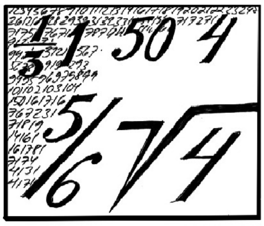

Eräs Collatz-Kakutanin otaksuman analogia

Juhani Fiskaali [1]

Moni tuntee Collatz-Kakutani-probleeman ja siihen liittyvän otaksuman. Jos määritellään funktio $f\colon N \to N$ asettamalla

$$f(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}n, \text{ jos } n \equiv 0 \pmod 2 \\ \frac{1}{2}(3n+1), \text{ jos } n \equiv 1 \pmod 2, \end{cases}$$

niin otaksumana on, että iteroitaessa tällä funktiolla mistä alkuarvosta $m \in N$ tahansa lähtemällä iteraatiojonossa päädytään aina sykliin $\ldots, 2, 1, 2, 1, \ldots$ Esimerkiksi lukuun $m = 11$ liittyvä iteraatiojono on $11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1, 2, 1, \ldots$, missä kymmenennellä iteraatiolla on saavutettu luku 1. Täten luku 11 on funktion f käänteisrelaation generoimassa lukujen puussa syvyydellä 10.

Löytyisikö sellaista funktiota $F\colon N \to N$, että iteraatiojono $m, F(m), F^2(m), \ldots$ päättyisi vakioketjuun $\ldots, 1, 1, 1, \ldots$ riippumatta lähtöarvosta $m \in N$? Otaksumani on, että funktio F, jolle

$$F(n) = \begin{cases} \frac{1}{3}n, \text{ jos } n \equiv 0 \pmod 3 \\ \frac{1}{3}(4n-1), \text{ jos } n \equiv 1 \pmod 3 \\ \frac{1}{3}(5n-7), \text{ jos } n \equiv 2 \pmod 3, \end{cases}$$

on tällainen.

Esimerkkijonoina olkoot seuraavat kolme jonoa, alkuarvoina 11, 100 ja 1000:

$$11, 16, 21, 7, 9, 3, 1, 1, 1, \ldots$$

$$100, 133, 177, 59, 96, 32, 51, 17, 26, 41, 66, 22, 29, 46, 61, 81, 27, 9, 3, 1, 1, \ldots$$

ja

$$1000, 1333, 1777, 2369, 3946, 5261, 8766, 2922, 974, 1621, 2161, 2881, 3841, 5121, 1707, 569, 946, 1261, 1681, 2241, 747, 249, 83, 136, 181, 241, 321, 107, 176, 291, 97, 129, 43, 57, 19, 25, 33, 11, 16, 21, 7, 9, 3, 1, 1, \ldots$$

Näistä jonoista ilmenee, että mahdollisessa funktion F käänteisrelaation generoimassa lukupuussa luku 11 on syvyydellä 6 ($F^6(11) = 1$), luku 100 on syvyydellä 19 ja luku 1000 syvyydellä 43. (Lukupuun terminologiassa voidaan käyttää sukupuun termejä kuten jälkeläinen ja sukupolvi. Kahden luvun sukulaisuutta voidaan mitata etäisyydellä puun haaroja pitkin mitattuna.)

Otaksuman vääräksi osoittamiseksi riittäisi löytää sellainen alkuarvo $m \in N$, että luku 1 ei ole jäsenenä iteraatiojonossa $m, F(m), F(F(m)), F(F(F(m))), \ldots$ Löytyisikö mahdollisesti jono, jossa on silmukka?

Jos testausta halutaan ”kynällä ja paperilla”, on luontevaa käyttää kolmikantajärjestelmää ja selvittää, mitä funktion F määritelmässä esiintyvät kolme eri toimintoa tarkoittavat ja miten testattavan jonon seuraava jäsen saadaan edellisestä kolmikannan lukuja käytettäessä. Collatz-Kakutani-probleeman testauksessahan oli luontevaa käyttää binäärilukuja.

[1] Kirjoittaja on Oulun lyseon eläkkeellä oleva matematiikan opettaja.