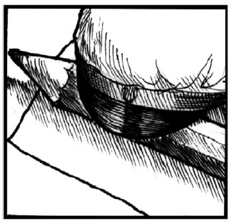

Teema ja muunnelmia: syksyn 2016 ylioppilastehtävistä mieleen tullutta

Matti Lehtinen

Ylioppilaskirjoitusten tehtäviä monesti arvostellaan. Milloin ne poikkeavat opetussuunnitelmasta, milloin ovat liian vaikeita tai helppoja. Itsekin olen joskus tehtäviä moitiskellut. Tällä kertaa aion olla positiivinen. Syksyn 2016 pitkän matematiikan tehtävät olivat monessa mielessä hauskoja. Yksi myönteinen piirre niissä on se, että moni antaa mahdollisuuden ehkä vähän leikitelläkin erilaisilla lähestymistavoilla tai sitten tehtävästä saattaa aueta laajempia näköaloja. Seuraavassa muutaman tehtävän ratkaisuvariaatio ja laajennus. Väärinkäsitysten välttämiseksi korostettakoon, että tarkoitus ei ole antaa tehtäville parempia tai näppärämpiä ratkaisuja, vaan taas kerran esittää tukea ajatukselle, että matematiikan metsässä kulkee monia polkuja, jotkut kivikkoisempia kuin toiset, mutta eihän se silein tie aina hauskin ole. Tässä esitetyt polut koukkaavat hiukan sen aika pienen alueen ulkopuolelle, jonka melko keinotekoiset rajat määrittää opetussuunnitelma. – Tehtävät voi lukea esimerkiksi osoitteessa

`http://yle.fi/aihe/artikkeli/2016/09/09/katso-syksyn-2016-yo-kokeet-ja-vastaukset`.

Derivaatta ilman derivointikaavaa

Tehtävän 2 b-kohdassa kysyttiin funktion

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} + 1$$

derivaatan arvoa kohdassa $x = 2$. Tehtävässä funktiota f ei ihan viimeisen päälle täydellisesti ole määritelty, kun ei ole kerrottu funktion määrittelyjoukkoa. Kun derivaatta olemassaolo kohdassa 2 edellyttää, että funktio on määritelty ainakin kohdan 2 ympärillä, mutta funktion ei tarvitse olla määritelty kovin kaukana kohdasta 2, voidaan olettaa, että $x > 0$. Silloin voidaan käyttää hyödyksi moneen tilanteeseen sopivaa toimintaohjetta: täydennä neliöksi! Onhan nimittäin

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{x}{2} - 2 + \frac{2}{x}.$$

Kun $x > 0$, onkin siis

$$f(x) = 3 + \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2.$$

Mutta neliö on aina positiivinen tai 0. Siis $f(x) = 3$, jos

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}, \tag{1}$$

mutta $f(x) > 3$, jos

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} \neq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}. \tag{2}$$

Yhtälö (1) pätee vain, jos $x = 2$, kun taas epäyhtälö (2) on voimassa aina, kun $x \neq 2$. Tämähän merkitsee sitä, että funktio f saa kohdassa $x = 2$ pienimmän arvonsa positiivisten lukujen joukossa. Mutta ääriarvokohdassa funktion derivaatta on nolla! Tehtävän voi siis ratkaista, vaikkei muistaisikaan derivointikaavoja.

Toistakin kautta tulokseen pääsee derivointikaavoihin (tässä tapauksessa toki äärimmäisen yksinkertaisiin) turvautumatta. Voi vedota suoraan derivaatan määritelmään ja funktion eräänlaiseen symmetrisyyteen. Derivaatan määritelmän mukaan

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}. \tag{3}$$

Mutta

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} + 1 = \frac{2}{x} + \frac{x}{2} + 1 = \frac{\frac{4}{x}}{2} + \frac{2}{\frac{4}{x}} + 1 = f\left(\frac{4}{x}\right).$$

Funktio saa siis saman arvon eri puolilla pistettä 2 sijaitsevissa pisteissä x ja $z = \frac{4}{x}$. Kun x on lähellä 2:ta, myös $\frac{4}{x}$ on lähellä 2:ta. Pisteissä x ja $\frac{4}{x}$ kaavan (3) osamäärän osoittaja on sama, mutta nimittäjillä on vastakkainen etumerkki. Osamäärän arvot näissä pisteissä ovat erimerkkiset. Jos raja-arvo (3) olisi jokin muu kuin 0, olisi osamäärän oltava samanmerkkinen kuin raja-arvo kaikissa tarpeeksi lähellä arvoa 2 olevissa pisteissä. Koska osamäärällä on kuitenkin aina erimerkkisiä arvoja, miten lähelle pistettä 2 mennäänkin, niin ainoa mahdollisuus on, että raja-arvo on nolla.

Molemmat edellisistä päättelyistä ovat tietysti siinä vajavaisia, että derivaatan olemassaolo on niissä oletettu.

Trigonometrista askartelua

Myös tehtävän 2 c-osa antaa leikittelyn mahdollisuuksia. Siinä kehotettiin ”laskemaan ja sieventämään

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\, dx.\text{”}$$

Jos visualisoi määrätyn integraalin pinta-alana, niin huomaa, että käyrät $y = \sin x$ ja $y = \cos x$ rajoittavat välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$ alueet, jotka ovat toistensa pelikuvia suoran $x = \frac{\pi}{4}$ suhteen. Ne ovat varmasti samankokoisia, joten tehtävässä kysytty integraali on esimerkiksi sama kuin

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 2 \Big/_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x = 2. \tag{4}$$

Samaan pääsee tietysti muuttujanvaihdollakin. Onhan $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, joten

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\, dx.$$

Muuttujanvaihdolla $t = \frac{\pi}{2} - x$ jälkimmäisestä integraalista saadaan

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt,$$

ja tehtävän integraali palaa muotoon (4).

Trigonometristen funktioiden välisten relaatioiden määrä on suuri. Mitähän yhdistelmästä $\sin x + \cos x$ saisi? Ainakin sinin yhteenlaskukaava ja tieto

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

antavat mahdollisuuden kirjoittaa

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= \sqrt{2}\left(\sin x \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos x\right) \\ &= \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Integraalimme voidaan siis laskea myös näin, muuttujanvaihdon $x = t - \frac{\pi}{4}$ avulla:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\, dx &= \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin t\, dt \\ &= -\sqrt{2} \Big/_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos t \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2. \end{aligned}$$

Jaollisuus ja induktio

Tehtävässä 9.1 piti osoittaa, että luku $n^3 + 6n^2 - 7n$ on jaollinen luvulla 6, kun $n = 2, 3, 4, \ldots$ Kun $n = 0$ tai $n = 1$, niin lausekkeen määrittelemä luku on 0, joka sekin on kuudella jaollinen. Yhtä hyvin olisi voitu kysyä todistusta sille, että lausekkeen määrittelemä luku on jaollinen kuudella, olipa n mikä ei-negatiivinen kokonaisluku tahansa.

En tiedä, mikä on ollut tavallisin tapa ratkaista tämä tehtävä, mutta ainakin ylioppilastutkintolautakunnan ”hyvän vastauksen piirteet” -kooste esittelee ratkaisuja, joiden lähtökohtana on tekijöihin jako $n^3 + 6n^2 - 7n = n(n+7)(n-1)$. Ehkä näppärin tapa olisi muotoilla lauseketta näin: $n^3 + 6n^2 - 7n = n^3 - n + 6n^2 - 6n$. Nyt $6n^2 - 6n$ on n:stä riippumatta jaollinen 6:lla ja $n^3 - n = n(n^2-1) = n(n-1)(n+1)$. Kolmen peräkkäisen kokonaisluvun joukossa on aina yksi kolmella jaollinen ja yksi tai kaksi parillista. Luku $(n-1)n(n+1)$ on siis sekin varmasti jaollinen luvulla $3 \cdot 2 = 6$. – Tämä päättely ei ollenkaan tarvitse sitä, että n olisi ei-negatiivinen. Voidaankin todeta, että $n^3 + 6n^2 - 7n$ on kuudella jaollinen, olipa n mikä hyvänsä kokonaisluku.

Kun todistettavaksi tulee väittämä, jonka tulisi olla tosi kaikilla ei-negatiivisilla kokonaisluvuilla, niin yksi vakiokeino on induktio. Kokeillaanpa, kelpaisiko se tähän. Saattaisi helpottaa, jos merkittäisiin $f(n) = n^3 + 6n^2 - 7n$. Induktion käynnistämiseksi on todettava, että $f(0)$ on kuudella jaollinen. Sehän jo edellä huomattiin. Toinen tarvittava asia on induktioaskeleen ottaminen. Jos $f(n)$ oletetaan kuudella jaolliseksi, niin

$f(n+1)$:nkin pitäisi olla kuudella jaollinen. Lasketaanpa:

$$\begin{aligned} f(n+1) &= (n+1)^3 + 6(n+1)^2 - 7(n+1) \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 6n^2 + 12n + 6 - 7n - 7 \\ &= n^3 + 6n^2 - 7n + 3n^2 + 3n + 12n \\ &= f(n) + 3n(n+1) + 12n. \end{aligned}$$

Induktio-oletuksen mukaan $f(n)$ on jaollinen kuudella, $12n$ on varmasti myös, ja luvuista n, $n+1$ toinen on parillinen. Siis myös $3n(n+1)$ on jaollinen kuudella, joten induktioaskel on otettu ja väite todistettu.

Polttopiste ja johtosuora

Tehtäväsarjan numero 7 synnyttää meissä kauan sitten koulumme käyneissä tuttuuden tunteen. Tehtävässä puhutaan tasokäyrästä K, joka "muodostuu niistä pisteistä (x, y), joiden etäisyys origosta on yhtä suuri kuin etäisyys suorasta $y = 2$". Kalle Väisälän Algebran oppi- ja esimerkkikirjan toisen osan vuonna 1960 ilmestyneen viidennen painoksen sivulla 43 on teksti *Paraabeliksi sanotaan niiden pisteiden uraa, jotka ovat yhtä kaukana kiinteästä pisteestä ("polttopiste") ja kiinteästä suorasta ("johtaja").* Tehtävän käyrä on siis paraabeli, jonka polttopiste on origo ja johtosuora (sanaa "johtaja" ei tässä nykyään ole tapana käyttää) suora $y = 2$.

Mutta millainen K olisi, jos ehto "etäisyys origosta on yhtä suuri kuin suorasta $y = 2$" korvattaisiin vaikkapa ehdolla "etäisyys origosta on p kertaa niin suuri kuin etäisyys suorasta $y = 2$, missä p on jokin kiinteä positiivinen luku"? Jos $p = 1$, ollaan tehtävän tilanteessa. Mutta lasketaan yleisemmällä p:n arvolla, kuitenkin $p \neq 1$. Käyrän piste (x, y) toteuttaisi nyt yhtälön

$$\sqrt{x^2 + y^2} = p|y - 2|$$

ja siis myös yhtälön

$$x^2 + y^2 = p^2(y^2 - 4y + 4)$$

eli

$$x^2 + (1 - p^2)\left(y^2 + \frac{4p^2}{1 - p^2}y\right) = 4p^2.$$

Kun vasemmalla puolella suoritetaan neliöksi täydentäminen ja hiukan sievennetään, tullaan yhtälöön

$$x^2 + (1 - p^2)\left(y - \frac{2p^2}{p^2 - 1}\right)^2 = \frac{4p^2}{1 - p^2}.$$

Tehdään vielä koordinaatiston siirto y-akselin suunnassa ottamalla käyttöön uusi muuttuja

$$y' = y - \frac{2p^2}{p^2 - 1}.$$

Käyrämme yhtälöksi tulee nyt

$$x^2 + (1 - p^2)y'^2 = \frac{4p^2}{1 - p^2}$$

eli

$$\frac{x^2}{\frac{4p^2}{1 - p^2}} + \frac{y'^2}{\frac{4p^2}{(1 - p^2)^2}} = 1.$$

Jos nyt vaikka vertaa MAOL-taulukkoon, niin huomaa, että jos $p < 1$, käyrä on ellipsi (jonka isoakseli kylläkin on y'-akselin eikä x-akselin suuntainen), jos taas $p > 1$, käyrä on hyperbeli. Käyrien eri ominaisuudet kuten polttopisteet, akselit ja asymptootit voi kaikki tuosta laskea p:n funktioina.

Mitä olemme saaneet aikaan? Yhden yhtenäisen tavan määritellä toisen asteen käyrät. Antiikista periytyy se, että ellipsi, paraabeli ja hyperbeli ovat käyrätyyppejä, jotka syntyvät eri asennoissa olevien tasojen leikatessa ympyräkartiota. Tästä periytyy käyristä käytettävä yhteisnimitys *kartioleikkaukset*. Myöhemmin, ilmeisesti noin vuoden 500 paikkeilla, huomattiin, että ellipsin voi määritellä sellaisten pisteiden urana eli joukkona, joiden kahdesta kiinteästä pisteestä laskettujen etäisyyksien summa on vakio. Tämä ellipsin piirtämisen mahdollistava ominaisuus on se, jota Suomen kouluissa aikanaan ellipsin määritelmänä pidettiin. Vastaavasti hyperbelin määritelmässä ellipsin määritelmän sana summa korvattiin sanalla erotus. Mutta niin kuin edellä laskettiin, ellipsin, hyperbelin ja paraabelin määrittely voidaan tehdä yhtenäisesti; erottelu kolmeen tapaukseen perustuu vain parametrin p kokoon.