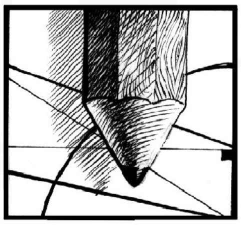


Yläkoulun matematiikkaa

Lehtori K.

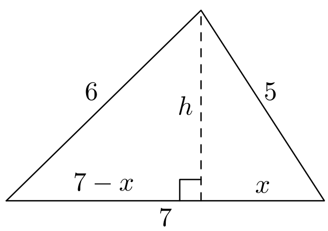
Lehtori on jo vuosia ollut huolestunut yläkoulun matematiikan opetuksen tilasta. Käsitteellisempi ajattelu ei ota kehittyäkseen, jos tehtävät ovat pääasiassa desimaalilukujen sijoittamista perusteluitta annettuihin laskukaavoihin. Mikä neuvoksi? Lehtorin mielestä ainoa keino olisi *syventää* opetuksessa esillä olevia asioita. Otetaanpa esimerkki. Pythagoraan lause kuuluu yläkoulun oppimäärään, mutta valitettavasti sitä enimmäkseen sovelletaan ainoastaan perustapauksissa. Jääpä lause useimmiten perustelemattakin, vaikka esimerkiksi nettisivulla [1] olisi tarjolla 118 erilaista todistusta kyseiselle lauseelle. Niin tai näin, kun tämän aihepiirin perustehtävät on suoritettu, voisi syventävänä oppina olla kolmion pinta-alan laskeminen sivujen avulla. Tavoitteena on siis saada aikaan kaava, jonka avulla voi laskea kolmion pinta-alan kun sivujen pituudet tunnetaan. Sen johtamisessa tarvitaan mm. muistikaavoja

$$(\Box \pm \triangle)^2 = \Box^2 \pm 2\,\Box\triangle + \triangle^2 \quad \text{ja}$$

$$\Box^2 - \triangle^2 = (\Box - \triangle)(\Box + \triangle).$$

Niihin voi perehtyä Solmun diplomitehtävissä [2]. Opetuksessa ne olisi hyvä perustella osittelu- ja vaihdantalakien avulla.

Käsitellään aluksi numeerinen tapaus; olkoot sivujen pituudet 5, 6 ja 7 pituusyksikköä. Niistä todella muodostuu kolmio, sillä jokainen pituus on pienempi kuin kahden muun summa. Kolmio ei ole suorakulmainen, sillä Pythagoraan yhtälö ei toteudu. Pinta-alan laskemisessa tarvitaan kanta ja korkeus. Valitaan pisin sivu kannaksi ja merkitään sitä vastaavan korkeusjanan pituudeksi h. Jaetaan kantasivu osiin x ja $7-x$ kuviossa



näkyvällä tavalla. Nyt Pythagoraan lausetta voi käyttää: saamme

$$5^2 - x^2 = h^2 = 6^2 - (7-x)^2,$$

ja edelleen

$$25 - x^2 = 36 - 49 + 14x - x^2,$$

mistä seuraa

$$x = \frac{38}{14} = \frac{19}{7}.$$

Korkeusjanan neliö

$$h^2 = 25 - x^2 = 25 - \frac{361}{49} = \frac{864}{49},$$

joten

$$h = \sqrt{\frac{864}{49}} = \frac{12}{7}\sqrt{6},$$

ja pinta-ala

$$A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \frac{12}{7}\sqrt{6} = 6\sqrt{6}.$$

Yleinen tapaus ratkeaa samalla tavalla. Olkoot sivujen pituudet a, b ja c. Niiden on toteutettava ehdot

$$a < b + c, \quad b < c + a \quad \text{ja} \quad c < a + b, \tag{1}$$

jotta kyseessä todella olisi kolmio. Kolmion pinta-ala ja muoto määräytyvät yksikäsitteisesti sivujen pituuksista (yhtenevyyslause sss), joten pinta-alaksi saatava lauseke tulee olemaan symmetrinen sivujen pituuksien suhteen. Se siis pysyy samana, vaikka mitkä tahansa kaksi luvuista a, b, c vaihtaisivat keskenään paikkaa. Voimme rajoituksetta olettaa, että kolmion pisimmän sivun pituus on c. Samalla tavalla kuin numeerisessa esimerkissämme saamme

$$a^2 - x^2 = h^2 = b^2 - (c - x)^2,$$

mistä seuraa

$$a^2 - x^2 = b^2 - (c - x)^2,$$

ja edelleen

$$x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}.$$

Korkeusjanan neliö

$$\begin{aligned}
h^2 &= a^2 - x^2 = a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}\right)^2 \\
&= \frac{4a^2c^2}{4c^2} - \frac{(a^2 - b^2 + c^2)^2}{4c^2} \\
&= \frac{(2ac)^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2}{4c^2} \\
&= \frac{(2ac - a^2 + b^2 - c^2)(2ac + a^2 - b^2 + c^2)}{4c^2} \\
&= \frac{\big(b^2 - (c - a)^2\big)\big((a + c)^2 - b^2\big)}{4c^2} \\
&= \frac{(b + c - a)(b - c + a)(a + c + b)(a + c - b)}{4c^2} \\
&= \frac{(a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)}{4c^2},
\end{aligned}$$

joten

$$h = \frac{\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)}}{2c},$$

ja pinta-ala

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \cdot c \cdot h \\
&= \frac{c}{2} \frac{\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)}}{2c} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)}.
\end{aligned}$$

Kaava on nyt lähes valmis. Huomaa, että juurrettava on positiivinen, koska ehto (1) on voimassa. Teemme vielä eräitä kosmeettisia sievennyksiä. Merkitsemällä

$$s = a + b + c,$$

saadaan

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{s(s - 2c)(s - 2a)(s - 2b)}.$$

Merkitsemällä vielä

$$p = \frac{s}{2} = \frac{a + b + c}{2},$$

saamme etsityn kaavan *lopulliseen* muotoon

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{4}\sqrt{s(s - 2c)(s - 2a)(s - 2b)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{2p(2p - 2a)(2p - 2b)(2p - 2c)} \\
&= \sqrt{\frac{2p(2p - 2a)(2p - 2b)(2p - 2c)}{16}} \\
&= \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.
\end{aligned}$$

Tämä *Heronin*[1] *kaava* johdetaan kirjoituksissa [3] ja [4] hieman lyhyemmin lukion trigonometriaan tukeutuen. Sovellamme sitä vielä alussa käsiteltyyn esimerkkiin. Sivujen pituudet olivat 5, 6 ja 7, joten $p = 9$ ja

$$A = \sqrt{9(9 - 5)(9 - 6)(9 - 7)} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 6\sqrt{6}.$$

Matematiikkaa on tämän kaavan johtaminen, laskentoa puolestaan sen soveltaminen yksittäisissä tapauksissa.

Viitteet

[1] `http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml`

[2] `http://matematiikkalehtisolmu.fi/2008/diplomi/diplomitehtavat8.pdf`

[3] Juhani Fiskaali, Heronin ja Brahmaguptan kaavoista, `http://matematiikkalehtisolmu.fi/2011/2/heron.pdf`

[4] Matti Lehtinen, Nimekästä geometriaa, `http://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/nimgeom.pdf`

[1] Heron Aleksandrialainen (10–75), egyptiläinen matemaatikko.