Vaihtosähköpiirien osoitinlaskenta kompleksiluvuilla

Vesa Linja-aho
autoelektroniikan lehtori, Metropolia-ammattikorkeakoulu
etunimi.sukunimi@metropolia.fi

Kompleksilukujen lyhyt historia lukiomatematiikassa

”Nykynuoret osaavat kompleksilukuja lukiosta tullessaan tosi huonosti, kun vertaa viime vuosikymmeneen”, totesi Teknillisen korkeakoulun teoreettisen sähkötekniikan professori **Martti Valtonen** kahvitauolla Teoreettisen sähkötekniikan laboratoriossa joskus vuoden 2006 tienoilla. Hänen ilmeensä oli pettynyt kertoessani, että kompleksilukuja ei enää käsitellä lukiomatematiikassa ollenkaan – nimittäin OPS-uudistus vuonna 2003 pudotti kompleksiluvut pois myös lukiomatematiikan syventävistä opinnoista.

Pakollisilta pitkän matematiikan kursseilta kompleksiluvut oli heitetty pois jo aiemmin – professorille tämäkin tuli uutena tietona. Eikä ihme: lukio-opettajia kouluttavissa yliopistoissa toki seurataan OPS-muutoksia tarkkaan (ja ollaan niissä mukana), mutta Teknillisestä korkeakoulusta moinen tietolinkki puuttuu. Enpä olisi minäkään uudistuksesta kuullut, ellen olisi opettanut teekkariyhdistyksen valmennuskurssilla ja abiturientit keskeyttäneet opetustani osittaisintegroinnista valistaen, että tämä ei enää kuulu heidän oppimääräänsä.

Koska muistikuvat voivat pettää, on parempi varmistaa asiat kirjallisista lähteistä. Vuoden 1985 opetussuunnitelman perusteissa kompleksiluvut, niiden määrittely ja laskutoimitukset, kompleksitaso sekä 2. asteen yhtälön yleinen ratkaisu kuuluivat pakollisen 10. kurssin oppimäärään, joskin ne oli merkitty tähdellä, eli ”ne on tarkoitus opetuksessa käsitellä, mutta aikaa voidaan tarvittaessa käyttää myös esimerkiksi perusasioiden harjoitteluun”.

Vuoden 1994 lukion opetussuunnitelmassa kompleksilukuja ei mainita suoraan, mutta oppikirjantekijät ovat ottaneet ne mukaan kurssiin MAA13 Analyysi. Opetussuunnitelman väljä määritelmä kurssilla käsiteltäviin asioihin mahdollisti tämän. Kompleksiluvuista on vuosina 1997–2005 ollut kysymys ylioppilaskirjoituksissa K1997, S1998, K2001, S2002 ja K2003.

Kirjahyllystä löytyvä, vuoden 1994 OPSia noudattava analyysin kirja Matematiikan taito 13 käsittelee kompleksilukuja 28 sivun verran. Tämä laajuus (hyvin omaksuttuna) riittäisi ihan hyvin yliopiston (ja ammattikorkeakoulun) vaihtosähköpiirien peruskurssille.

Kompleksilukujen pudottaminen lukion oppimäärästä on herättänyt kritiikkiä. Pitkän linjan matematiikan opettaja ja oppikirjailija **Markku Halmetoja** pitää kompleksilukujen poisjättöä vuonna 2003 suorastaan kulttuuriskandaalina. ”Suomen matemaattinen maine perustuu nimenomaan kompleksianalyysiin, ja nyt pitkän matematiikan ylioppilaat eivät edes tiedä, mikä on kompleksiluku”, Halmetoja kommentoi. Teoreettista sähkötekniikkaa sekä yliopistossa että ammattikorkeakoulussa opettaneena mielipiteeseen on helppo yhtyä. Itselle tutuin sovellus kompleksiluvuille on vaihtosähköpiirien osoitinlaskenta, mutta kompleksiluvut ovat tärkeää perusasiaa myös signaalinkäsittelyssä sekä säätötekniikassa. Muun muassa Solmu-lehden perustajiin kuuluva matematiikan dosentti, yliopistonlehtori **Kerkko Luosto** on väläyttänyt kompleksilukujen käyttöä lukion analyyttisen geometrian yhteyteen esitelmässään Näkökulmia matematiikan opetukseen[1]. Matemaatikot ja matematiikanopettajat ovat kaivanneet kompleksilukuja takaisin niin 2008 Solmun sivuilla julkaistussa OPS-kritiikissä[2] kuin vuonna 2015 julkaistussa OPS-ehdotuksessaan[3].

Jos lukion pitkä matematiikka ja fysiikka olisi mahdollista synkronoida, kompleksiluvuille olisi löytynyt näppärä sovellus vuoden 2003 ja 1994 OPSien fysiikan seiskakurssille vaihtosähköpiirien yhteyteen: usein epäselväksi jäävien impedanssikolmioiden sijaan vaihtosähköpiirien käsittelyyn olisi voinut ottaa kompleksiluvut avuksi. Vuoden 2015 opetussuunnitelman myötä impedanssikolmiot päätyvät historiaan nekin: fysiikan kurssimäärän supistuessa kahdeksasta seitsemään jotain oli jätettävä pois. Olin mukana fysiikan opetussuunnitelman perusteita valmistelleessa työryhmässä ja pääsyyllinen vaihtosähköpiirien poispudottamiseen. Pääperusteluni oli, että melko monimutkaisen aiheen pintaraapaiseminen – ilman oikeiden työkalujen eli kompleksilukujen käyttöä – on pois joltain hyödyllisemmältä ja sivistävämmältä. Lisäksi käytännön kokemuksen mukaan vaihtosähköpiirit usein käytiin lukiossa melko juoksuvauhdilla, koska FY7-kurssi oli ladattu jo ennestään ylitäyteen teoreettisesti hankalaa asiaa.

Omissa lukio-opinnoissani kompleksiluvuista kerrottiin pakollisilla kursseilla – olisiko ollut toisen asteen yhtälön ratkaisujen yhteydessä – että ”niille on löydetty hyödyllisiä sovelluksia esimerkiksi sähkötekniikassa”. Tämä jäi mieleen, koska harrastin elektroniikkarakentelua ja TKK:n sähköosastolle pyrkiminen oli mielessä jo ensimmäisenä lukiovuotena. Mitä nämä sovellukset ovat, selvisi Teknillisen korkeakoulun kurssilla Piirianalyysi 1 – ja teille toivottavasti tästä artikkelista.

Johdanto artikkeliin

Tässä artikkelissa esitetään kompleksilukujen ominaisuudet tiiviisti siinä laajuudessa kuin mitä niitä tarvitaan vaihtosähköpiirien osoitinlaskennassa ja sen jälkeen perehdytään vaihtosähköpiireihin ja osoitinlaskentaan kompleksiluvuilla.

Jos ja toivottavasti kun kompleksiluvut kiinnostavat enemmän, suosittelen tutustumaan **Matti Lehtisen** artikkeliin *Kaikki tarpeellinen kompleksiluvuista*[4] (Solmu 1/2006) tai **Jorma Merikosken** *Kompleksiluvuista ja kvaternioista*[5] (Solmu 3/2001).

Jos kompleksilukujen määritelmä vaikuttaa hankalalta, kannattaa lukea **Lauri Ajangin** artikkelin *Kompleksiluvut ja kolmannen asteen yhtälön ratkaisut*[6] johdanto-osa (Solmu 2/2013).

Kompleksiluvut

Lukiomatematiikassa esitellään lukualueet: on luonnolliset luvut, kokonaisluvut, rationaaliluvut ja reaaliluvut. Lukualuetta voidaan laajentaa vielä määrittelemällä *kompleksiluvut* reaalilukupareina seuraavasti:

$$z = (x,y)$$

Geometrisesti tulkittuna kompleksiluku z vastaa siis xy-tason pistettä. Kompleksiluvut ovat itse asiassa erittäin näppärä työkalu kaksiulotteiseen vektorilaskentaan ja analyyttiseen geometriaan – kuten aiemmin mainituissa OPS-kritiikeissä on esitettykin. Lukua x kutsutaan kompleksiluvun *reaaliosaksi* ja lukua y *imaginaariosaksi*. Kompleksilukujen yhteenlasku määritellään:

$$z_1 + z_2 = (x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

eli reaaliosat lasketaan yhteen, samoin imaginaariosat. Kertolasku määritellään seuraavasti:

$$z_1 z_2 = (x_1,y_1)(x_2,y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).$$

Tarkastellaan kompleksilukua (0,1): kertolaskun määritelmän mukaan korottamalla tämä luku toiseen potenssiin saadaan

$$(0,1)^2 = (0,1)(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0),$$

joka on tavallinen reaaliluku eli kompleksitason x-akselin (reaaliakselin) piste. Kutsutaan tätä lukua[7], joka toiseen korotettuna on reaaliluku -1, *imaginaariyksiköksi* i:

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

[1] http://www.helsinki.fi/~kluosto/esit/MAOL2002s/nkku.pdf, kalvo 26, lukemisen arvoinen muutenkin.

[2] http://matematiikkalehtisolmu.fi/2009/ma_ops.pdf

[3] http://matematiikkalehtisolmu.fi/2015/ma_ops_ehdotus_2016.pdf

[4] http://matematiikkalehtisolmu.fi/2006/1/lehtinen.pdf

[5] http://matematiikkalehtisolmu.fi/2001/3/merikoski/merikoski.pdf

[6] http://matematiikkalehtisolmu.fi/2013/2/kompleksiluvut.pdf

[7] Useissa (etenkin insinööri)matematiikan opetusmateriaaleissa kompleksilukuja lähestytään määrittelemällä ensin tämä imaginaariyksikkö ja ryhtymällä kylmästi laskemaan sen avulla. Tätä lähestymistapaa on kritisoinut mm. dosentti Heikki Apiola (ks. https://math.tkk.fi/opetus/p3/05/L/kompleksianalyysi_osa1.pdf), koska se mystifioi turhaan kompleksilukuja, tyyliin ”mikään luku korotettuna toiseen potenssiin ei voi olla negatiivinen, mutta mikään ei estä matemaatikkoa määrittelemästä niin”.

Tällöin kompleksiluku z voidaan esittää muodossa

$$z = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (y,0)(0,1) = x + y\mathrm{i},$$

jota kutsutaan *summamuodoksi.* Seuraavassa luvussa tutustutaan summamuodossa olevien kompleksilukujen peruslaskutoimituksiin.

Kompleksilukujen yhteen-, vähennys- ja kertolasku summamuodossa

Kompleksilukujen yhteen- ja vähennyslasku on yksinkertaista: imaginaariyksikköä käsitellään kuten mitä tahansa muuttujaa. Kun $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}$ ja $z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$, niin

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\mathrm{i}.$$

Esimerkiksi jos $z_1 = 3 + 4\mathrm{i}$ ja $z_2 = 1 + 2\mathrm{i}$, niin

$$z_1 + z_2 = 4 + 6\mathrm{i} \quad \text{ja} \quad z_1 - z_2 = 2 + 2\mathrm{i}.$$

Kertolasku on yhtä helppoa, kun muistetaan imaginaariyksikön määritelmä eli se, että $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (3 + 4\mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i}) \\ &= 3 + 6\mathrm{i} + 4\mathrm{i} + 8\mathrm{i}^2 \\ &= 3 + 10\mathrm{i} + 8(-1) \\ &= -5 + 10\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Tämä on yhtäpitävää edellisen luvun kertolaskun määritelmän kanssa, kuten tietysti pitääkin.

Kompleksilukujen jakolasku

Kompleksiluvun jakaminen reaaliluvulla ei myöskään sisällä mitään hankalaa, esimerkiksi

$$\frac{z_1}{2} = \frac{3 + 4\mathrm{i}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{4\mathrm{i}}{2} = \frac{3}{2} + 2\mathrm{i}.$$

Jos myös jakajana/nimittäjänä on kompleksiluku, kannattaa nimittäjä saattaa reaalimuotoon laventamalla nimittäjän *liittoluvulla.* Liittoluku eli *konjugaatti* saadaan yksinkertaisesti vaihtamalla kompleksiluvun imaginaariosan etumerkki – tätä toimenpidettä kutsutaan *konjugoinniksi* ja sen operaattori on *:

$$(x + y\mathrm{i})^* = x - y\mathrm{i}.$$

Kun kompleksiluku kerrotaan liittoluvullaan, saadaan aina reaaliluku:

$$z \cdot z^* = (x + y\mathrm{i})(x - y\mathrm{i}) = x^2 - xy\mathrm{i} + xy\mathrm{i} - (y\mathrm{i})^2 = x^2 + y^2.$$

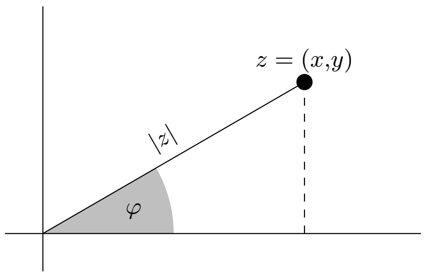
Nyt esimerkiksi:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{3 + 4\mathrm{i}}{1 + 2\mathrm{i}} \\ &= \frac{(3 + 4\mathrm{i})(1 - 2\mathrm{i})}{(1 + 2\mathrm{i})(1 - 2\mathrm{i})} \\ &= \frac{11 - 2\mathrm{i}}{1 + 4} \\ &= \frac{11}{5} - \frac{2}{5}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Kompleksiluvun kulmamuoto

Summamuotoisen esitystavan $z = x + y\mathrm{i}$ lisäksi kompleksilukuja voidaan käsitellä *kulmamuodossa.*

Kun kompleksilukua ajatellaan xy-tason pisteenä, se voidaan ilmoittaa myös napakoordinaatteina eli kertomalla pisteen etäisyys origosta sekä suuntakulma φ x-akseliin nähden:



Esimerkiksi kompleksiluvun $1 + \mathrm{i}$ etäisyys origosta on $\sqrt{2}$ ja suuntakulma $45°$, joka merkitään tavallisesti:

$$1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\angle 45°.$$

Pisteen etäisyyttä origosta kutsutaan kompleksiluvun *itseisarvoksi* eli *moduliksi* – mikä on loogista, tarkoittaahan reaaliluvunkin itseisarvo luvun etäisyyttä origosta lukusuoralla. Suuntakulmaa taas kutsutaan *argumentiksi.* Muunnos summa- ja kulmamuodon välillä onnistuu perustrigonometrialla ja Pythagoraan lauseella. Kulmamuodosta summamuotoon siirtyminen on yksiselitteistä: kulmamuodossa $|z|\angle\varphi$ oleva kompleksiluku saadaan summamuotoon $x + \mathrm{i}y$ laskemalla kertoimet

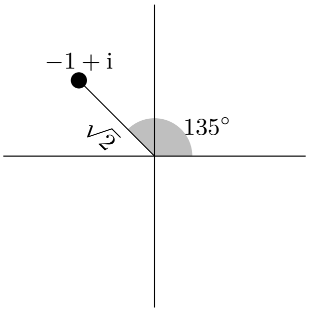
$$x = |z| \cos\varphi \quad y = |z| \sin\varphi.$$

Toiseen suuntaan muunnettaessa

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

on oltava laskimen käytössä tarkkana kulmaa laskettaessa, koska esimerkiksi laskin palauttaa arkustangentin aina koordinaatiston oikeaan puolitasoon. Esimerkiksi kompleksiluvun $-1 + \mathrm{i}$ kulmaksi huolimaton laskimenkäyttäjä[8] saa $\arctan\frac{1}{-1} = -45°$, vaikka piste sijaitsee koordinaatiston toisessa neljänneksessä:

[8] Tämä oli ja on tavallinen virhe tenteissä niin TKK:lla kuin Metropoliassakin.



ja kulma on oikeasti $180° - 45° = 135°$.[9]

Kulmamuotoon liittyy eräs kätevä ominaisuus: kulmamuodossa olevien kompleksilukujen kertolasku onnistuu yksinkertaisesti kertomalla itseisarvot keskenään ja laskemalla kulmat yhteen:

$$|z_1|\angle\varphi_1 \cdot |z_2|\angle\varphi_2 = |z_1||z_2|\angle(\varphi_1 + \varphi_2)$$

ja jakolasku vastaavasti jakamalla itseisarvot toisillaan ja vähentämällä kulmat toisistaan:

$$\frac{|z_1|\angle\varphi_1}{|z_2|\angle\varphi_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\angle(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Laskusäännöt on helppo todistaa Eulerin kaavan[10]

$$\mathrm{e}^{\varphi\mathrm{i}} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$$

avulla:

$$\begin{aligned}
&|z_1|\angle\varphi_1 \cdot |z_2|\angle\varphi_2 \\
&\quad= |z_1|(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1) \cdot |z_2|(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) \\
&\quad= |z_1|\mathrm{e}^{\varphi_1\mathrm{i}} \cdot |z_2|\mathrm{e}^{\varphi_2\mathrm{i}} = |z_1||z_2|\mathrm{e}^{\varphi_1\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\varphi_2\mathrm{i}} \\
&\quad= |z_1||z_2|\mathrm{e}^{(\varphi_1+\varphi_2)\mathrm{i}} = |z_1||z_2|\angle(\varphi_1 + \varphi_2).
\end{aligned}$$

Myöhempää erityisesti sähkötekniikassa kätevää sovellusta varten on tärkeä huomata, että imaginaariyksiköllä kertominen ei muuta kompleksiluvun itseisarvoa mutta kääntää kulmaa 90 astetta vastapäivään:

$$|z|\angle\varphi \cdot \mathrm{i} = |z|\angle\varphi \cdot 1\angle 90° = |z|\angle(\varphi + 90°)$$

ja vastaavasti imaginaariyksiköllä jakaminen kääntää kulmaa 90 astetta myötäpäivään.

Sinimuotoinen vaihtojännite, vastus ja kondensaattori

Sinimuotoinen vaihtojännite

Sinimuotoinen vaihtojännite määritellään seuraavasti:

$$u(t) = \hat{u}\sin(2\pi f t + \phi),$$

missä $\hat{u}$ on jännitteen *huippuarvo* eli *amplitudi*, f on jännitteen taajuus eli jaksoluku ja ϕ on jännitteen *vaihekulma*[11]. Merkitsemällä $\omega = 2\pi f$ säästetään kirjoitusvaivaa:

$$u(t) = \hat{u}\sin(\omega t + \phi).$$

Suuretta ω kutsutaan sähköopissa *kulmataajuudeksi* (vrt. pyörimisliikkeen kulmanopeus – matemaattisesti kyse on samasta asiasta).

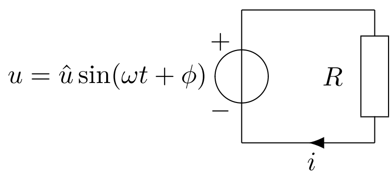
Esimerkiksi tavallisesta kotitalouspistorasiasta saatavan jännitteen taajuus on 50 Hz ja huippuarvo $\hat{u} = \sqrt{2} \cdot 230\,\mathrm{V} \approx 325\,\mathrm{V}$.[12]

Vastus ja vaihtojännite

Ohmin lain mukaan virta vastuksessa on jännitteen ja resistanssin osamäärä, eli

$$i = \frac{u}{R},$$

joten seuraavassa virtapiirissä



$$i = \frac{u}{R} = \frac{\hat{u}\sin(\omega t + \phi)}{R} = \frac{\hat{u}}{R}\sin(\omega t + \phi).$$

Vastusarvon muuttaminen ei siis vaikuta taajuuteen eikä vaihekulmaan, vaan ainoastaan virran amplitudiin.

Kondensaattori ja vaihtojännite

Siinä missä vastuksen virta oli kääntäen verrannollinen resistanssiin ja suoraan verrannollinen jännitteeseen, kondensaattorin virta on suoraan verrannollinen kapasitanssiin ja jännitteen muutosnopeuteen eli

$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}.$$

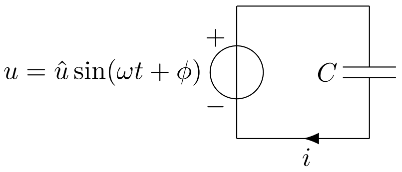
Kun kondensaattoriin kytketään sinimuotoinen vaihtojännite

[9] Koska napakoordinaatistosta xy-koordinaatistoon siirtymistä käytetään paljon tietokonegrafiikassa, on monissa ohjelmointikielissä valmiina funktio `atan2(y,x)`, joka palauttaa kulman arvon oikein riippumatta siitä, missä koordinaatiston neljänneksessä ollaan.

[10] Eulerin kaavan todistus puolestaan löytyy Timo Kiviluodon artikkelista *Eulerin kaavaa johtamassa* (Solmu 1/2002) `http://matematiikkalehtisolmu.fi/2002/1/kiviluoto/kiviluoto.pdf`

[11] Joskus näkee käytettävän termiä *nollavaihekulma* – kyse on täsmälleen samasta asiasta.

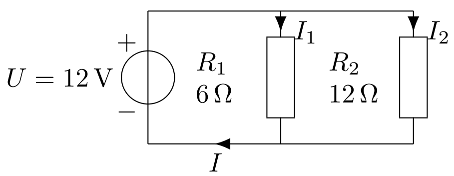
[12] 230 V on vaihtojännitteen *tehollisarvo* (ks. artikkelin toiseksi viimeinen kappale).



saadaan virta derivoimalla jännite ja kertomalla se kapasitanssilla C

$$
\begin{aligned}
i &= C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = C\omega\hat{u}\cos(\omega t + \phi) \\
&= C\omega\hat{u}\sin(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}).
\end{aligned}
$$

Virran huippuarvo on siis $C\omega\hat{u} = \hat{i}$ ja sen vaihekulma on $\frac{\pi}{2}$ radiaania eli 90° jännitettä edellä. Juuri tämä vaihesiirto tekee sen, että vaihtojännitteitä- ja virtoja ei voi laskea samalla tavalla yhteen reaalilukuina kuin tasavirtoja. Esimerkiksi seuraavassa tasasähköpiirissä



kaikki kolme komponenttia on kytketty rinnan eli niiden yli vaikuttaa sama 12 voltin jännite, ja vastusten virrat voidaan laskea Ohmin lailla

$$
I_1 = \frac{12\,\mathrm{V}}{6\,\Omega} = 2\,\mathrm{A} \quad I_2 = \frac{12\,\mathrm{V}}{12\,\Omega} = 1\,\mathrm{A}
$$

ja jännitelähteen virta saadaan näiden summana Kirchhoffin virtalain nojalla:

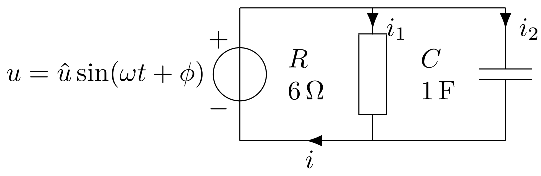
$$
I = I_1 + I_2 = 3\,\mathrm{A}.
$$

Tarkastellaan seuraavaksi kondensaattoria ja vastusta rinnakkain jännitelähteen kanssa. Kondensaattorille voidaan määritellä *reaktanssiksi* kutsuttu suure, joka kuvaa komponentin kykyä vastustaa sinimuotoisen vaihtovirran kulkua. Aivan kuten resistanssi on jännitteen ja virran suhde, reaktanssi on jännitteen ja virran amplitudien suhde. Edellä todettiin, että jos kondensaattorin jännitteen amplitudi on $\hat{u}$ niin virran amplitudi $\hat{i} = C\omega\hat{u}$, joten kondensaattorin reaktanssi X on

$$
X = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} = \frac{\hat{u}}{C\omega\hat{u}} = \frac{1}{\omega C}.
$$

Lasku on täsmälleen samanlainen, vaikka U olisi vaihtojännite – vastukset eivät vaikuta sinifunktion (tai minkä tahansa muun funktion) argumenttiin vaan ainoastaan vakiokertoimeen, joten sinit voi ottaa yhteiseksi tekijäksi, jolloin lopputulos on, että virtojen amplitudit voi laskea yhteen välittämättä jännitteen aaltomuodosta.

Jos piirissä on vain yksi jännitelähde ja kondensaattoreita, voidaan niiden virta laskea yhtä yksinkertaisesti kuin vastuksenkin virta. Jos piirissä on muitakin komponentteja, tulee myös vaihe-eron vaikutus ottaa huomioon. Valaistaan asiaa yksinkertaisella esimerkillä – vaihdetaan edellisen esimerkin piiriin toisen vastuksen tilalle kondensaattori ja jännitteeksi vaihtojännite:



ja olkoot $\omega = \frac{1}{12}\frac{1}{\mathrm{s}}$, $\phi = 0°$ ja $\hat{u} = 12\,\mathrm{V}$.

Vastuksen virran huippuarvo saadaan jakamalla jännitteen huippuarvo resistanssilla:

$$
\hat{i}_1 = \frac{\hat{u}}{R} = \frac{12\,\mathrm{V}}{6\,\Omega} = 2\,\mathrm{A}
$$

ja kondensaattorin virran huippuarvo saadaan jakamalla jännitteen huippuarvo kondensaattorin reaktanssilla:

$$
X = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\frac{1}{12}\frac{1}{\mathrm{s}}1\,\mathrm{F}} = 12\,\Omega \qquad \hat{i}_2 = \frac{\hat{u}}{X} = \frac{12\,\mathrm{V}}{12\,\Omega} = 1\,\mathrm{A}.
$$

Tulos on luonnollisesti sama kuin sinien kautta laskemalla: Vastuksen virta on

$$
i_1 = \frac{u}{R} = \frac{12\,\mathrm{V}\sin(\frac{1}{12}\frac{1}{\mathrm{s}}t)}{6\,\Omega} = 2\,\mathrm{A}\sin(\frac{1}{12}\frac{1}{\mathrm{s}}t)
$$

ja kondensaattorin virta

$$
\begin{aligned}
i_2 &= C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \\
&= 1\,\mathrm{F}\frac{1}{12}\frac{1}{\mathrm{s}}12\,\mathrm{V}\sin(\frac{1}{12}\frac{1}{\mathrm{s}}t + \frac{\pi}{2}) \\
&= 1\,\mathrm{A}\sin(\frac{1}{12}\frac{1}{\mathrm{s}}t + \frac{\pi}{2}).
\end{aligned}
$$

Sinin kertoimista poimitaan $\hat{i}_1 = 2\,\mathrm{A}$ ja $\hat{i}_2 = 1\,\mathrm{A}$. Kokonaisvirta $\hat{i}$ ei kuitenkaan ole $2\,\mathrm{A} + 1\,\mathrm{A} = 3\,\mathrm{A}$, koska kondensaattorin virta on 90 astetta vastuksen virtaa edellä, vaan virrat tulee laskea yhteen vaihekulma huomioiden[13]:

$$
\begin{aligned}
i &= i_1 + i_2 \\
&= 2\,\mathrm{A}\sin(\frac{1}{12}\frac{1}{\mathrm{s}}t) + 1\,\mathrm{A}\sin(\frac{1}{12}\frac{1}{\mathrm{s}}t + \frac{\pi}{2}) \\
&= \sqrt{(2\,\mathrm{A})^2 + (1\,\mathrm{A})^2}\sin(\frac{1}{12}\frac{1}{\mathrm{s}}t + \arctan\frac{1\,\mathrm{A}}{2\,\mathrm{A}}) \\
&= \sqrt{5}\,\mathrm{A}\sin(\frac{1}{12}\frac{1}{\mathrm{s}}t + \arctan\frac{1}{2}).
\end{aligned}
$$

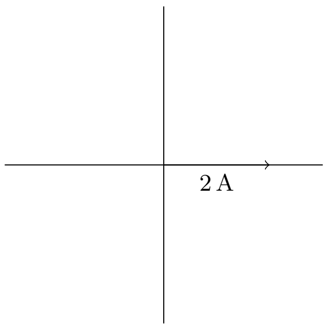
[13] Ks. esim. `http://pages.pacificcoast.net/~cazelais/252/lc-trig.pdf`

Virran huippuarvo on siis $\sqrt{5}\,\mathrm{A} \approx 2{,}2\,\mathrm{A}$ ja vaihekulma $\arctan \frac{1}{2} \approx 26{,}6°$. Tämä on usein työläs tapa laskea, ja jos virtapiirissä on useita komponentteja, aivan liian työläs. Tämän takia vaihtosähköpiirilaskuja lasketaan osoitinlaskennan avulla, johon tutustumme seuraavaksi.

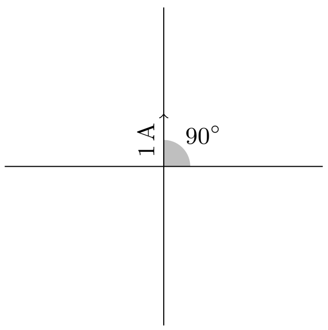
Osoitinlaskenta

Osoitinlaskenta perustuu siihen, että kutakin sinimuotoista jännitettä ja virtaa ajatellaan vektorina, jonka pituus vastaa jännitteen/virran huippuarvoa, jonka suuntakulma ajanhetkellä $t = 0$ on sama kuin jännitteen/virran nollavaihekulma ja joka pyörii kulmataajuudella ω. Tällaista vektoria kutsutaan *huippuarvon osoittimeksi*, jonka y-koordinaatti on kulman $\omega t + \varphi$ sini. Tällöin sinimuotoisten jännitteiden ja virtojen yhteenlasku redusoituu osoittimien vektoriyhteenlaskuksi: sinien summa on sama kuin summavektorin y-koordinaatti.

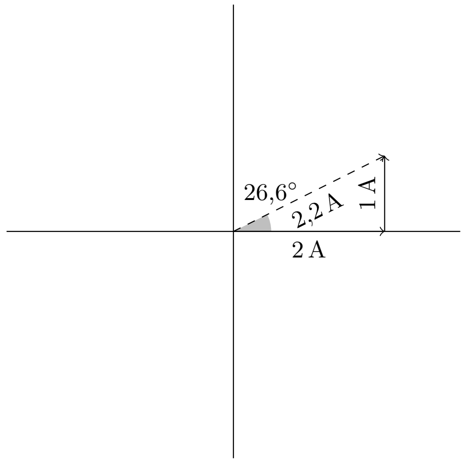
Esimerkiksi edellisen esimerkin virta $i_1 = 2\,\mathrm{A}\sin(\frac{1}{12}\frac{1}{\mathrm{s}}t)$ esitetään x-akselilla lepäävänä vektorina, jonka pituus on 2 ampeeria:



Kondensaattorin virta $i_2 = 1\,\mathrm{A}\sin(\frac{1}{12}\frac{1}{\mathrm{s}}t + \frac{\pi}{2})$ puolestaan osoittaa pystysuoraan, koska sen vaihekulma on 90 astetta:



Kun vektorit lasketaan yhteen, saadaan summavektoriksi vektori, jonka pituus on $\sqrt{2^2 + 1^2}\,\mathrm{A} = \sqrt{5}\,\mathrm{A} \approx 2{,}2\,\mathrm{A}$ ja kulma $\arctan \frac{1}{2} \approx 26{,}6°$:



Vektorit yhteen laskemalla saatiin siis sama tulos kuin suoraan trigonometristen funktioiden yhteenlaskuna: virtojen summan huippuarvo on resultanttivektorin pituus ja nollavaihekulma vektorin suuntakulma.

Menetelmä toimii niin jännitteiden kuin virtojenkin yhteen- ja vähennyslaskulle. Vektorien piirtämisen sijaan laskutoimitukset on näppärämpää tehdä kompeksiluvuilla.

Yleistetty Ohmin laki ja osoitinlaskenta kompleksiluvuilla

Esimerkkipiirissä kokonaisvirta saatiin laskemalla huippuarvon osoittimet yhteen vektorisummana. Sama laskutoimitus luonnistuu näppärästi kompleksiluvuilla, kun määritellään jännitteelle ja virralle:

$$u(t) = \hat{u}\sin(\omega t + \varphi) \iff U = \hat{u}\angle\varphi$$

$$i(t) = \hat{\imath}\sin(\omega t + \varphi) \iff I = \hat{\imath}\angle\varphi.$$

Huom! Koska sähkötekniikassa kirjain i tarkoittaa virtaa, sähköalan laskuissa imaginaariyksikköä merkitään j:llä – matemaattisesti kyseessä on kuitenkin täsmälleen sama asia.[14] Toinen sähköalan käytäntö on jättää yksiköiden lyhenteet pois laskutoimituksista – tämä on toisin kuin mihin lukion matematiikassa ja varsinkin fysiikassa on totuttu, mutta perusteltua tekstin luettavuuden kannalta.

Nyt esimerkkilaskumme sujuu seuraavasti:

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\,\mathrm{A} \\ I_2 &= 1\,\mathrm{A}\angle 90° = \mathrm{j}1\,\mathrm{A}. \end{aligned}$$

[14] Imaginaariyksikkö ja virta eivät mene sekaisin koneella kirjoitetussa tekstissä, koska virta ladotaan muiden suureiden tapaan kursiivilla i ja imaginaariyksikkö antiikvalla ("pystyfontilla") i. Käsinkirjoitetussa tekstissä sekaannuksen vaara on suurempi.

Eli yksiköt pois jättäen

$$I_1 = 2 \quad I_2 = \mathrm{j}$$

ja

$$I = I_1 + I_2 = 2 + \mathrm{j}$$

eli kulmamuodossa

$$2 + \mathrm{j} = \sqrt{2^2 + 1^2} \angle \arctan \frac{1}{2} \approx 2{,}2\angle 26{,}6°.$$

Itse asiassa se sujuu vielä kätevämmin, koska vaihekulman käsittely voidaan ottaa mukaan jo reaktanssia laskettaessa. Kondensaattorissahan virta on 90 astetta jännitettä edellä. Kuten edellä kompleksilukujen laskusääntöjen yhteydessä todettiin, imaginaariyksiköllä kertominen kääntää kulmaa 90 astetta eteenpäin. Määritellään kondensaattorin *kompleksinen impedanssi* Z seuraavasti:

$$Z = -\mathrm{j}X = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C} = -\mathrm{j}\frac{\mathrm{j}}{\mathrm{j}\omega C} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C},$$

jolloin kondensaattorin virta voidaan laskea *yleistetyn Ohmin lain*

$$U = ZI$$

avulla suoraan, niin että vaihekulmaa ei tarvitse ajatella erikseen:

$$\begin{aligned} I &= \frac{U}{Z} = \frac{U}{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = U\mathrm{j}\omega C \\ &= 12\mathrm{j}\frac{1}{12} \cdot 1\,\mathrm{A} = \mathrm{j} \cdot 1\,\mathrm{A} = 1\,\mathrm{A}\angle 90°. \end{aligned}$$

Osoitinlaskenta kompleksiluvuilla tekee vaihtosähköpiirien käsittelystä helppoa: sinimuotoisella vaihtojännitteellä on kaksi ominaisuutta: huippuarvo ja vaihekulma, ja kompleksiluku sisältää näistä molemmat. Kun käytetään yleistettyä Ohmin lakia ja kompleksilukuja, kaikki tasasähköpiireille pätevät laskumenetelmät pätevät sellaisenaan. Esimerkiksi esimerkkipiirimme kokonaisvirta voidaan laskea rinnankytkennän kaavalla suoraan. Tasasähköpiirissä vastusten R_1 ja R_2 rinnankytkennän resistanssi on

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{1}{6\,\Omega} + \frac{1}{12\,\Omega}} = 4\,\Omega$$

ja virta siten

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{12\,\mathrm{V}}{4\,\Omega} = 3\,\mathrm{A}.$$

Vastuksen ja kondensaattorin rinnankytkennän impedanssi on samoin laskettuna

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{6} + \mathrm{j}\frac{1}{12} \cdot 1}\,\Omega \\ &= \frac{(\frac{1}{6} - \mathrm{j}\frac{1}{12})}{(\frac{1}{6} + \mathrm{j}\frac{1}{12})(\frac{1}{6} - \mathrm{j}\frac{1}{12})}\,\Omega \\ &= \frac{(\frac{1}{6} - \mathrm{j}\frac{1}{12})}{\frac{5}{144}}\,\Omega \\ &= 4{,}8 - 2{,}4\mathrm{j}\,\Omega \approx 5{,}37\angle - 26{,}6°\,\Omega. \end{aligned}$$

Nyt kokonaisvirta (tai sen likiarvo, jos käytän kulmamuodon likiarvoa) ratkeaa yleistetystä Ohmin laista:

$$\begin{aligned} I &= \frac{U}{Z} \approx \frac{12\,\mathrm{V}}{5{,}37\angle - 26{,}6°\,\Omega} \\ &= \frac{12}{5{,}37}\angle(0° - (-26{,}6°))\,\mathrm{A} = 2{,}2\angle 26{,}6°\,\mathrm{A}. \end{aligned}$$

Kelan reaktanssi

Kolman tärkeä peruskomponentti kondensaattorin ja vastuksen lisäksi on kela, jonka perusyhtälö on

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

Kondensaattorin perusyhtälöön verrattuna jännite ja virta ovat vaihtaneet paikkaa ja kapasitanssin tilalla on induktanssi. Näin ollen kelan reaktanssi on $X = \omega L$ ja kompleksinen impedanssi

$$Z = \mathrm{j}\omega L,$$

koska kela kääntää vaihekulmaa 90 astetta päinvastaiseen suuntaan kuin kondensaattori.

Sekalaisia huomioita

Osoitinlaskentaa opiskeltaessa on hyödyllistä laskea kaikki välivaiheet käsin, mutta kun rutiini on hallussa, se on syytä antaa (ihan jo virheiden välttämiseksi) laskimen tai tietokoneohjelman hoidettavaksi. Valmiit piirisimulointiohjelmat käyttävät nekin kompleksilukulaskentaa piirejä analysoidessaan.

Taskulaskinten kyky käsitellä kompleksilukuja vaihtelee suuresti – lähes jokainen laskin laskee kompleksilukuja jossain määrin, mutta sujuva lukujen syöttö sekä summa- että kulmamuodossa yhdistettynä näppärään lopputuloksen muuntamiseen muodosta toiseen löytyy kokemukseni mukaan vain Casion vanhasta FX-115- ja markkinoilla olevasta FX-991 -funktiolaskimesta. Järeämmistä numeronmurskaimista Texas Instrumentsin CAS-laskimet käsittelevät kompleksilukuja sujuvasti, joskin toimintoja saa välillä hakea melkoisen valikkoviidakon takaa.

Verkkoselaimessa toimivista matematiikkaohjelmistoista tunnetuin WolframAlpha laskee sekin kompleksiluvuilla sujuvasti ja ilmoittaa lopputuloksen sekä summa- että kulmamuodossa, mutta kulmamuotoisten lähtöarvojen syöttö onnistuu vain Eulerin kaavan avulla, mikä on toki matemaattisesti oikein mutta tuottaa turhaa lisänäpyttelyä.

Tässä artikkelissa laskettiin huippuarvon osoittimilla. Aivan yhtä hyvin voidaan laskea tehollisarvon osoittimilla – ja näin yleensä tehdäänkin, koska tällöin komponenttien tehon laskeminen on suoraviivaista. Tehollisarvo ja vaihtosähköteho ovat nekin matemaattisesti kiehtovia aiheita, mutta tekisivät artikkelista liian pitkän. Niistä lisää seuraavassa Solmun numerossa!

Vaihtosähköpiirilaskennasta löytyy lisäesimerkkejä muun muassa kalvosarjastani *Tuhat kalvoa sähkötekniikkaa*[15] kalvoilta nrot 416–427.

Otan mielelläni vastaan palautetta ja kysymyksiä artikkelistani ensimmäiseltä sivulta löytyvään sähköpostiosoitteeseeni.

Lähteitä ja lisälukemista

Kouluhallitus: Lukion opetussuunnitelman perusteet 1985. Valtion painatuskeskus. Helsinki 1985.

Opetushallitus: Lukion opetussuunnitelman perusteet 1994. Painatuskeskus. Helsinki 1994.

Merikoski, Väänänen, Laurinolli, Sankilampi: Matematiikan Taito 13, Analyysi. WSOY. Porvoo 1999.

Tage Hedberg, Aimo Roth: Osoitinlaskenta. 2. painos. WSOY. Porvoo 1971.

Martti Valtonen, Anu Lehtovuori: Piirianalyysi 1. Unigrafia. Helsinki 2011.

Kimmo Silvonen: Sähkötekniikka ja piiriteoria. Otatieto. Helsinki 2009.

Korjaukset 24.5.2017: Kappaleessa Kompleksiluvun kulmamuoto korjattu, että imaginaariyksiköllä kertominen kääntää kulmaa 90 astetta vastapäivään (ei siis myötäpäivään) ja imaginaariyksiköllä jakaminen kääntää kulmaa 90 astetta myötäpäivään (ei siis vastapäivään). Kappaleessa Yhdistetty Ohmin laki ja osoitinlaskenta kompleksiluvuilla korjattu kaava $I = \dfrac{U}{R}$ *muotoon* $I = \dfrac{U}{Z}$.

[15] http://www.slideshare.net/linjaaho/tuhat-kalvoa-shktekniikkaa-ja-elektroniikkaa