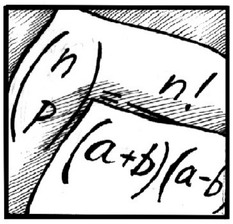


Juuson integraalikaava[1]

Markku Sointu
Soppeenharjun koulu

Luonnollisten lukujen summa ei voinut olla $-\frac{1}{12}$, mutta luvulla $-\frac{1}{12}$ ja kyseisellä sarjalla $1+2+3+4+\cdots$ oli ”kohtalonyhteys”.

Juuso oli sarjoja manipuloidessaan havainnut, että

$$\begin{aligned} S_1 &= 1-2+3-4+5-6 \vdots \\ S_1 &= \quad 1-2+3-4+5 \vdots -6 \\ 2S_1 &= 1-1+1-1+1-1 \vdots -6. \end{aligned}$$

Eli $2S_1$ sisälsi sarjan $1-1+1-1+1-\ldots$ Mikäli sarja katkaistiin, saatiin

$$1-1+1-1+1-1 \vdots -6$$

tai yleisesti

$$1-1+1-1+1-\cdots-1 \vdots -n$$

tai

$$1-1+1-1+1-\cdots+1 \vdots +n.$$

Sarjan $2S_1$ osasummat olivat siis vuoroin negatiivisia ja positiivisia. Lisäksi niiden itseisarvot kasvoivat rajatta.

Juuso nimesi sen, että luvun n vaikutusta ei huomioitu, *unohdukseksi.*

Koska katkaiseminen oli kiellettyä, sarjan $2S_1$ saattoi nähdä muodossa

$$1-1+1-1+\cdots$$

Sen osasummien jono on

$$1,0,1,0,\ldots = a_n.$$

Muodostetaan nyt sarjan $1+0+1+0+\cdots$ osasummien keskiarvojen jono:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1}, \frac{1+0}{2}, \frac{1+0+1}{3}, \frac{1+0+1+0}{4}, \frac{1+0+1+0+1}{5}, \ldots \\ &= 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \ldots \\ &= 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \cdots = \overline{a_n} \end{aligned}$$

ja

$$\lim_{n\to\infty} \overline{a_n} = \frac{1}{2}.$$

Lukua $\frac{1}{2}$ sanotaan sarjan $1-1+1-1+\cdots$ Cesaron summaksi.

$$S_2 = 1-1+1-1+\cdots = \frac{1}{2}$$

oli ”outo tulos”.

Cesaron suppenemisen vuoksi sitäkin voitiin pitää ”oikeutettuna”. Näillä eväillä (*unohdus* ja Cesaron suppeneminen) saatiin

$$1+2+3+4+\cdots = -\frac{1}{12}.$$

[1] Ks. myös Markku Soinnun aiempi kirjoitus *Juuso äärettömän äärellä* numerossa 1/2017, `https://matematiikkalehtisolmu.fi/2017/1/aareton.pdf`

Tämä tulos oli silti mielenkiintoinen! Juuson netistä löytämä kaava oli

$$\zeta(-1) = \int_0^\infty \frac{\sqrt{1+t^2}\sin(-\arc\tan t)}{e^{\pi t}+1} dt = -\frac{1}{12}. \quad (1)$$

Eli integraalin ja sarjan välillä oli mainittu yhteys. Mikä oli integraaliesityksen *unohdus*?

Juuso asetti itselleen tavoitteen. Hän halusi laatia sarjalle

$$1+2+3+\cdots = \sum_{k=1}^{\infty} k$$

integraaliesityksen. Integraalin piti laskea myös osasummat

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Mikäli halusi esittää summan $\sum_{k=1}^n k$ tulomuodossa, kannatti kirjoittaa allekkain $S_n = \sum_{k=1}^n k$ lähtien ensimmäisestä termistä ja uudelleen lähtien viimeisestä termistä:

$$\begin{cases} S_n = 1+2+3+4+\cdots+n \\ S_n = n+(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+1, \end{cases}$$

josta summaamalla saatiin

$$2S_n = (n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1),$$

eli

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Helpoin tapa esittää tämä integraalina oli tietenkin

$$\int_0^n k dk = \left[\frac{k^2}{2}\right]_0^n = \frac{n^2}{2}$$

ja lisätä tähän $\frac{n}{2}$, jolloin saadaan

$$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Luonnollisten lukujen summa oli siis

$$\int_0^n k dk + \frac{n}{2}.$$

Juusoa kiinnosti kuitenkin, mitä tekemistä luonnollisten lukujen summalla oli Riemannin zeta-funktion ja integraalin

$$\int \frac{t}{1+e^{\pi t}} dt$$

kanssa. Juuson intuitio kertoi, että

$$\int_0^n \frac{t}{e^{\pi t}+1} dt - \int_{-n}^0 \frac{t}{e^{\pi t}+1} dt + \frac{n}{2} \approx \frac{n(n+1)}{2}, \quad (2)$$

koska muuttujan t arvojen kasvaessa nimittäjä kasvoi paljon osoittajaa nopeammin, ei integraali nollasta lukuun n voinut olla suuri. Itse asiassa se oli $\frac{1}{12}$ (tämän Juuso arvasi heti, koska lukua $\frac{1}{12}$ tuli ovista ja ikkunoista). Kun muuttuja t sai itseisarvoiltaan suuria negatiivisia arvoja, termi $e^{\pi t}$ läheni nollaa ja integroitava käyttäytyi kuin t.

Juuso tiesi, että sen mitä intuitio kertoi, analyysi todisti. Todistettavana oli Juuson integraalikaava (JIK)

$$-\int_{-n}^0 \frac{t}{e^{\pi t}+1} dt + \int_0^n \frac{t}{1+e^{\pi t}} + \frac{n}{2} \approx \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^n k,$$

missä $\approx$ piti tulkita tarkoittavan sitä, että luvun n suurilla arvoilla luvut olivat hyvin lähellä toisiaan.

Kaavan oikeaksi osoittaminen edellytti integraalin

$$\int \frac{t}{1+e^{\pi t}} dt$$

laskemista. Juuso käytti seuraavaa menettelyä: Hän valitsi muuttujat u ja v. Niiden tulon derivaatta oli

$$Duv = u'v + uv',$$

josta integroimalla puolittain sai

$$uv = \int u'v + \int uv',$$

eli

$$\int u'v = uv - \int uv'.$$

Valitsemalla nyt

$$u' = \frac{1}{1+e^{\pi t}} \quad \text{ja} \quad v = t,$$

jolloin

$$u = t - \frac{\ln(e^{\pi t}+1)}{\pi} \quad \text{ja} \quad v' = 1,$$

saatiin

$$\begin{aligned} &\int \frac{t}{1+e^{\pi t}} dt \\ &\quad = t^2 - \frac{t\ln(e^{\pi t}+1)}{\pi} - \int \left(t - \frac{\ln(e^{\pi t}+1)}{\pi}\right) dt + C \\ &\quad = t^2 - \frac{t\ln(e^{\pi t}+1)}{\pi} - \frac{t^2}{2} + \int \frac{\ln(e^{\pi t}+1)}{\pi} dt + C. \end{aligned}$$

Juuso arveli, että alkeisfunktioiden avulla ei voisi laatia funktiota, jonka derivaatta olisi $\ln(e^{\pi t}+1)$. Tähän tarvittiin polylogaritmifunktiota

$$\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s} = z + \frac{z^2}{2^s} + \frac{z^3}{3^s} + \cdots,$$

joka on itse asiassa eräänlainen zeta-funktion yleistys: $\zeta(s) = \mathrm{Li}_s(1)$. Juuso listasi sen perusominaisuuksia:

- $\mathrm{Li}_2(x) = x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \cdots$
- $\frac{\mathrm{Li}_2(-1)}{\pi^2} = -\frac{1}{12}$

- $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Li}_2(-e^{-\pi n}) = 0$
- $\int \ln(e^{\pi t}+1)dt = -\dfrac{\mathrm{Li}_2(-e^{\pi t})}{\pi} + C.$

Nämä työkalut pakissaan Juuso ryhtyi toimeen:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{t}{e^{\pi t}+1}dt \\
&= t^2 - \frac{t\ln(e^{\pi t}+1)}{\pi} - \frac{t^2}{\pi^2} - \frac{\mathrm{Li}_2(-e^{\pi t})}{\pi^2} + C \\
&= \frac{2\pi^2 t^2 - 2\pi t\ln(e^{\pi t}+1) - \pi^2 t^2 - 2\mathrm{Li}_2(-e^{\pi t})}{2\pi^2} + C \\
&= \frac{\pi t(\pi t - 2\ln(e^{\pi t}+1)) - 2\mathrm{Li}_2(-e^{\pi t})}{2\pi^2} + C \\
&= \frac{t^2}{2} - \frac{t\ln(e^{\pi t}+1)}{\pi} - \frac{\mathrm{Li}_2(-e^{\pi t})}{\pi^2} + C,
\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned}
&\int_0^n \frac{t}{e^{\pi t}+1}dt \\
&= \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t\ln(e^{\pi t}+1)}{\pi} - \frac{\mathrm{Li}_2(-e^{\pi t})}{\pi^2}\right]_0^n \\
&= \frac{n^2}{2} - \frac{n\ln(e^{\pi n}+1)}{\pi} - \frac{\mathrm{Li}_2(-e^{\pi n})}{\pi^2} + \frac{\mathrm{Li}_2(-1)}{\pi^2}
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
&-\int_{-n}^0 \frac{t}{e^{\pi t}+1}dt \\
&= \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t\ln(e^{\pi t}+1)}{\pi} - \frac{\mathrm{Li}_2(-e^{\pi t})}{\pi^2}\right]_{-n}^0 \\
&= \frac{n^2}{2} - \frac{n\ln(e^{-\pi n}+1)}{\pi} - \frac{\mathrm{Li}_2(-e^{-\pi n})}{\pi^2} + \frac{\mathrm{Li}_2(-1)}{\pi^2}.
\end{aligned}$$

Wolfram alphan avulla Juuso laski

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{2} - \frac{n\ln(e^{\pi n}+1)}{\pi} - \frac{\mathrm{Li}_2(-e^{\pi n})}{\pi^2} + \frac{\mathrm{Li}_2(-1)}{\pi^2}\right) \\
&\qquad = \int_0^\infty \frac{t}{1+e^{\pi t}}dt = \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Juusolla oli kuitenkin aktiivisen matematiikan harrastajan mielenlaatu. Siksi hän halusi varmistautua tästä. Mikäli tulos piti paikkansa ja koska

$$\frac{\mathrm{Li}_2(-1)}{\pi^2} = -\frac{1}{12},$$

piti olla myös

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{2} - \frac{n\ln(e^{\pi n}+1)}{\pi} - \frac{\mathrm{Li}_2(-e^{\pi n})}{\pi^2}\right) = \frac{1}{6}. \quad (3)$$

Juuso arvioi aluksi, että $n\ln(e^{\pi n}+1) \approx \pi n^2$, sillä $\ln(e^{\pi n}) = \pi n$, ja koska luvut $e^{\pi n}$ ja $1+e^{\pi n}$ ovat vain yhden päässä toisistaan, on suurilla luvun n arvoilla niiden logaritmien välinen heitto mitätön. Juuso käytti tätä arvioidakseen, että

$$\begin{aligned}
&\frac{n^2}{2} - \frac{n\ln(e^{\pi n}+1)}{\pi} - \frac{\mathrm{Li}_2(-e^{\pi n})}{\pi^2} \\
&\qquad \approx \frac{n^2}{2} - n^2 - \frac{\mathrm{Li}_2(-e^{\pi n})}{\pi^2} \\
&\qquad = -\frac{n^2}{2} - \frac{\mathrm{Li}_2(-e^{\pi n})}{\pi^2}.
\end{aligned}$$

Juuso halusi, että tämä poikkesi luvusta $\frac{1}{6}$ vähemmän kuin 10^{-18}, ja näin kävikin, kun $n \geq 13$.

Nyt piti vielä selvittää lausekkeen

$$\frac{n^2}{2} - \frac{n\ln(e^{-\pi n}+1)}{\pi} - \frac{\mathrm{Li}_2(-e^{-\pi n})}{\pi^2} + \frac{\mathrm{Li}_2(-1)}{\pi^2}$$

käytös, kun n oli suuri. Koska

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{Li}_2(-1)}{\pi^2} = -\frac{1}{12},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{Li}_2(-e^{-\pi n})}{\pi^2} = 0$$

ja

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(e^{-\pi n}+1)}{\pi} = 0,$$

sekä

$$\frac{n\ln(e^{-\pi n}+1)}{\pi}$$

oli hyvin lähellä lukua n^2, totesi Juuso, että

$$\int_{-n}^0 \frac{-t}{1+e^{\pi t}}dt \approx \frac{n^2}{2} - \frac{1}{12},$$

eli

$$\begin{aligned}
&\int_{-n}^0 \frac{-t}{1+e^{\pi t}}dt + \int_0^n \frac{t}{1+e^{\pi t}}dt + \frac{n}{2} \\
&\qquad \approx \frac{n^2}{2} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^n k.
\end{aligned}$$

JIK oli näin osoitettu paikkansa pitäväksi. Juuso halusi vielä testata kaavan tarkkuutta pienillä luvun n arvoilla:

n	$\sum_{k=1}^n \frac{n(n+1)}{2}$	JIK by Wolfram alpha
2	3	3.000...
5	15	15.000...
50	1275	1275.000...
100	5050	5050.000...
495	122760	122760.000...
1012	512578	512578.000...
6917	23925903	23925903.000...

JIK laski luonnollisten lukujen summan lukuun n asti ja hajaantui niin kuin asiaan kuului.

Juuso oli keksinyt JIK:n hyvin lyhyessä ajassa. Matematiikassa on paljon esimerkkejä, joissa hyvin ilmeiseltä tuntuvan asian oikeaksi osoittaminen oli hankalaa.

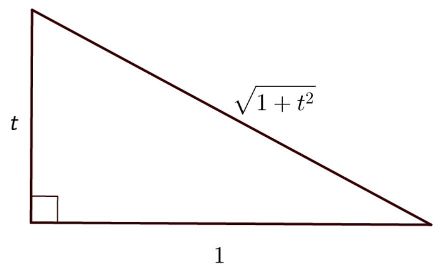
Juuso palasi nyt takaisin alkuperäiseen ongelmaan. Hän lähti liikkeelle integraalista (1)

$$\zeta(-1) = \int_0^\infty \frac{\sqrt{1+t^2}\sin(-\arctan t)}{e^{\pi t}+1}dt.$$

Integroitava funktio oli helppo saattaa muotoon

$$-\frac{t}{e^{\pi t}+1},$$

sillä olihan $\sin(\arctan t) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.



Kaava (1) saatiin siis muotoon

$$\int_0^\infty \frac{-t}{e^{\pi t}+1}dt = -\frac{1}{12}.$$

Mikäli halusi laskea osasummia, piti käyttää Juuson integraalikaavaa JIK:iä:

$$-\int_{-n}^0 \frac{t}{e^{\pi t}+1}dt + \int_0^n \frac{t}{e^{\pi t}+1}dt + \frac{n}{2} \approx \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{(JIK)},$$

missä vasemman puolen ensimmäinen ja viimeinen termi ovat *unohduksia* ja keskimmäisen termin arvo on $\frac{1}{12}$.

Mikäli edelleen halusi ”uskoa”, että

$$1+2+3+4+5+\cdots = -\frac{1}{12},$$

piti siis tehdä *unohdus*, eli laskea vain $\int_0^n \dfrac{t}{e^{\pi t}+1}dt$, vaikka siihen piti lisätä $\dfrac{n}{2} + \int_{-n}^0 \dfrac{-t}{e^{\pi t}+1}dt$.

Verkko-Solmun oppimateriaalit

Osoitteesta `matematiikkalehtisolmu.fi/oppimateriaalit.html` löytyvät oppimateriaalit:

Sata lukion matematiikan tehtävää (Markku Halmetoja)

Suppeaa suhteellisuusteoriaa alusta alkaen (Lasse Pantsar)

Lukion matemaattisen analyysin mestarikurssi (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)

Ensiaskeleet Einsteinin avaruusaikaan, osa 1: Kinematiikka: aika, paikka ja liike (Teuvo Laurinolli)

Ensiaskeleet Einsteinin avaruusaikaan, osa 2: Dynamiikka: liikelait, liikemäärä ja energia (Teuvo Laurinolli)

Kilpailumatematiikan opas (Matti Lehtinen)

Geometrian perusteita (Matti Lehtinen)

Geometria (K. Väisälä)

Lukualueiden laajentamisesta (Tuomas Korppi)

Jaksolliset desimaaliesitykset algebrallisesta näkökulmasta (Jaska Poranen ja Pentti Haukkanen)

Algebra (Tauno Metsänkylä ja Marjatta Näätänen)

Algebra (K. Väisälä)

Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 1: Mekaniikkaa (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)

Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 2: Sähköoppia (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)

Lukuteorian helmiä lukiolaisille (Jukka Pihko)

Matematiikan peruskäsitteiden historia (Erkki Luoma-aho)

Matematiikan historia (Matti Lehtinen)

Reaalianalyysiä englanniksi (William Trench)