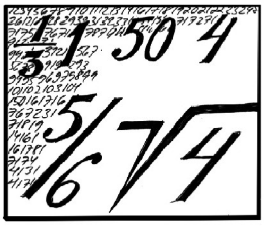


Virheellisiä todistuksia

Neea Palojärvi
Åbo Akademi

Matematiikassa laskuja tai todistuksia pohtiessa on oltava tarkkana, ettei tee virheitä. Toisinaan virheet ovat sen verran ilmiselviä, että on helppo huomata jonkin kohdan olevan pielessä. Virheet voivat myös johtaa järjettömiin tai hauskoihin tuloksiin, joita voi olla mielenkiintoista lukea. Tällaisia todistuksia on kerätty esimerkiksi kirjaan [2] sekä verkkosivulle [3], [4] ja [5]. Tässä kirjoituksessa esitellään muutamia virheellisiä todistuksia mielenkiintoisine tuloksineen. Teksti perustuu edellä mainittuihin lähteisiin.

$2 = 1$

Ensimmäiseksi "osoitetaan", että $2 = 1$. Tarkastellaan reaalilukuja a ja b sekä oletetaan, että $a = b$. Tavoitteena on osoittaa, että tästä oletuksesta seuraa väite $2 = 1$. Tarkastellaan yhtälöä $a = b$. Tällöin myös

$$a^2 = ab.$$

Yhtälön molemmilta puolilta voidaan vähentää luku b^2 eli saadaan

$$a^2 - b^2 = ab - b^2.$$

Molemmat puolet voidaan jakaa tekijöihin, jolloin saadaan

$$(a - b)(a + b) = (a - b)b.$$

Jaetaan luku $a - b$ pois yhtälön molemmilta puolilta. Siis

$$a + b = b.$$

Koska $a = b$, niin $2b = b$. Voidaan jakaa luku b pois yhtälön molemmilta puolilta ja saadaan $2 = 1$. Mutta tämähän on mahdotonta! Mikä todistuksessa meni pieleen?

Tarkastellaan todistusta. Selvästi voidaan valita luvut a ja b niin, että $a = b$; esimerkiksi voidaan valita, että $a = b = 1$. Myös päätelmät $a^2 = ab$, $a^2 - b^2 = ab - b^2$ ja $(a - b)(a + b) = (a - b)b$ ovat aivan päteviä. Ongelmia tulee, kun jaetaan luvuilla $a - b$ ja b. Nimittäin, koska $a = b$, niin $a - b = 0$. Tällöin siis yhtälö $(a - b)(a + b) = (a - b)b$ on $0 = 0$, mikä pitää paikkansa. Kuitenkaan ei välttämättä ole voimassa, että $a + b = b$, sillä mikä tahansa luku kerrottuna nollalla tuottaa tulokseksi nollan. Näin ollen ei voida päätellä, että $a + b = b$. Samoin yhtälöstä $2b = b$ ei voida päätellä, että $2 = 1$, vaan on oltava $2 = 1$ tai $b = 0$. On oltava tarkkana päätelmien teossa, kun jaetaan yhtälön molemmilta puolilta luku pois!

Yksi euro on kymmenen senttiä

Olisi kätevää, jos yksi euro olisi sekä kymmenen että sata senttiä. Kaupasta voisi ostaa euron jäätelön vain yhdellä kymmensenttisellä, myydä sen kymmenellä kymmensenttisellä eteenpäin ja saadulla rahalla sitten ostaa vaikka kymmenen jäätelöä! Seuraavissa laskuissa todetaankin, että tämä olisi mahdollista.

Tunnetusti yksi euro vastaa sataa senttiä eli

$$1 \text{ €} = 100 \text{ snt.}$$

Yhtälö voidaan jakaa puolittain luvulla 100, jolloin saadaan

$$\frac{1}{100} \text{ €} = 1 \text{ snt.}$$

Otetaan puolittain neliöjuuri ja saadaan, että

$$\sqrt{\frac{1}{100}} \text{ €} = \sqrt{1} \text{ snt.}$$

Lasketaan neliöjuuret ja saadaan

$$\frac{1}{10} \text{ €} = 1 \text{ snt.}$$

Siis on voimassa

$$1 \text{ €} = 10 \text{ snt.}$$

Vaikka olisikin mukava pystyä säästämään rahaa toteamalla, että yksi euro on vain kymmenen senttiä, niin valitettavasti todistuksessa on virhe. Neliöjuurta otettaessa nimittäin ei oteta lainkaan huomioon lukujen yksiköitä. Kohta $\sqrt{\frac{1}{100}}$ € $= \sqrt{1}$ snt ei ole tosi. Lukujen yksiköt on siis hyvä huomioida yhtälöjä ratkaistaessa.

Kaikki koirat ovat samanvärisiä

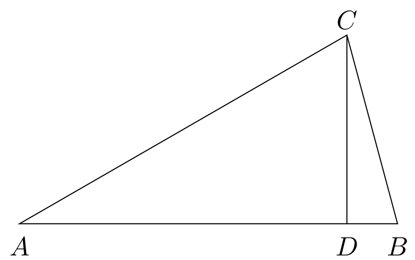
Koiriahan näkyy ulkona monenvärisinä – on valkoisia, mustia, ruskeita ja monen muun värisiä koiria. Seuraava todistus kuitenkin osoittaa, että nämä näköhavainnot ovat olleet vain harhaa ja oikeasti kaikki koirat ovat samanvärisiä.

Tarkastellaan ensin yhtä koiraa. Sehän on selvästi samanvärinen itsensä kanssa, joten yhden koiran joukossa pätee, että kaikki koirat ovat samanvärisiä. Oletetaan, että n kappaletta koiria ovat samanvärisiä. Todistetaan, että tällöin $n+1$ koiraa ovat samanvärisiä. Tarkastellaan $n+1$ koiran joukkoa. Tästä joukosta voidaan poistaa yksi koira ja jäljelle jää n koiraa. Oletuksen mukaan nämä n koiraa ovat samanvärisiä. Palautetaan poistettu koira alkuperäiseen joukkoon ja poistetaan jokin muu koira joukosta. Jälleen jäljelle jää n koiraa ja näiden on oltava keskenään samanvärisiä. Mutta nyt joukosta poistettujen koirienkin on oltava samanvärisiä ja täten kaikkien $n+1$ koiran on oltava samanvärisiä. Tästä taas seuraa, että kaikkien koirien on oltava samanvärisiä!

Tässä ”todistuksessa” on oleellista huomata, mitä ominaisuuksia luku n voi toteuttaa. Aluksi on todettu, että yksi koira on itsensä kanssa samanvärinen ja toisaalta voidaan todeta, että nollan koiran joukossa kaikki koirat ovat samanvärisiä. Tätä suuremmista koiramääristä ei tiedetä vielä mitään, kun tarkastellaan $n+1$ koiraa. Kuitenkin todistuksessa oletetaan, että $n+1 \geq 3$. Havaitaan, että ongelmia aiheutuu, kun $n+1=2$. Yllä olevassa ”todistuksessa” ensin poistetaan joukosta yksi koira ja jäljelle jäänyt koira on tietenkin itsensä kanssa samanvärinen. Poistettu koira palautetaan joukkoon ja toinen koira poistetaan joukosta. Edelleen joukkoon jäänyt koira on itsensä kanssa samanvärinen, mutta ei välttämättä samanvärinen kuin poistettu koira. Näin ollen yllä olevaa päättelyä ei voida tehdä kaikilla mahdollisilla luvun $n+1$ arvoilla. Selvästikään kaksi satunnaisesti valittua koiraa eivät välttämättä ole samanväriset!

Pythagoraan lause

Aina virheelliset päätelmät eivät johda väärään lopputulokseen. Tunnetusti Pythagoraan lauseen mukaan suorakulmaisen kolmion kateettien neliöiden summa on hypotenuusan neliö. Tämän lauseen todistuksiin voi tutustua esimerkiksi Solmun vanhan kirjoituksen avulla [1]. Alla on yksi virheellinen todistus väitteelle.



Tarkastellaan kolmiota $\triangle ABC$, missä $\angle ACB = 90°$. Olkoon D sivun AB piste, jolle $\angle CDA = 90°$. Oletetaan nyt, että Pythagoraan lause on voimassa. Tällöin

$$AB^2 = AC^2 + BC^2,$$
$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$

ja

$$BC^2 = BD^2 + CD^2.$$

Sijoitetaan ylimpään yhtälöön kahdesta alemmasta saadut lausekkeet luvuille AC^2 ja BC^2. Täten

$$AB^2 = AD^2 + 2CD^2 + BD^2.$$

Lisäksi kolmiot $\triangle ADC$ ja $\triangle DBC$ ovat yhdenmuotoiset, koska $\angle CDA = 90° = \angle BDC$ ja $\angle CAD = \angle DCB$. Täten $\frac{CD}{BD} = \frac{AD}{CD}$ eli $CD^2 = AD \cdot BD$. Siis saadaan, että

$$AB^2 = AD^2 + 2AD \cdot BD + BD^2.$$

Tämä sievenee muotoon $AB = AD + BD$. Tämä on selvästi tosi, joten alkuperäinen väite on tosi.

Mikä edellisessä ”todistuksessa” sitten meni vikaan? Heti todistuksen alussa oletettiin, että Pythagoraan lause pitää paikkansa ja koska tästä seurasi tosi päätelmä, niin pääteltiin, että alkuperäisen oletuksen on oltava tosi. Tällainen päättely ei ole pätevää. Pohditaan tätä toisen esimerkin avulla. Tarkastellaan tilannetta, jossa kirjasto on aivan kodin vieressä. Nyt kirjastoon pääsee nopeammin kävellen kuin autolla. ”Todistetaan”, selvästi väärä väite, että kaikkialle pääsee nopeammin kävellen kuin autolla. Oletetaan ensin, että näin tosiaan on. Täten myös tilanteessa, jossa kirjasto on aivan kodin naapurissa, pääsee kirjastoon nopeammin kävellen kuin autolla. Tämä on alussa todetun nojalla totta. Näin ollen Pythagoraan lauseen todistuksessa tehdyn päättelyn nojalla myös väitteen, että kaikkialle pääsee nopeammin kävellen kuin autolla, on oltava tosi. Tämä ei selvästikään ole totta! Aina ei siis voi päätellä, että alkuperäinen oletus olisi tosi, vaikka siitä seuraisikin tosia asioita.

Lukijalle pohdittavaa

Seuraavista ”todistuksista” voi itse yrittää löytää viheen tai virheet. Hauskoja ratkaisuhetkiä!

1. Seuraavien laskujen perusteella $\frac{64}{16} = 4$: Kirjoitetaan ensin luku $\frac{64}{16}$ muodossa $\frac{6\ 4}{1\ 6}$. Supistetaan luvut 6 pois ja saadaan $\frac{6\ 4}{1\ 6} = \frac{4}{1} = 4$.

2. ”Osoitetaan”, että $1 = 0$: Olkoon n reaaliluku. Tällöin
$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1.$$
Yhtälön molemmilta puolilta voidaan vähentää luku $2n + 1 + n(2n+1)$, jolloin saadaan
$$(n+1)^2 - (2n+1) - n(2n+1) = n^2 - n(2n+1).$$
Tämä yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa
$$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) = n^2 - n(2n+1).$$
Lisätään yhtälön molemmille puolille luku $\frac{(2n+1)^2}{4}$, jolloin saadaan
$$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) + \frac{(2n+1)^2}{4} = n^2 - n(2n+1) + \frac{(2n+1)^2}{4}.$$
Huomataan, että molemmilla puolilla on binomin neliö ja saadaan
$$\left((n+1) - \frac{2n+1}{2}\right)^2 = \left(n - \frac{2n+1}{2}\right)^2.$$
Otetaan neliöjuuri puolittain ja täten
$$(n+1) - \frac{2n+1}{2} = n - \frac{2n+1}{2}.$$
Yhtälön molemmille puolille voidaan lisätä luku $-n + \frac{2n+1}{2}$ ja saadaan
$$1 = 0.$$

3. Luku 1 on pienin positiivinen reaaliluku: Olkoon x pienin positiivinen reaaliluku. Koska x^2 on myös positiivinen reaaliluku, niin sen on oltava suurempi tai yhtä suuri kuin luku x. Siis $x^2 \geq x$ ja voidaan vähentää yhtälön molemmilta puolilta luku x. Saadaan, että $x(x-1) \geq 0$. Siis $x \geq 1$. Täten pienin positiivinen reaaliluku on 1.

Viitteet

[1] Janis Künnap: Pythagoraan lause. Matematiikkalehti Solmu 1/2000-2001, s. 19-27. `http://matematiikkalehtisolmu.fi/2000/2/kynnap/kynnap.pdf`

[2] E. A. Maxwell: Fallacies in Mathematics. Cambridge University Press, 1959.

[3] `https://math.stackexchange.com/questions/348198/best-fake-proofs-a-m-se-april-fools-day-collection`

[4] `https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/FalseProofs.shtml`

[5] `https://jcdverha.home.xs4all.nl/scijokes/1_1.html#subindex`

Uutta Verkko-Solmussa

Oppimateriaalit-sivulla

`http://matematiikkalehtisolmu.fi/oppimateriaalit.html`

on ilmestynyt Markku Halmetojan kirjoitus Sata lukion matematiikan tehtävää:

`https://matematiikkalehtisolmu.fi/2017/sata.pdf`