Vaihtelevia summia

Pekka Alestalo
Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
matematiikan ja systeemianalyysin laitos
pekka.alestalo@aalto.fi

Summaa sarja

Käsittelin aikaisemmassa kirjoituksessani [1] harmonisen sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

hajaantumista, johon liittyy myös viite [2]. Tässä jatko-osassa tutkitaan, mitä tapahtuu, kun joihinkin sarjan termeihin vaihdetaan miinus-merkit ja termien järjestystä vaihdellaan.

Vaikka monille sarjoille voidaan tehdä aivan samoja operaatioita kuin äärellisille summille, niin toisinaan täytyy olla valppaana. Esimerkiksi yksi helpoimmista ”0 = 1-todistuksista” näyttää seuraavalta:

$$\begin{aligned}
0 &= 0 + 0 + 0 + 0 + \dots \\
&= (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \dots \\
&= 1 + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + \dots \\
&= 1 + 0 + 0 + 0 + \dots \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Tämä kyseenalainen päättely liittyy myös siihen, mitä sarjan suppeneminen oikeastaan tarkoittaa. Ainakaan se ei tarkoita sitä, että ”kaikki sarjan termit lasketaan kerralla yhteen”, koska tämä ei ole käytännössä mahdollista. Asiaa täytyykin tutkia raja-arvona äärellisten osasummien kautta. Jokaisesta sarjasta

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{1}$$

voidaan muodostaa sen osasummien jono (s_n) laskemalla yhteen n ensimmäistä termiä:

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.
\end{aligned}$$

Sanotaan, että sarja (1) *suppenee*, jos osasummien jonolla on (äärellinen) raja-arvo s:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

Tämä luku s on sarjan (1) *summa*.

Tässä yhteydessä ei ole syytä käydä läpi kaikkia sarjojen ominaisuuksia ja laskusääntöjä, koska ne löytyvät kaikista aihetta käsittelevistä kirjoista (kuten [3] ja [4]) eikä niitä juurikaan tarvita tässä kirjoituksessa. Totean kuitenkin, että 0 = 1-laskun ongelma piilee toisen ja kolmannen rivin yhtäsuuruudessa, jota ei voi perustella sarjojen laskusäännöillä, sillä taustalla oleva geometrinen sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots$$

suhdelukuna $q = -1$ hajaantuu. Sen sijaan suppenevaan sarjaan voidaan lisätä ylimääräisiä sulkuja mihin tahansa kohtiin ilman, että sarjan summa muuttuu[1].

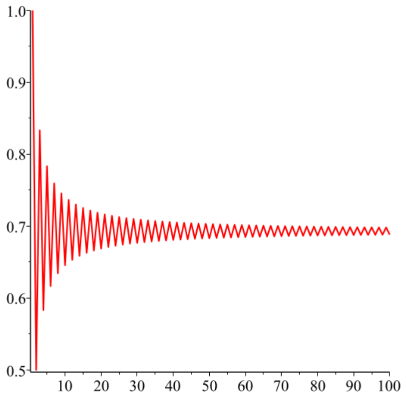
Vuorottelevasti harmoninen

Harmonisesta sarjasta saadaan *vuorotteleva*, kun joka toisen termin etumerkki vaihdetaan vastakkaiseksi:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \tag{2}$$

Perinteisistä syistä sarja alkaa positiivisella termillä $+1$; pelkkä $(-1)^k/k$ tuottaa tapauksessa $k = 1$ ensimmäiseksi termiksi -1.

Toisin kuin tavallinen harmoninen sarja, vuorotteleva harmoninen sarja suppenee. Tämä tarkoittaa mm. sitä, ettei sarjan suppeneminen riipu pelkästään siitä, kuinka nopeasti sen yleinen termi lähestyy nollaa.



Sarjan 100 ensimmäistä osasummaa.

Suppeneminen näyttää hyvin uskottavalta yllä olevan kuvion perusteella, johon on piirretty sarjan 100 ensimmäistä osasummaa; havainnollisuuden vuoksi peräkkäiset pisteet on yhdistetty janoilla. Lisäksi kuvion perusteella sarjan summa näyttää olevan hieman alle 0,7. Myös intuitiivinen perustelu suppenemiselle on kuvion perusteella helppo keksiä: Sarjan termien etumerkkien vuorottelu aiheuttaa kuvaajan sahalaitaisuuden, ja koska jono $(1/k)$ on vähenevä ja lähestyy nollaa, kun $k \to \infty$, niin osasummien heilahtelu vaimenee ja niillä on raja-arvo. Tarkempi perustelu liittyy siihen, että parillisia indeksejä vastaavien osasummien jono (s_{2n}) on kasvava ja parittomia indeksejä vastaavien osasummien jono (s_{2n-1}) vähenevä. Sivuutan kuitenkin nämä päättelyt[2], koska sarjan summakin voidaan laskea tarkasti alla esitetyllä tavalla!

Tehtävä 1. Perustele yllä mainitut ominaisuudet ja osoita, että sarja suppenee.

Kun geometrisen sarjan summakaavaan sijoitetaan suhdeluvuksi $q = -x$, niin se tulee muotoon

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}.$$

Integroimalla yhtälön molemmat puolet välillä $0 \le x \le 1$ saadaan tuloksena vuorottelevan harmonisen sarjan summaksi

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2.$$

Päättely on kuitenkin hieman epäilyttävä, sillä vasemmalla puolella tehty *sarjan integroiminen termeittäin* pitäisi perustella tarkemmin; erityisesti sen vuoksi, ettei sarja edes suppene integroimisvälin toisessa päätepisteessä $x = 1$. Asia voidaan korjata integroimalla äärellisen geometrisen summan kaava ja tutkimalla sen raja-arvoa. Jätän sen harjoitustehtäväksi lukijalle.

Tehtävä 2. a) Millainen yhtälö saadaan, kun kaavan

$$\begin{aligned} 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-x)^{n-1} &= \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} \\ &= \frac{1}{1+x} - (-1)^n\frac{x^n}{1+x} \end{aligned}$$

eri osat integroidaan välillä $0 \le x \le 1$?
b) Osoita, että

$$0 < \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx < \frac{1}{n+1}$$

kaikilla $n \in \mathbf{N}$.
c) Perustele tarkasti a- ja b-kohtien avulla vuorottelevan harmonisen sarjan summa $\ln 2$.

Sekoitellaan termejä

Tutkitaan, mitä tapahtuu, kun vuorottelevan harmonisen sarjan termejä yhdistellään seuraavalla tavalla:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} &= \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{6} &= \frac{1}{6}, \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{10} &= \frac{1}{10}, \\ \frac{1}{7} - \frac{1}{14} &= \frac{1}{14} \end{aligned}$$

[1] Hienosti sanottuna uudelleen sulutetun sarjan osasummien jono on alkuperäisen sarjan osasummien jonon *osajono*, joten sillä on sama raja-arvo.

[2] Vastaava yleinen tulos on Leibnizin vuorottelevia sarjoja koskeva suppenemistesti.

jne. Tällöin kaikki parittoman nimittäjän termit häviävät sarjasta, mutta muotoa $-1/4$, $-1/8$, $-1/12, \ldots$ olevat termit jäävät käyttämättä. Tulos voidaan tiivistää seuraavaan kaavaan:

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\ldots \\ =\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots \\ =\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots\right) \\ =\frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

Systemaattisemmin selitettynä sarjan (2) termien järjestystä on muutettu niin, että yhden positiivisen termin jälkeen vähennetään seuraavat kaksi negatiivista termiä, joita ei vielä ole käytetty. Sen jälkeen sama toistetaan aloittamalla ensimmäisestä positiivisesta termistä, jota ei ole aikaisemmin käytetty. Kokeilemalla huomataan, että yleinen muoto kolmelle peräkkäiselle termille on

$$\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k},$$

kun $k=1,2,3,\ldots$ Tätä ryhmittelyä toistetaan loputtomiin, jolloin tuloksena on kaava

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots=\frac{1}{2}\ln 2.$$

Mitä tämä tarkoittaa? Yksinkertaisesti sitä, että yllä kuvatulla uudelleenjärjestelyllä vuorottelevan harmonisen sarjan summa puolittuu, vaikka kokonaisuudessa ovat mukana täsmälleen samat summattavat termit[3]!

Saatua tulosta voidaan käyttää myös toisenlaiseen uudelleenjärjestelyyn. Koska yllä olevan perusteella

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ln 2&=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots \\ &=0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+0+\ldots,\end{aligned}$$

niin laskemalla tämä yhteen[4] vuorottelevan harmonisen sarjan (2) kanssa saadaan

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\ln 2&=(1+0)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+0\right)+ \\ &\quad\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+0\right)+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)+\ldots \\ &=1+0+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+0+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots \\ &=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots\end{aligned}$$

Tässä siis kahden positiivisen termin jälkeen otetaan seuraava aikaisemmin käyttämätön negatiivinen termi jne.

Todetaan vielä lopuksi, että toistamalla sääntöä ”yksi positiivinen ja neljä seuraavaa negatiivista” saadaan uudelleenjärjestely, jonka summa on 0; ts.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{8k-6}-\frac{1}{8k-4}-\frac{1}{8k-2}-\frac{1}{8k}\right)=0.$$

Tämän voi perustella tutkimalla erikseen kunkin viiden summan asymptoottista käyttäytymistä Eulerin ja Mascheronin vakion (viite [5]) avulla, mutta jääköön se (huomattavasti edellisiä hankalammaksi) harjoitustehtäväksi. Toinen systemaattisempi tapa on käyttää ns. residylaskentaa viitteen [6] kohdan Example 2 tapaan, mutta tämä menee jo kokonaan lukiomatematiikan ulkopuolelle.

Viitteet

[1] Pekka Alestalo: Harmoninen sarja. Matematiikkalehti Solmu 3/2014, s. 10–11. `http://matematiikkalehtisolmu.fi/2014/3/harmsarja.pdf`

[2] Anne-Maria Ernvall-Hytönen: Summien arviointi integraalien avulla. Matematiikkalehti Solmu 1/2015, s. 16–20. `http://matematiikkalehtisolmu.fi/2015/1/summien_arviointi_integraaleilla.pdf`

[3] P. Harjulehto, R. Klén, M. Koskenoja: Analyysia reaaliluvuilla. Korjattu 3. painos. Unigrafia, 2014.

[4] Juhani Pitkäranta: Calculus Fennicus. `https://github.com/avoimet-oppimateriaalit-ry/calculus-fennicus`

[5] `https://fi.wikipedia.org/wiki/Eulerin-Mascheronin_vakio`

[6] `https://en.wikipedia.org/wiki/Residue_theorem`

[3]Yleisemmin voidaan osoittaa, että kun kiinnitetään ensin reaaliluku r, niin vuorottelevan harmonisen sarjan termit voidaan järjestää niin, että uusi sarja suppenee kohti lukua r. Tämä on erikoistapaus ns. Riemannin uudelleenjärjestelylauseesta, joka pätee monille muillekin sarjoille.

[4]Nollien lisääminen ei vaikuta sarjan summaan, mutta niiden avulla yhteenlaskettavat termit osuvat kohdalleen.