



Ratkaisuja, aivan käsittämätön määrä ratkaisuja

Pääkirjoitus

Huhtikuussa ei paljon vapaa-ajan ongelmia ollut: kaikki vapaa-aika (ja osin yöunetkin) menivät tarkastaessa ratkaisuja. Olen ylioppilastutkintolautakunnan sensori. Nautin siis useamman sadan kokelaan ratkaisuista. Lisäksi olin Euroopan tyttöjen matematiikkakilpailussa (EGMO) koordinaattorina, tein alustavan tarkastuksen pohjoismaisessa matematiikkakilpailussa Suomen kilpailijoiden geometrian ratkaisuille sekä olin mukana tarkastamassa seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailun finaalityönsuorituksia Helsingissä ja Turussa.

Käytännössä urakat olivat hyvin erilaisia: kilpailuratkaisuja ei ollut tarkistettavana kovinkaan montaa. Ylioppilasaratkaisujen määrä taas oli suuri. Seitsemäsluokkalaisten finaalityönsuoritus piti tarkistaa hyvin tiukalla aikataululla, EGMO:n ratkaisut piti hoitaa parissa päivässä, pohjoismaisen ja ylioppilaspaperien kanssa oli enemmän aikaa, ylioppilaspaperien kanssa peräti koko kuukausi.

Suuria määriä ratkaisuja lukiessa ratkaisun selkeyden merkitys kasvoi. Sen huomasi hyvin myös, jos edessä oli ratkaisu, joka oli kirjoitettu kielellä, jota itse en puhu. Olin lievällä kauhulla ajatellut Saudi-Arabian ratkaisujen koordinoitua. Jos aakkoston hahmottaa, voi tarpeen tullen kokeilla kaikenlaisia verkkosanakirjoja tai muita verkkokääntimiä. Lisäksi matematiikan sanasto on monessa kielessä niin samankaltainen, että jotain voi arvatakin. Siinä vaiheessa, kun edes aakkostoa ei käsitä, menevät kaikki tällaiset vaihtoehdot kovin hankaliksi. Iloisesti yllätyin: Saudi-Arabian ratkaisut olivat nopeita ja selkeitä lukea. Osa kilpailijoista oli peräti kirjoittanut selitykset englanniksi, tai vähintään

kriittiset sanat. Kaikilla oli ratkaisun rakenne kunnossa, kaikki välttämätön, eikä mitään turhaa paperissa. Sellaisella ratkaisulla saa koordinaattorin kovin iloiseksi.

Ylioppilaspapereita lukiessa ei kieliongelmiä tullut, mutta ratkaisujen selkeyden ja esityksen tasossa oli valtavia eroja. Välillä edessä oli erinomainen paperi, jossa suurin osa ratkaisuista oli matemaattisesti kunnossa, mutta esitys tuskallinen. Välillä taas paperi, jossa matematiikka oli pielessä, mutta kokelas oli päättänyt pitää huolen siitä, että sensori ei ainakaan tipu kärryiltä. Korrelaatiota mihinkään suuntaan esityksen ja matemaattisen tason välillä en havainnut.

Pahimmilta tapauksilta olen selvästi tarkistusurallani välttynyt: kuulin EGMO:ssa kuinka jonkun vuoden kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa joku kilpailija oli kirjoittanut suttupaperit itse kehittämällään kielellä. Siis täysin omin sanoin. Suttupaperit eivät ole ensisijaisesti arvostelussa mukana, mutta niitä usein käytetään tukena, ja irtopisteitä niistä myös voidaan usein kaivaa. Kyseisessä tapauksessa ei kilpailija ollut onnistunut tuottamaan varsinaisille arkeille mitään fiksumia jossain tehtävässä, mutta sen sijaan suttupapereilla olisi ollut jotain pisteiden arvoista, paitsi että ne oli kirjoitettu kielellä, jota ei ole olemassakaan.

Hyvä esitystapa on yleensäkin matematiikassa tärkeä, mutta myös epätriviaali asia. Hyvä esitys voi tarkoittaa useita asioita. Yksityiskohtia on oltava riittävästi, mutta ei liikaa (kuten professori Jutila asian totesi ”yksityiskohdat häiritsevät asiantuntijoita”). Suorasa-

naista tekstiä on oltava matemaattisten kaavojen välissä, mutta hankala sellaista ratkaisua on lukea, jossa ei yhtään kaavaa ole, vaan kaikki on vain selitetty sanallisesti. Kansainvälisissä kilpailuissa tämä on erityisen kriittistä: niitä suomenkielisiä pitkiä selityksiä harvoin muut kuin omat joukkueenjohtajat ymmärtävät. Koordinoitavina sellaiset ratkaisut ovat hankalia. Usein myös matemaattinen täsmällisyys kärsii kaavatomuudesta.

Olin ehkä odottanut näkeväni EGMO:ssa paljon erilaisia ratkaisuja. Kuitenkin koordinoimani tehtävän luonne oli sellainen, että yhtä vaille jokainen toimiva ratkaisu noudatti samaa kaavaa. Vaihtoehtoisia ratkaisuja olisi ollut, mutta ei helposti tyrkyllä olevaa. Tämä yksi ratkaisu puolestaan nojautui vähän epätavallisempaan konstruktion ja tulokseen. Ylioppilaspapereissa suurin osa toimivista ratkaisuista meni tiettyjen yleisten linjojen mukaan. Eniten hihkuin innosta lukiessani pitkän matematiikan tehtävää 12. Siinä piti selvittää tietyn neliön ja kolmion pinta-alojen suhde. Kolmio sattui olemaan suorakulmainen, mutta sitä tehtävässä ei kerrottu, jolloin osa ratkaisua oli tämän verifioiminen, paitsi jos keksi tavan, jossa sitä ei tarvittu. Tähän oli kaksi vaihtoehtoa: kosinilauseen käyttö, jolloin ratkaisu oli suoraviivainen ja toimiva, mutta ei erityisen elegantti. Toinen vaihtoehto oli Heronin kaavan käyttö, ja omaa silmääni tämä miellytti valtavasti: kaikki tarkistelut saattoi sivuuttaa. Koko tehtävä ratkesi oleellisesti ottaen yhdellä laskulla.

Seitsemäsluokkalaisten finaaleissa tyypillisesti näkee valtavasti erilaisia ratkaisuja. Teoriaosaamista ei ole valtavasti, mikä heijastuu tehtävävalinnoissa, eli tehtävänkään eivät valtavasti teoriaa vaadi, mutta mones-

ta tehtävästä löytyy joku ongelmakomponentti. Standardiratkaisutapaa ei siis välttämättä ainakaan seitsemäsluokkalaisten silmissä ole, vaikka joissakin tehtävissä sellainen ehkä omiin silmiini olisikin. Viimeisenä tehtävänä Helsingin finaalissa oli geometriaa. Tehtävässä piti laskea tiettyjen kulmien koot. Kilpailukoulutuksen läpikäynyt (tai minkä tahansa tavallisen geometrian monisteen läpilukenuk) aikuinen ryhtyy siinä vaiheessa laskemaan kulmia eksplisiittisesti kulma kerrallaan, ja kunhan homman tekee huolellisesti, pääsee oikeaan ratkaisuun. Osa seitsemäsluokkalaistakin toimi näin. Epätavallisempaa ratkaisutapana osa oli huomannut, että kuvassa oli kulmia, joita ikäänkuin siirrettiin kolmiosta toiseen, jolloin koko tehtävän ratkaisuksi riitti laskea ensin kolmen siirron kontribuutio (joka oli triviaali lasku), ja sen jälkeen jakaa tämä kolmella, jonka jälkeen yhden ja kahden siirron kontribuutiot tipahtivat suoraan käteen.

Harmillista tässä kaikessa on se, että usein standardiratkaisut on helpompi kirjoittaa kuin poikkeukselliset tai kekseliäät ratkaisut. Jotta tämä olisi vielä pahempaa, on kekseliäiden ratkaisujen esitystavan tyypillisesti oltava parempi, koska sama ratkaisu ei tule vastaan joka toisessa paperissa, jolloin jo pelkkä ratkaisun hahmottaminen voi olla haastavaa (saati sitten, jos siinä on pieni virhe). Mutta silloin, silloin kun saa eteensä epätavallisen ratkaisun, jonka esitys on kunnossa... Ne hetket tekevät kaikesta tarkastamisesta vaivan arvoista.

Mukavaa kesää!

Anne-Maria Ernvall-Hytönen