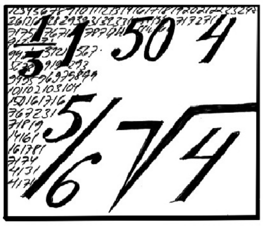

Lumoava yhtälö ja hieno epäyhtälö

Lehtori K.

Solmun twiittisivulle [1] on ilmestynyt mielenkiintoinen probleema: Määritettävä yhtälön

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=4 \tag{1}$$

positiiviset kokonaislukuratkaisut. Kyseessä on ns. *diofanttinen yhtälö*. Nimitys juontuu kreikkalaisesta matemaatikosta Diofantoksesta[1] joka tutki tämän tapaisia yhtälöitä ja laati niistä historian myrskyjen yli osin säilyneen kirjankin. Erinäisten vaiheiden jälkeen se päätyi latinaksi käännettynä Fermat'n[2] käsiin tunnetuin seurauksin. Hän kirjoitti kuuluisan "viimeisen lauseensa" Diofantoksen kirjan marginaaliin.

Lukuteorian kurssin suorittanut lukiolainenkin tuntee kahden tuntemattoman ensimmäisen asteen lineaariset diofanttiset yhtälöt. Yhtälö (1) on kuitenkin huomattavasti niitä hankalampi ja sen saatteessa todetaan, että 95 % ihmisistä ei kykene sitä ratkaisemaan. Parin tunnin pyörittelyn jälkeen lehtorinkin oli myönnettävä kuuluvansa ihmiskunnan suureen enemmistöön. Kyseessä ei todellakaan ole iltapäivälehtien pulmapalstakysymys. Twiitissä olleesta linkistä pääsee ratkaisusta kertovalle sivulle. Käy ilmi, että ongelman selvittäminen vaatii maallikon ulottumattomissa olevia sofistikoituja lukuteorian menetelmiä ja että yhtälön pienin positiivinen ratkaisukolmikko koostuu 80-numeroisista luvuista! Lisäksi prosenttiluku 95 % tarkentuu luvuksi 99,999995 %. Havaitsemassamme maailmankaikkeudessa arvioidaan olevan 10^{80} atomia, mikä antaa perspektiiviä ratkaisun jyhkeydestä. Jos (x, y, z) on ratkaisukolmikko ja k $(\neq 0)$ mikä tahansa kokonaisluku, niin myös (kx, ky, kz) toteuttaa yhtälön. Sillä on siis ääretön määrä toinen toistaan suurempia ratkaisuja. On varsin huikea ajatus, että kun tuollaiset luvut sijoitetaan yhtälön (1) vasemmalle puolelle, saadaan tulokseksi kuitenkin tasan 4.

Yhtälön (1) vasen puoli on muuttujien suhteen symmetrinen, mikä tarkoittaa, että jos mitkä tahansa kaksi luvuista x, y, z vaihtavat paikkaa, niin lauseke pysyy ennallaan. Tästä juontuukin lukiolaiselle sopiva harjoitus: *Muunna yhtälö (1) yhtäpitävästi kokonaiskertoimiseksi polynomiyhtälöksi* $g(p, q, r) = 0$*, missä*

$$\begin{aligned} p &= x+y+z, \\ q &= xy+yz+zx, \\ r &= xyz. \end{aligned}$$

Kirjaimilla laskeminen aloitetaan nykyisin varsinaisesti lukiossa, joten tämä muuntotehtävä on kohtuullisen hyvä harjoitus kynällä tehtäväksi. Voi sitä toki yrittää CAS-laskimellakin. Ratkaisu annetaan tämän kirjoituksen lopussa.

Lausekkeita p, q ja r kutsutaan kolmen muuttujan *perussymmetrisiksi lausekkeiksi*. Yleisesti voidaan todistaa, että mikä tahansa symmetrinen algebrallinen lauseke voidaan kirjoittaa muotoon, jossa esiintyy vain ko. muuttujamäärän perussymmetriset lausekkeet.

[1] Diofantos Aleksandrialainen (200–284), kreikkalainen matemaatikko.

[2] Pierre de Fermat(1601–1665), ranskalainen matemaatikko.

Yhtälön (1) vasen puoli on muutenkin kiinnostava. Nimittäin kaikilla $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ on voimassa *Nesbittin epäyhtälö*

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}, \tag{2}$$

missä yhtäsuuruus pätee, jos ja vain jos $x = y = z$. A.M. Nesbitt julkaisi epäyhtälönsä vuonna 1903 ([2]); pikaisella nettiselauksella hänestä ei löytynyt tarkempia henkilötietoja. Epäyhtälön todistamiseen tarvitsemme yksinkertaiseen periaatteeseen nojautuvaa aputulosta. Nimittäin, jos lukukolmikosta $(1, 2, 3)$ on tehtävä arvoltaan suurin lineaarikombinaatio siten, että kertoimet tulevat lukujoukosta $\{5, 4, 6\}$, niin suurin on kerrottava suurimmalla, keskimmäinen keskimmäisellä ja pienin pienimmällä. Suurin arvo on siis $6 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 32$. Kaikki muut tavat valita kertoimet johtavat pienempään arvoon. Tämä pätee yleisesti: Jos

$$0 < x \leq y \leq z \quad \text{ja} \quad 0 < a \leq b \leq c,$$

niin epäyhtälöt

$$\begin{aligned} ax + by + cz &\geq ax + by + cz, \\ ax + by + cz &\geq bx + cy + az, \\ ax + by + cz &\geq cx + ay + bz, \end{aligned}$$

ja myös niiden summana saatu epäyhtälö

$$3(ax + by + cz) \geq (a + b + c)\underbrace{(x + y + z)}_{=p} \tag{3}$$

ovat voimassa. Epäyhtälössä (3) pätee yhtäsuuruus, jos ja vain jos $x = y = z$ tai $a = b = c$.

Kuten jo aikaisemmin totesimme, epäyhtälön (2) vasen puoli pysyy ennallaan, vaikka muuttujat vaihtaisivat paikkojaan. Voimme siksi rajoituksetta olettaa, että $0 < x \leq y \leq z$, joten

$$p - x \geq p - y \geq p - z > 0.$$

Tällöin näiden erotusten käänteisluvut ovat vastakkaisessa suuruusjärjestyksessä, eli

$$0 < \frac{1}{p-x} \leq \frac{1}{p-y} \leq \frac{1}{p-z}.$$

Sijoittamalla epäyhtälöön (3)

$$a = \frac{1}{p-x}, \quad b = \frac{1}{p-y}, \quad c = \frac{1}{p-z}$$

saamme

$$\begin{aligned} &3\Big(\frac{x}{p-x} + \frac{y}{p-y} + \frac{z}{p-z}\Big) \\ &\qquad \geq \frac{p}{p-x} + \frac{p}{p-y} + \frac{p}{p-z} \\ &\qquad = 3 + \Big(\frac{x}{p-x} + \frac{y}{p-y} + \frac{z}{p-z}\Big), \end{aligned}$$

mistä seuraa

$$2\Big(\frac{x}{p-x} + \frac{y}{p-y} + \frac{z}{p-z}\Big) \geq 3,$$

ja edelleen

$$\frac{x}{p-x} + \frac{y}{p-y} + \frac{z}{p-z} \geq \frac{3}{2}. \tag{4}$$

Tämä on sama kuin todistettava epäyhtälö (2). Avuksi kehitetyn epäyhtälön (3) yhtäsuuruusehdon mukaan (4):ssä pätee yhtäsuuruus, jos ja vain jos $x = y = z$.

Muuntotehtävän ratkaisu on $p^3 - 6pq + 7r = 0$.

Ps. Joissakin wiki-lähteissä, esim. [3] ja [4], annetaan ymmärtää, että Nesbittin epäyhtälö toimisi ainoastaan positiivisille kokonaisluvuille. Osoitimme, että se on voimassa positiivisille reaalilukukolmikoille. Helposti nähdään, että se pätee myös negatiivisille reaalilukukolmikoille.

Viitteet

[1] `https://twitter.com/solmulehti`

[2] 1903: Problem 15114 (Educational Times Vol. 3: 37 – 38)

[3] `https://fi.wikipedia.org/wiki/Nesbittin_ep%C3%A4yht%C3%A4l%C3%B6`

[4] `http://www.wikiwand.com/fi/Nesbittin_ep%C3%A4yht%C3%A4l%C3%B6`