Ahven ja harmoninen kuvanpaikkaus

Samuli Siltanen
Helsingin yliopisto

Tässä on paras valokuva, jonka olen onnistunut ottamaan isästäni:

Isä on hankala valokuvattava, koska hän ei koe oloaan luontevaksi kameran edessä. Siksi olen erityisen iloinen yllä olevasta otoksesta. Mutta kun siinä roikkuu tuo typerä ahven! Mistä lie siihen tullutkaan, ei aavistustakaan. Olisikohan tilannetta mahdollista korjata? Toisin sanoen: miten poistaisin kalan kuvasta?

Mustavalkoinen digitaalinen valokuva koostuu neliön muotoisista kuva-alkioista eli *pikseleistä*. Jokainen pikseli on väritetty yhdellä harmaan sävyllä. Tietokoneessa kuva esitetään lukuruudukkona, jossa 0 tarkoittaa mustaa, 255 valkoista ja kokonaisluvut nollan ja 255 välissä kuvaavat harmaan eri sävyjä.[1] Digitaalinen kuvankäsittely on pohjimmiltaan matematiikkaa: kuvan kohentaminen tehdään muuttamalla lukuja.

Minun on siis valittava jotkut muut luvut ahvenen paikalle kuvaan. Millä periaatteella sen tekisin? Voisin yksinkertaisesti valita suorakaiteen muotoisen alueen kalan ympäriltä ja laittaa luvun 255 jokaiseen pikseliin alueen sisällä. Silloin kuva näyttäisi tältä:

Lopputulos on huono, koska kuvasta näkee liian selväs-

[1] Näin siis kahdeksanbittisille kuville, joissa mahdollisia harmaasävyjä on $2^8 = 256$. Hienojen kameroiden tarjoamissa RAW-tiedostoissa sävyjä on enemmän, esimerkiksi $2^{12} = 4096$. Värikuvat puolestaan koostuvat punaisesta, vihreästä ja sinisestä värikanavasta, joista kukin on mustavalkokuvan tapainen lukuruudukko.

ti, että sitä on muokattu.

Kokeilen huomaamattomampaa tapaa täyttää tuo suorakaide, joka sisältää ahvenen. Pyrin välttämään häiritseviä rakenteita pakottamalla vierekkäisten pikselien harmaasävyt niin lähelle toisiaan kuin mahdollista. Selitän tämän lähestymistavan ensin yksinkertaisille tapauksille, joissa on vain yksi, kaksi tai 12 pikseliä muokattavana.

Jos haluan muuttaa vain yhden pikselin, tehtävä on helppo. Annan tuntemattomalle pikseliarvolle nimeksi x_1 ja oletan esimerkin vuoksi, että täydennettävän pikselin naapureina ovat nämä luvut:

	100	
20	x_1	0
	100	

Keskimmäisen pikselin lukuarvo eroaa naapureistaan vähiten silloin, kun sijoitamme siihen keskiarvon eli $x_1 = (100 + 0 + 100 + 20)/4 = 220/4 = 55$.

Jos täydennettäviä pikseleitä on kaksi, kuvio on tällainen:

	100	100	
20	x_1	x_2	0
	100	100	

Kummankin tuntemattoman luvun x_1 ja x_2 tulisi olla keskiarvo neljästä naapuristaan. Saan yhtälöparin:

$$x_1 = (100 + x_2 + 100 + 20)/4,$$
$$x_2 = (100 + 0 + 100 + x_1)/4.$$

Sieventämällä päädyn muotoon

$$4x_1 - x_2 = 220,$$
$$x_1 - 4x_2 = -200.$$

Kerron alemman yhtälön luvulla -4 ja lisään yhtälöt toisiinsa:

$$\begin{array}{r} 4x_1 - x_2 = 220 \\ -4x_1 + 16x_2 = 800 \\ \hline 15x_2 = 1020 \end{array}$$

Nyt $15x_2 = 1020$ antaa $x_2 = 1020/15 = 68$. Sijoitan arvon $x_2 = 68$ yhtälöön $x_1 - 4x_2 = -200$, jolloin saan $x_1 - 4 \cdot 68 = -200$ eli $x_1 = -200 + 272 = 72$. Kahden pikselin pulman ratkaisu on siis

	100	100	
20	72	68	0
	100	100	

Yhden ja kahden pikselin tilanteet ovat helppoja, mutta niillä voin peittää vain pienen osan valokuvasta. Kokonainen ahven vaatii paljon enemmän pikseleitä. Tässä pikseliruudukossa on sentään jo kolme riviä ja neljä saraketta, vaikkei senkään alle vielä kala mahdu:

	100	100	100	100	
20	x_1	x_4	x_7	x_{10}	0
20	x_2	x_5	x_8	x_{11}	0
20	x_3	x_6	x_9	x_{12}	0
	100	100	100	100	

Nyt tuntemattomia pikseliarvoja on peräti 12 kappaletta. Jälleen harmaasävyn x_1 tulisi olla keskiarvo naapureistaan:

	100				
20	x_1	x_4			
	x_2				

Saan yhtälön $x_1 = (x_2+x_4+100+20)/4$, josta sieventämällä $4x_1 - x_2 - x_4 = 120$. Tuntemattoman pikseliarvon x_2 pitää myöskin olla keskiarvo naapureistaan:

	x_1				
20	x_2	x_5			
	x_3				

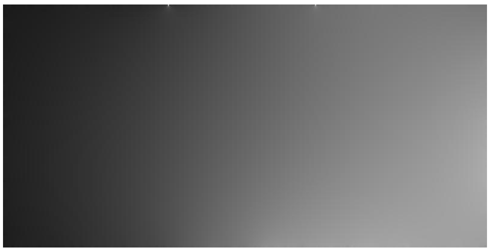
Tästä saan yhtälön $x_2 = (x_1 + x_3 + x_5 + 20)/4$, ja edelleen $-x_1 + 4x_2 - x_3 - x_5 = 20$. Jokaiselle 12 tuntemattomalle syntyy näin oma yhtälönsä:

$$\begin{aligned}
4x_1 - x_2 - x_4 &= 120\\
-x_1 + 4x_2 - x_3 - x_5 &= 20\\
-x_2 + 4x_3 - x_6 &= 120\\
-x_1 + 4x_4 - x_5 - x_7 &= 100\\
-x_2 - x_4 + 4x_5 - x_6 - x_8 &= 0\\
-x_3 - x_5 + 4x_6 - x_9 &= 100\\
-x_4 + 4x_7 - x_8 - x_{10} &= 100\\
-x_5 - x_7 + 4x_8 - x_9 - x_{11} &= 0\\
-x_6 - x_8 + 4x_9 - x_{12} &= 100\\
-x_7 + 4x_{10} - x_{11} &= 100\\
-x_8 - x_{10} + 4x_{11} - x_{12} &= 0\\
-x_9 - x_{11} + 4x_{12} &= 100
\end{aligned}$$

Tämä näyttää jo hengästyttävältä verrattuna kahden pikselin yhtälöpariin. Toki voisin ratkaista tämän samaan malliin kertomalla yhtälöitä sopivilla luvuilla, lisäämällä niitä toisiinsa ja näin poistamalla muuttujia yksi kerrallaan. Sellainen ei kuitenkaan ole nykyaikaisen ihmisen touhua, koska tietokone on keksitty. Kirjoitan yhtälöryhmän matriisimuotoon ja käytän käänteismatriisia Matlab-ohjelmassa. Tässä ratkaisu tasalukuihin pyöristettyinä pikseliarvoina:

	100	100	100	100	
20	62	76	74	54	0
20	53	67	64	43	0
20	62	76	74	54	0
	100	100	100	100	

Nyt olen valmis poistamaan ahvenen. Tässä osakuva ennen ja jälkeen yhtälöryhmän ratkaisemisen; lukujen sijasta näytän harmaasävyt:



Kalan sisältävässä osakuvassa on 400 riviä ja 800 saraketta, joten ratkaistavia yhtälöitä syntyy $400 \times 800 = 320\,000$. Kannettavalta tietokoneeltani kului yhtälöryhmän ratkaisemiseen runsaat kaksi minuuttia (käyttäen iteratiivista GMRES-menetelmää, koska käänteismatriisin laskeminen veisi koneen kaiken muistin).

Vastaavalla tempulla saamme poistettua kuvasta myös ahventa kannattelevat narut, jolloin lopputulos on tällainen:

Vaikka kuvassa edelleen näkyy muokkauksen merkkejä, keskiarvotemppu kyllä peittoaa tuon aikaisemman valkoisen lätkän.

Esittelemäni tekniikka on nimeltään *harmoninen kuvanpaikkaus*. Jos antaa pikselien koon pienentyä aivan pistemäiseksi, rajatapauksena syntyy Poissonin yhtälö

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 & \text{suorakaiteen sisällä,} \\ u = f & \text{suorakaiteen reunalla.} \end{cases}$$

Tämän osittaisdifferentiaaliyhtälön keksi ranskalainen matemaatikko Siméon Denis Poisson (1781–1840). On aivan sattumaa, että hänen nimensä suomeksi käännettynä on professori Kala.

Lisämateriaalia aiheesta videomuodossa:

- `https://www.youtube.com/watch?v=Mge0jjA2xxw`
- `https://www.youtube.com/watch?v=kfGcwrx_sI0&t=132s`

Solmun matematiikkadiplomit

Solmun matematiikkadiplomit I–X tehtävineen ovat tulostettavissa osoitteessa

`matematiikkalehtisolmu.fi/diplomi.html`

Alimmat tasot ovat koulun alkuun, ylimmissä riittää pohtimista lukiolaisillekin.

Opettajille lähetetään pyynnöstä vastaukset koulun sähköpostiin. Pyynnön voi lähettää osoitteeseen

juha piste ruokolainen at yahoo piste com

Ym. verkko-osoitteessa on diplomitehtäville oheislukemistoa, joka varmasti kiinnostaa muitakin kuin diplomien tekijöitä:

Kombinaatio-oppia
Lukujärjestelmistä
Desimaaliluvut, mitä ne oikeastaan ovat?
Murtolukujen laskutoimituksia
Negatiivisista luvuista
Hiukan osittelulaista
Lausekkeet, kaavat ja yhtälöt
Äärettömistä joukoista
Erkki Luoma-aho: Matematiikan peruskäsitteiden historia
Funktiosta
Gaussin jalanjäljissä
K. Väisälä: Algebra
Yläkoulun geometriaa
Geometrisen todistamisen harjoitus
K. Väisälä: Geometria
Lukuteorian diplomitehtävät