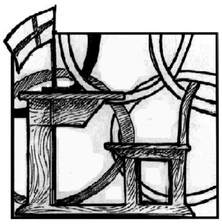

Solmun ongelmapalsta

Lukijoilta on tullut ilahduttava määrä ratkaisuja ja tehtäväehdotuksia Solmuun. Tämänkertaisiin tehtäviin toivotaan ratkaisuja elokuun 2017 loppuun mennessä. Ratkaisut voi lähettää osoitteeseen aernvall@abo.fi. Myös tehtäväehdotukset ovat erittäin tervetulleita.

Jätetään vielä avoimiksi ne viime numeron tehtävät, joihin ei ole tullut lukijoilta ratkaisuehdotuksia, eli lisätehtäviä kaivatessa kannattaa kaivaa Solmu 1/2017 esille.

Tehtävät

Tehtävä 1. (Ehdottanut Timo Kärkkäinen) Ratkaise yhtälön

$$25x^4 + 100x^3 + 20x^2 + 40x + 4 = 0$$

kaikki juuret.

Tehtävä 2. (Ehdottanut Aki Halme) Kapteeni Jarmo Kerkkinen haluaa matkustaa maapallolta juhlimaan 4,3 valovuoden päähän Alpha Centaurille. Ikävä kyllä poimuajo on vaurioitunut ja kykenee tekemään vain täsmälleen 10 valovuoden loikkia. Pääseekö Jarmo juhliin? Jos ei, miksi ei? Jos pääsee, montako loikkaa vähintään tarvitaan?

Entä silloin, jos loikkien välissä voi tehdä vain täsmälleen 90 asteen käännöksen?

Tehtävä 3. (Ehdottanut Aki Halme) Kuinka suuri on donitsin pinta-ala? Mitä donitsista kannattaa viivaimella mitata, jos voit tehdä

a) kaksi mittausta

b) vain yhden mittauksen?

(Ajatellaan tässä donitsi kaksiulotteisena otuksena, ei siis normaalina kolmiulotteisena.)

Tehtävä 4. (Brittiläinen kilpailutehtävä vuodelta 2011) Poistetaan yksi luku lukujoukosta, joka koostuu luvuista $1, 2, \ldots, n$. Jäljelle jääneiden lukujen keskiarvo on $40\frac{3}{4}$. Mikä luku poistettiin?

Ratkaisut

Tehtävä 2, Solmu 3/2016. Vauvanruokapurkeista pinotaan pyramidi seinää vasten siten, että kerroksia on ainakin kaksi ja jokaisessa kerroksessa on yksi vähemmän kuin sen alla olevassa kerroksessa. Ylimmässä kerroksessa voi olla enemmän kuin yksi purkki.

a) Kuinka voisit pinota 100 purkkia?

b) Jos kerroksia on kuusi ja ylimmässä kerroksessa on kolme purkkia, montako purkkia on pinossa kaikkiaan?

c) Voiko joitakin purkkimääriä pinota useammalla eri tavalla?

d) Mikä on ainoa purkkimäärä välillä 1000000–2000000, josta ei voi tehdä pyramidia?

Ratkaisu. (toimitus) a) Sata purkkia voi pinota asettamalla ensimmäiseen kerrokseen 22 purkkia, toiseen 21, kolmanteen 20, neljänteen 19 ja viidenteen 18.

b) Pinossa on

$$3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33$$

purkkia.

c) Kyllä, esimerkiksi 15 voidaan pinota kahdella tavalla: kahdeksan purkkia alempaan ja seitsemään ylempään kerrokseen tai kuusi alimpaan, viisi keskelle ja neljä ylimpään.

d) Osoitetaan, että 2^{20} on ainoa purkkimäärä välillä, josta ei voi tehdä pyramidia. Aloitetaan todistus osoittamalla, että kaikki muut purkkimääärät voidaan pinota.

Jos purkkimäärä on pariton, vaikkapa $2k+1$, niin pinoaminen on helppo tehdä: $k+1$ alempaan ja k ylempään kerrokseen.

Oletetaan nyt, että purkkimäärä n on parillinen, mutta ei kakkosen potenssi. Silloin luvulla on jokin jakaja, joka on ykköstä suurempi pariton luku. Olkoon $n = dh$, missä $d > 1$ on pariton.

Jos $h - 1 \leq \frac{d-1}{2}$, voidaan purkit pinota asettamalla $\frac{d-1}{2} - h + 1$ purkkia ylimpään kerrokseen, $\frac{d-1}{2} - h + 2$ toiseksi ylimpään ja niin edespäin, kunnes alimmassa kerroksessa on $\frac{d+1}{2} + h - 1$ purkkia.

Jos taas $h - 1 > \frac{d-1}{2}$, ei tämä pinoamistekniikka toimi, koska ylimmässä kerroksessa ei voi olla negatiivista määrää purkkeja. Tällöin pistetään alimpaan kerrokseen $h + \frac{d-1}{2}$ purkkia, toiseksi alimpaan $h - 1 + \frac{d-1}{2}$ purkkia, ja näin jatketaan d kerroksen verran, eli ylimmässä kerroksessa on $h - \frac{d-1}{2}$ purkkia.

Osoitetaan vielä, että jos purkkeja on 2^{20}, niin pinoaminen ei onnistu. Mikäli pinoaminen on mahdollista, on purkkimäärän oltava

$$\sum_{k=N+1}^{M} k = \frac{M(M+1)}{2} - \frac{N(N+1)}{2} = \frac{M^2 - N^2 + M - N}{2} = \frac{(M-N)(M+N+1)}{2}.$$

Molempien tekijöiden on oltava kakkosen potensseja. Toinen luvuista on parillinen, toinen pariton. Ainoa pariton luku, joka on kakkosen potenssi, on ykkönen, jolloin toisen luvuista on oltava yksi. Selvästi $M + N + 1 > 1$, jolloin on pädettävä $M - N = 1$, mutta tällöin kerroksia on vain yksi, mikä ei ole sallittua, joten pinoaminen ei onnistu.

Tehtävä 3, Solmu 3/2016. (Vanha itävaltalainen kilpailutehtävä) Määritä kaikki kokonaislukuparit (a, b), joilla

$$(a^3 + b)(a + b^3) = (a + b)^4.$$

Ratkaisu. (toimitus) Jos vähintään toinen luvuista on nolla, pätee yhtäsuuruus varmasti. Voimme siis nyt olettaa, että sekä a että b ovat nollasta poikkeavia. Tapaus, jossa molemmat ovat negatiivisia, on täsmälleen samanlainen kuin tapaus, jossa molemmat ovat positiivisia. Riittää siis tarkastella tapaukset, joissa joko molemmat ovat positiivisia, tai toinen on positiivinen ja toinen negatiivinen.

Käsitellään aluksi tapaus, jossa molemmat ovat positiivisia. Voidaan olettaa, että $b \geq a$. Yhtälö on yhtäpitävä yhtälön

$$a^4 + ba + b^4 + a^3b^3 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

kanssa. Tämä yhtälö supistuu muotoon

$$1 + a^2b^2 = 4a^2 + 6ab + 4b^2.$$

Nyt voidaan arvioida:

$$1 + a^2b^2 > a^2b^2$$

sekä

$$4a^2 + 6ab + 4b^2 \leq 14b^2.$$

Siispä $a^2b^2 < 14b^2$, joten $a \in \{1, 2, 3\}$. Käymällä tapaukset läpi löydetään ratkaisu $a = 3, b = 5$.

Siirrytään nyt tapaukseen, jossa toinen on negatiivinen ja toinen positiivinen. Voidaan olettaa, että $a < 0 < b$. Kirjoitetaan $-a$ luvun a paikalle, jolloin voidaan jälleen tarkastella yhtälöä positiivisten lukujen joukossa. Yhtälö on nyt siis

$$(b - a^3)(b^3 - a) = (b - a)^4,$$

joka aukikerrottuna antaa

$$a^4 - a^3b^3 - ab + b^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4,$$

josta supistamisen jälkeen saadaan

$$-1 - a^2b^2 = -4b^2 - 4a^2 + 6ab.$$

Voidaan jälleen arvioida:

$$-1 - a^2b^2 < -a^2b^2$$

sekä

$$-4b^2 - 4a^2 + 6ab > -4\max\{a^2, b^2\},$$

joten

$$-4\max\{a^2, b^2\} < -a^2b^2,$$

joten

$$\min\{a^2, b^2\} < 4,$$

eli $\min\{a, b\} = 1$.

Jos $a = 1$, niin $(b-1)(b^3-1) = (b-1)^4$, jolloin $b = 1$. Jos taas $b = 1$, niin $(-a+1)(-a^3+1) = (1-a)^4$, eli $a = 1$.

On siis löydetty ratkaisut $(0, b)$, $(a, 0)$, $(3, 5)$, $(-3, -5)$, $(5, 3)$, $(-5, -3)$, $(-1, 1)$ ja $(1, -1)$, sekä osoitettu, että muita ei ole.

Tehtävä 4, Solmu 3/2016. (Vanha itävaltalainen kilpailutehtävä) Etsi yhtälön

$$\sqrt{4 - x\sqrt{4 - (x-2)\sqrt{1 + (x-5)(x-7)}}} = \frac{5x - 6 - x^2}{2}$$

reaalilukuratkaisut.

Ratkaisu. (Timo Kärkkäinen) Halutaan reaalilukuratkaisuja, joten yhtälön oikean puolen ja jokaisen juurrettavan on oltava epänegatiivinen. Yhtälön oikeaa puolta tarkastelemalla huomataan tekijöihin purkamalla

$$-x^2 + 5x - 6 = -(x-2)(x-3).$$

Kun $x < 2$, lauseke on negatiivinen, samoin kun $x > 3$. Siispä yhtälöllä voi olla reaalisia ratkaisuja ainoastaan välillä $[2, 3]$.

Tarkastellaan seuraavaksi yhtälön vasenta puolta. Sisin juurrettava on $1 + (x-5)(x-7) = (x-6)^2 \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joten yhtälö saadaan muotoon

$$\sqrt{4 - x\sqrt{4-(x-2)|x-6|}} = \frac{1}{2}(5x - 6 - x^2).$$

Koska olemme kiinnostuneita vain välistä $[2, 3]$, voimme asettaa $|x-6| = -(x-6)$. Sisempi juurrettava on nyt $4 + (x-2)(x-6) = (x-4)^2 \geq 0$. Yhtälö saadaan muotoon

$$\sqrt{4 - x|x-4|} = \frac{1}{2}(5x - 6 - x^2).$$

Jälleen koska etsimme ratkaisuja vain väliltä $[2, 3]$, asetamme $|x-4| = -(x-4)$. Uloin juurrettava on $4 + x(x-4) = (x-2)^2$, joten yhtälö saadaan muotoon

$$2|x-2| = 5x - 6 - x^2.$$

Koska $x \in [2, 3]$, voidaan kirjoittaa $|x-2| = (x-2)$. Yhtälö saadaan muotoon $2(x-2) = 5x - 6 - x^2$, jonka ratkaisut ovat 1 ja 2. Ensimmäinen ratkaisu ei ole halutulla välillä. Toinen on. Ratkaisu on siis $x = 2$. Muita reaalisia ratkaisuja ei ole.

Tehtävä 4, Solmu 1/2017. (Ehdottanut Aki Halme) Tasan keskipäivällä kellon tunti-, minuutti- ja sekuntiosoittimet ovat täsmälleen päällekkäin. Hieman yli kello yksi iltapäivällä tunti- ja minuuttiosoittimet ovat jälleen täsmälleen päällekkäin. Minne sekuntiosoitin silloin osoittaa?

Ratkaisu. (Jarno Laiho) Ratkaistaan ensin tunti- ja minuuttiviisareiden kulmanopeudet ω_h ja ω_m:

$$\omega_h = \frac{1}{12} \cdot \frac{2\pi}{3600} \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{\pi}{21600} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

ja

$$\omega_m = \frac{2\pi}{3600} \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{\pi}{1800} \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Kello 1 olkoon ajanhetki $t_0 = 0$ s. Tuolloin viisareiden kulkema matka (kiertokulma) klo 12 nähden:

- tuntiviisari $\theta_{h_0} = \frac{2\pi\text{rad}}{12} = \frac{\pi}{6}$ rad,
- minuuttiviisari $\theta_{m_0} = 0$ rad,
- sekuntiviisari $\theta_{s_0} = 0$ rad.

Ajanhetkellä t_1 minuuttiviisari on saavuttanut tuntiviisarin ja ne ovat päällekkäin. Tuolloin molempien viisareiden kiertokulmat klo 12 nähden ovat yhtä suuret. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se parametrin t_1 suhteen:

$$\theta_{m_0} + \omega_m t_1 = \theta_{h_0} + \omega_h t_1,$$

joten

$$t_1 = \frac{\theta_{h_0} - \theta_{m_0}}{\omega_m - \omega_h} = \frac{\frac{\pi}{6}\text{rad} - 0\text{rad}}{\frac{\pi \text{ rad}}{1800 \text{ s}} - \frac{\pi \text{ rad}}{21600 \text{ s}}} = \frac{3600}{11} \text{ s}.$$

Näin ollen $\frac{3600}{11} = 327\frac{3}{11}$ sekuntia kello 1 jälkeen (t_1) tunti- ja minuuttiviisarit ovat päällekkäin. Tässä ajassa sekuntiviisari on ehtinyt kiertää 5 täyttä kierrosta ($5 \cdot 60$ s $= 300$ s) ja yhden vajaan kierroksen. Lasketaan mikä on tämän vajaan kierroksen suuruus:

$$327s - 300s = 27s$$

tai ilmoitettuna kulman suuruutena klo 12 nähden: $2\pi\left(\frac{27\frac{3}{11}}{60}\right)$ rad $= \frac{10}{11}\pi$ rad.

Vastaus: Tunti- ja minuuttiviisarin ollessa päällekkäin hieman klo 1 jälkeen on sekuntiviisari kiertänyt 27 sekuntia uutta kierrosta, eli kellotaululla se on klo 5 ja 6 välissä.

Tehtävä 6. (Lukijan ehdottama muunnelma romanialaisesta koulutehtävästä) Olkoon

$$S_k = k + kk + kkk + \ldots + \underbrace{kk\ldots k}_{n \text{ kpl}},$$

kun $k = 1, 2, \ldots, 9$. Laske summa

$$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_9.$$

Ratkaisu, Solmu 1/2017. (Timo Kärkkäinen) Koska

$$\begin{aligned} k &= 10^0 k, \\ kk &= (10^1 + 10^0)k, \\ \underbrace{k\cdots k}_{n \text{ kpl}} &= (10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10^0)k = k\frac{10^n - 1}{9}, \end{aligned}$$

niin

$$\begin{aligned} S_k = k + kk + \cdots \underbrace{k\cdots k}_{n \text{ kpl}} &= \frac{k}{9}\sum_{i=1}^{n}(10^i - 1) \\ &= \frac{k}{9}(10^1 + 10^2 + \cdots + 10^n - n) \\ &= \frac{k}{9}\left(\frac{10^{n+1} - 1}{9} - n - 1\right) = \frac{k}{9}\frac{10^{n+1} - 9n - 10}{9}, \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} S = \sum_{k=1}^{9} S_i &= \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{9}\sum_{k=1}^{9}\frac{k}{9} \\ &= \frac{5}{9}(10^{n+1} - 9n - 10). \end{aligned}$$