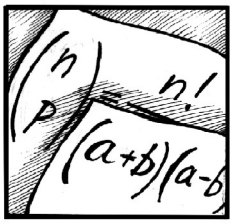


Rinkulan pistemäärä

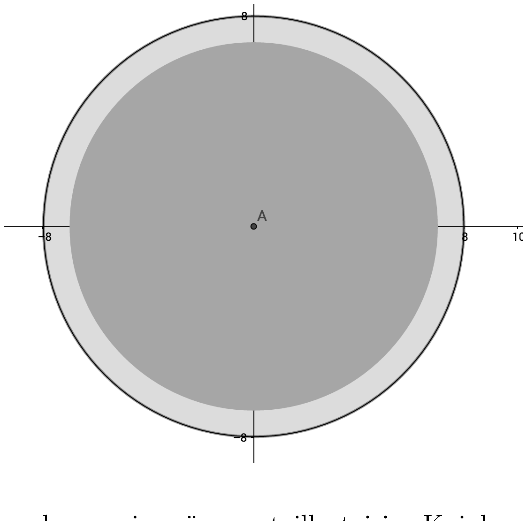
Anne-Maria Ernvall-Hytönen
Åbo Akademi

Jos tasoon piirtää origokeskiset ympyrät, joiden säteet ovat r ja $r+1$, missä r on epänegatiivinen kokonaisluku, niin kuinka monta kokonaislukukoordinaattista pistettä sijaitsee siinä alueessa, joka kuuluu isompaan ympyrään, mutta ei pienempään, eli miten moni kokonaiskoordinaattinen piste (x, y) sijaitsee alueessa, jonka etäisyys origosta on yli r mutta korkeintaan $r+1$?

Jos siis vaikkapa $r = 0$, niin kysymys on pisteistä (x, y), joilla

$$0 < \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1.$$

Näitä ovat $(\pm 1, 0)$ ja $(0, \pm 1)$, eli neljä kappaletta.



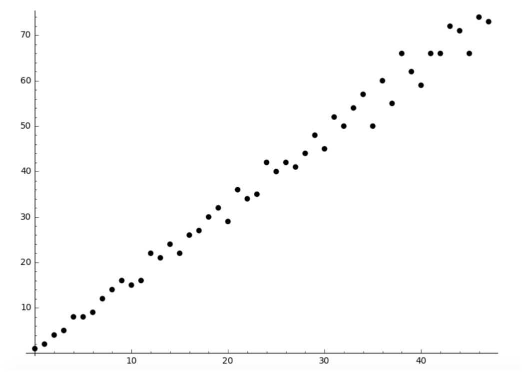
Kysymyksen voi myös muotoilla toisin: Kuinka monta kokonaislukukoordinaattista pistettä on vaikkapa r-säteisessä ympyrässä? Ympyrän ala on πr^2, mutta kasvaako pisteiden määrä ympyrässä samaan tahtiin kuin ala?

Palataan nyt takaisin renkaisiin. Luonnollinen ajatus olisi, että pisteiden määrä olisi verrannollinen renkaan alaan, mutta kysymys on kokonaislukupisteistä. Voisiko olla olemassa joitain tosi epäoptimaalisia rinkuloita, joille pisteitä ei juurikaan osuisi? Vastavuoroisesti jotain tosi suosittuja renkaita, jonne kaikki pisteet haluaisivat kokoontua?

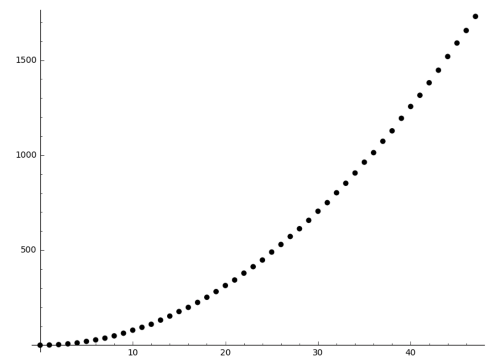
Tätä voi aluksi laskea:

r	$r+1$	rinkulan ala	pisteet
0	1	$\pi \approx 3{,}14$	4
1	2	$3\pi \approx 9{,}42$	8
2	3	$5\pi \approx 15{,}71$	16
3	4	$7\pi \approx 21{,}99$	20
4	5	$9\pi \approx 28{,}27$	32
5	6	$11\pi \approx 34{,}56$	32
6	7	$13\pi \approx 40{,}84$	36
7	8	$15\pi \approx 47{,}12$	48
8	9	$17\pi \approx 53{,}41$	56
9	10	$19\pi \approx 59{,}69$	64
10	11	$21\pi \approx 65{,}97$	60

Selvästi pisteiden määrä on pääpiirteittäin kasvava, mutta ei koko ajan. Lisäksi keskimäärin kasvu on melko maltillista, eikä esimerkiksi neliöön verrannollista. Vähän pidemmälle laskemalla ja pisteet plottaamalla näyttää kuva tältä:



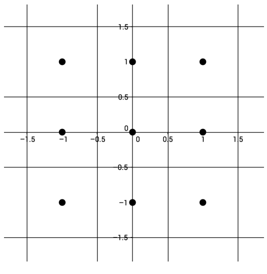
Kuvan perusteella kasvu näyttää olevan pääpiirteittäin lineaarista. Ainakaan tähän mennessä ei suuria poikkeuksia ole ilmentynyt. Ennen kuin mennään lauseisiin ja todistuksiin, vilkaistaan vertailun vuoksi kuvaa ympyrän pisteiden määrästä:



Tämä näyttää puolestaan kovasti paraabelilta. Tämä itse asiassa on myös totuus. Todistetaan seuraava tulos ympyrän pistemäärälle:

Lause. Sellaisten kokonaislukupisteiden määrä, joiden etäisyys origosta on korkeintaan r, on vähintään $\pi\left(r-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \pi r^2 - \sqrt{2}r\pi + \frac{\pi}{2}$ ja korkeintaan $\pi\left(r+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \pi r^2 + \sqrt{2}r\pi + \frac{\pi}{2}$.

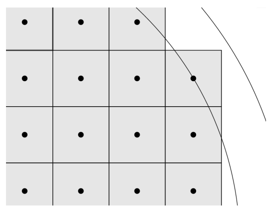
Todistus. Jos jokaisen kokonaislukupisteen ympärille piirtää sellaisen neliön, jonka keskipiste annettu piste on, ja jonka sivun pituus on yksi, tulee koko taso laatoitetuksi näillä ruuduilla, eli näiden ruutujen sisäpisteet eivät mene päällekkäin, mutta toisaalta jokainen tason piste kuuluu johonkin ruutuun. Kas näin:



Ruudun ala on yksi ja ruudun keskipisteen ja kärjen etäisyys on

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Jos siis piste kuuluu ympyrään, niin koko pisteen oma ruutu sisältyy varmasti sellaiseen ympyrään, jonka säde on $r + \frac{1}{\sqrt{2}}$.



Siispä $r+\frac{1}{\sqrt{2}}$-säteisen ympyrän alan on pakko olla suurempi kuin pisteiden lukumäärä. Tällaisen ympyrän ala on

$$\pi\left(r+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \pi r^2 + \sqrt{2}r\pi + \frac{\pi}{2},$$

eli yläraja on nyt todistettu.

Aivan samanlaisella argumentilla voi alarajaksi todistaa

$$\pi\left(r-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \pi r^2 - \sqrt{2}r\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Nyt voikin arvioida renkaan pisteiden määrää:

Lause. Sellaisten kokonaislukukoordinaattisten pisteiden lukumäärä, joiden etäisyys origosta on yli r, mutta korkeintaan $r+1$ on korkeintaan

$$(1+\sqrt{2})\pi(2r+1).$$

Todistus. Aloitetaan ylärajasta. Isommassa ympyrässä on korkeintaan

$$\pi\left(r+1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \pi(r+1)^2 + \sqrt{2}(r+1)\pi + \frac{\pi}{2}$$

pistettä ja pienemmässä vähintään

$$\pi\left(r-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \pi r^2 - \sqrt{2}r\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Näiden erotus on

$$\pi\left(r+1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \pi\left(r-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = (1+\sqrt{2})\pi(2r+1).$$

Vastaava menetelmä soveltuu myös ellipsin kokonaislukukoordinaattisten pisteiden laskemiseen ja moneen muuhunkin tilanteeseen. Tämä jätetään lukijalle harjoitustehtäväksi.

Jutun ensimmäinen ja kaksi viimeistä kuvaa on piirretty Geogebralla ja muut Sagella. Pistemäärät on laskettu Sagella.