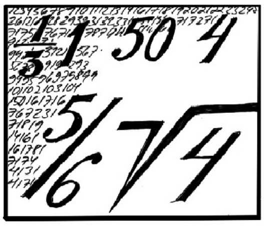

Juuso äärettömän äärellä

Markku Sointu
Soppeenharjun koulu

Solmu-lehdessä julkaistaan osia Tehtävä maassa -kirjan jatko-osasta. Ensimmäisessä osassa tutustutaan lukiolaispoika Juusoon, joka on saanut matematiikkakärpäsen pureman. Nyt hän opiskelee matematiikkaa yliopistossa. Tarina kertoo Juuson päässä liikkuvista ajatuksista hänen tutustuessaan matematiikan saloihin. Ideana on esittää ensin näitä ajatuksia, pohdintoja, esiin nousevia vaikeuksia ja erehdyksiäkin. Tämän jälkeen tiivistetään asia perinteisen matematiikan tavoin täsmällisiksi tuloksiksi.

Kirjoittaja on tietoinen esitystapaan liittyvistä riskeistä, mutta tietää myös, että pelkkien piinkovien tulosten vyöryttäminen voi olla hankalaa nieltävää. Jos ja kun pitkän pohdinnan tulokset pelkistyvät kaavoiksi, ilmenee lukijalla usein ymmärtämisvaikeuksia. Jos kerrotaan hieman, mitä kaavan kehittäjän tai siihen tutustuvan henkilön päässä liikkuu, voidaan ymmärtämistä pehmentää. Tietoa ei siis yritetä pelkästään takoa oppijan päähän.

”Mitä ikinä maailmankaikkeudessa onkaan, sitä on vähän, häviävän vähän”, oli lehtori Laulunen sanonut puhuessaan äärettömästä.

Potenssi 10^{100} oli helposti kirjoitettu ja sen ilmaisema luonnollinen luku riittäisi minkä tahansa luonnossa olevan asian ilmaisemiseen. Lukusuoralla sen etäisyys origosta ei olisi kuitenkaan juuri mitään verrattuna äärettömän ja nollan välimatkaan, jota ei ollut mielekästä pohtia. Ääretöntä ei siis kannattanut etsiä lukusuoran päistä. Se löytyi helpommin kaikkialta muualta. ”Esimerkiksi lukujen $\frac{1}{10}$ ja $\frac{1}{100}$ välissä oli ∞ monta reaalilukua”, oli Laulunen jatkanut unettavalla äänellään.

Juuso oli saanut ensikosketuksen äärettömään luvun $\frac{1}{3}$ yhteydessä:

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$$

tai ainakin näytti olevan, jos jakoi lukua yksi luvulla kolme jakokulmassa.

Juuso ei tiennyt, riittikö jakokulmatarkastelu. Siksi hän asetti

$$\begin{aligned} x &= 0{,}999\ldots \\ 10x &= 9{,}999\ldots \\ 9x &= 9 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Eli $0{,}999\ldots$ oli kiistatta 1.

Näin ollen

$$\frac{0{,}999\ldots}{3} = 0{,}333\cdots = \frac{1}{3}.$$

Jo tästä pienestä esimerkistä selvisi jotain äärettömän luonteesta:

$$1 = 0{,}999\ldots$$

Jos halusi vakuuttua, että kaksi lukua olisivat yhtäsuuria, kannatti tutkia niiden erotusta:

$$\begin{array}{r} 1{,}000\ldots \\ -0{,}999\ldots \\ \hline 0{,}000\ldots \end{array}$$

näytti olevan nolla. Jos erotus olisi 0,00...01, olisi 0,999...9 päättyvä, mitä se ei ollut.

Päättymättömyys desimaaliesityksessä olisi välttämätöntä ja hyödyllistä.

Seuraavaksi Juuso alkoi pohtia, mitä tapahtuisi, jos summassa olisi termejä loputtomasti:

$$S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$$
$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$
$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

Summan S_1 arvo oli ongelmallinen. Riippuen siitä mistä kohtaa summan katkaisi, arvo oli välillä yksi, välillä nolla. Summan katkaisu ei kuitenkaan ollut luvallista, joten summasta ei voinut sanoa oikein mitään.

$$\begin{aligned}S_2 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)\\ &+ \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \cdots\\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)\\ &+ \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) + \cdots\\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots\end{aligned}$$

Sarjan S_2 arvo kasvoi ja kasvoi. Sille ei voinut asettaa ylärajaa.

S_3 oli helpoin. Olihan se geometrinen (vieläpä suppeneva):

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Tämä tarkoitti sitä, että termien määrän kasvaessa summa läheni arvoa kaksi. Valittiinpa ensin miten pieni luku ε tahansa, summa saatiin poikkeamaan arvosta kaksi vähemmän kuin valittu ε, kun vain lisättiin yhteenlaskettavia. Sarja S_3 oli suppeneva.

Sarja S_2 hajaantui ja se oli lisäksi ylhäältä rajoittamaton. Sarja S_1 oli toki hajaantuva, koska se ei ollut suppeneva. Se ei kuitenkaan ollut ylhäältä rajoittamaton. Sen arvo ei koskaan ylittäisi lukua yksi.

$1-1+1-1+\cdots$ näytti olevan pysäytyskohdasta riippuen nolla tai yksi. Mutta pysäyttäminen oli kiellettyä!

Entä jos ajatteli

$$S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots = \frac{1}{2}?$$

(Näinhän Eulerkin teki.)

Ajatus oli outo. Tuntui siltä, kuin sanotaan vaikka fyysikot järjestäisivät vuorovuosina tapaamisen Espoossa ja Vantaalla, mutta ilmoittaisivat aina pitopaikaksi Helsingin.

Seuraava summa oli

$$S_4 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots$$

Koska sekin oli päättymätön, sitä saattoi tarkastella (vaarallisella tavalla):

$$\begin{array}{rl} S_4 = & 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots \\ S_4 = & \quad\;\; 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots \\ \hline 2S_4 = & 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \end{array}$$

Näin saatiin $2S_4$ näyttämään sarjalta $1-1+1-1+\cdots$, vaikka tiedettiin summassa olevan muutakin:

$$\begin{array}{rl} & 1 - 2 + 3 - 4 + 5 \\ + & \quad\;\; 1 - 2 + 3 - 4 + 5 \\ \hline & 1 - 1 + 1 - 1 + 1 + 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 \\ + & \quad\;\; 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 \\ \hline & 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 - 6 \end{array}$$

Päättymättömyys esti kuitenkin viiden ja luvun -6 tai minkä tahansa muun kuin lukujen -1 ja yksi ilmaantumisen lausekkeeseen. Jos $2S_4 = \frac{1}{2}$, niin $S_4 = \frac{1}{4}$. Merkitsemällä

$$S_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots$$

saatiin

$$\begin{aligned}S_5 - S_4 &= (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots) -\\ &\quad (1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots)\\ &= 4 + 8 + 12 + \cdots = 4\,(1 + 2 + 3 + \cdots)\,.\end{aligned}$$

Jos $S_4 = \frac{1}{4}$, niin $S_5 - S_4 = 4S_5$, joten $-3s_5 = \frac{1}{4}$, eli $S_5 = -\frac{1}{12}$.

Juuso ei tiennyt, pitäisikö itkeä vai nauraa. Hän oli juuri ”todistanut”:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots = -\frac{1}{12}.$$

Todistus näytti ”oikealta”, mutta se meni yli ymmärryksen (mutta niin meni ∞-käsitekin). Summia ei olisi saanut manipuloida ja uudelleenjärjestellä niin kuin Juuso oli tehnyt. Päättymättömyys menetti taikavoimansa, jos se päättyisi.

Oli miten oli, luonnollisten lukujen summa ei ollut $-\frac{1}{12}$.

Juuso palasi summaan

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1 - 2^{-1} + 4^{-1} + 8^{-1} + \cdots.$$

Sarja S_3 oli selvä. Se ei temppuillut, vaan se oli immuuni katkaisulle. Siirtämällä katkaisukohtaa oikealle arvot lähenivät siististi lukua kaksi.

$$\begin{aligned}S_2 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots\\ &= 1 + 2^{-1} + 3^{-1} + 4^{-1} + 5^{-1} + \cdots\end{aligned}$$

kasvoi yli kaikkien rajojen, kuten todettiin.

Epäilyttävästi kuitenkin

$$S_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots = -\frac{1}{12}.$$

”Kun haluat kaavoihin selkeyttä, käytä kompleksilukuja”, oli Laulunen todennut. ”Aina ei voi olla tiedon valtavirran äärellä, joskus ja useinkin tieto koostuu pienistä puroista.” Juuso muisteli Laulusen sanoja.

Tosiaankin Juuso muisti matematiikan luokan seinältä Riemannin hypoteesin. Siinähän tutkittiin sarjaa

$$S_6 = 1 + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} + 5^{-s} + \cdots,$$

mutta nyt s ei ollut -1 vaan $s = a + ib$, missä a ja b olivat reaalilukuja ja i imaginaariyksikkö. Tulos $S_5 = -\frac{1}{12}$ sisälsi sen verran outoja asioita, että Juuso jätti sen rauhaan. Kompleksiluvuilla oli verrattomia ominaisuuksia. Jos tyytyi reaalilukuihin, yhtälöt

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

ja

$$x^2 + 2x + 3 = 0$$

lensivät samaan romukoppaan, jossa luki ”ei ratkaisuja”, mutta kompleksiluvuilla saatiin siistit ratkaisut

$$-1 \pm i$$

ja

$$-1 \pm \sqrt{2}i.$$

Myös sarja S_6 saattoi saada arvon nolla.

Riemannin kuuluisassa hypoteesissa arveltiin, että funktion, ns. Riemannin zeta-funktion, jonka sarja määritteli, ei-triviaalien nollakohtien reaaliosa olisi aina 1/2. Juuso oli tutkinut Riemannin zeta-funktiota vain sen verran, että oli löytänyt sille muutamia nollakohtia käyttämällä netistä löytämiään integraaliesityksiä

$$S_6 = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + 2\int_0^\infty \frac{\sin(s\tan^{-1} t)dt}{(1+t^2)^{s/2}(e^{2\pi t}-1)} = S_6(s)$$

zeta-funktiolle. Nyt hän oivalsi, että asettamalla $s = -1$ saatiin $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$ eli luonnollisten lukujen summa. Niin hienoa kuin niiden löytäminen olikin, sitä ei voinut verrata tyrmistykseen, jonka Juuso koki huomatessaan, että netin integraalikaavat antoivat zetalle arvoksi $-\frac{1}{12}$ pisteessä $s = -1$!

Laulunen oli ollut oikeassa: tieto koostui pienistä puroista. Pelkkä Riemannin zetan tutkiminen ei ollut johtanut Juuson kohdalla juuri mihinkään. Samoin summamanipulaatiot saattoivat olla hauskojakin, mutta eivät olisi johtaneet sen pitemmälle ilman integraalienkin laskemaa arvoa $-1/12$. Juuso kaivoi siis esiin tutkielmansa Riemannin zeta-funktiosta. (Niistä kerromme Solmun seuraavassa numerossa).

Solmun matematiikkadiplomit

Solmun matematiikkadiplomit I–X tehtävineen ovat tulostettavissa osoitteessa

`http://matematiikkalehtisolmu.fi/diplomi.html`

Alimmat tasot ovat koulun alkuun, ylimmissä riittää pohtimista lukiolaisillekin.

Opettajille lähetetään pyynnöstä vastaukset koulun sähköpostiin. Pyynnön voi lähettää osoitteeseen

juha piste ruokolainen at yahoo piste com