdot 392040}{930699}:\left(1-\left(\frac{392040}{930699}\right)^2\right)\\
&=\frac{784080}{930699}:\frac{930699^2-392040^2}{930699^2}\\
&=\frac{784080}{930699}\cdot\frac{930699^2}{930699^2-392040^2}\\
&=\frac{74455920}{72697201}.
\end{aligned}$$

Juuso halusi ratkaista y:n yhtälöstä murtolukuna, siksi hän käytti murtolukua

$$\frac{\frac{74455920}{72697201}-y}{1+\frac{74455920}{72697201}y}=1.$$

Merkitsemällä ”murtoluku”$=D$, Juuso sai

$$\frac{D-y}{1+Dy}=1,$$

joten

$$\begin{aligned}
y&=\frac{D-1}{D+1}=\left(\frac{74455920}{72697201}-1\right):\left(\frac{74455920}{72697201}+1\right)\\
&=\frac{1758719}{147153121}.
\end{aligned}$$

y:n ratkeaminen oli juhlahetki, mutta vasta nyt päästiin asiaan. Juuso tiesi, että

$$4\left(8\tan^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1758719}{147153121}\right)\right)=\pi. \quad (4)$$

Juuso oli lähtenyt argumentista $\frac{1}{10}$. Hän ei todellakaan arvannut, että luvun $\frac{1}{10}$ kaveri olisi ylläesitetyn näköinen.

Mutta nyt ei surtu sitä. Juusolla oli kaavassa (4) kovan luokan työkalu. Siispä hän laski kaavalla (1)

$$\begin{aligned}
&32\tan^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)\\
&\approx 32\left(\frac{1}{10}-\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^3}{3}+\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^5}{5}-\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^7}{7}+\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^9}{9}\right)\\
&\approx 3{,}189396880.
\end{aligned}$$

Vastaavasti, joskin jonkin verran työläämmin

$$4\tan^{-1}\left(\frac{1758719}{147153121}\right)\approx 0{,}047804226.$$

Koska

$$\pi=4\left(8\tan^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1758719}{147153121}\right)\right),$$

saatiin luvulle π likiarvo

$$3{,}189396880-0{,}047804226=3{,}141592654.$$

Tulos näytti hyvältä. ”Juuson pii” tuotti viidellä termillä kahdeksan oikeaa desimaalia. Juuso tajusikin, että valinta $x=\frac{1}{10}$ oli ollut hyvä, sillä

$$\tan\left(8\tan^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)\right)\approx 1{,}024192389\approx 1,$$

eli jo arvo $8\tan^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)$ oli ollut lähellä luvun $\frac{\pi}{4}$ arvoa, ja luvun $\frac{1758719}{147153121}$ arcustangentin sarjakehitelmä olikin siis supennut nopeasti, koska luku $\frac{1758719}{147153121}$ on niin lähellä nollaa.

Arvio

$$4\tan^{-1}(1)\approx 3{,}33968$$

laskettuna viidellä termillä ei pärjännyt lainkaan, mutta senhän Juuso jo tiesi.

Kirjallisuudesta Juuso löysi kaavan

$$4\left(4\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)\right)=\pi.$$

Laskemalla tästä sai viidellä termillä

$$3{,}158328986-0{,}016736304=3{,}141592682,$$

eli seitsemän desimaalia oikein. Juuson härveli

$$4\left(8\tan^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1758719}{147153121}\right)\right)$$

ei ehkä ollut kaunis, mutta tehoa siitä löytyi, sillä se laski kahdeksan desimaalia oikein.

Solmun matematiikkadiplomit

Solmun matematiikkadiplomit I–X tehtävineen ovat tulostettavissa osoitteessa

`matematiikkalehtisolmu.fi/diplomi.html`

Alimmat tasot ovat koulun alkuun, ylimmissä riittää pohtimista lukiolaisillekin.

Opettajille lähetetään pyynnöstä vastaukset koulun sähköpostiin. Pyynnön voi lähettää osoitteeseen

juha piste ruokolainen at yahoo piste com

Ym. verkko-osoitteessa on diplomitehtäville oheislukemistoa, joka varmasti kiinnostaa muitakin kuin diplomien tekijöitä:

Kombinaatio-oppia
Lukujärjestelmistä
Desimaaliluvut, mitä ne oikeastaan ovat?
Murtolukujen laskutoimituksia
Negatiivisista luvuista
Hiukan osittelulaista
Lausekkeet, kaavat ja yhtälöt
Äärettömistä joukoista
Erkki Luoma-aho: Matematiikan peruskäsitteiden historia
Funktiosta
Gaussin jalanjäljissä
K. Väisälä: Algebra
Yläkoulun geometriaa
Geometrisen todistamisen harjoitus
K. Väisälä: Geometria
Lukuteorian diplomitehtävät