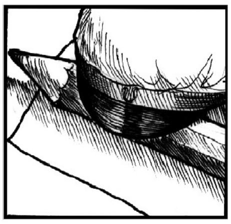


Viisi tapaa ratkaista ylioppilastehtävä

Anne-Maria Ernvall-Hytönen
Åbo Akademi

Olen hehkuttanut kaikille, jotka vain ovat jaksaneet kuunnella, että viime kevään matematiikan ylioppilastehtävien joukossa minulla oli aivan ylivertainen suosikki: pitkän matematiikan tehtävä 12, jonka tehtävänanto oli seuraavanlainen:

Neliöiden N_1, N_2 ja N_3 pinta-alojen suhde on $9:2:11$. *Kolmion K yhtenä sivuna on neliön N_1 sivu, toisena sivuna neliön N_2 sivu ja kolmantena sivuna neliön N_3 sivu. Laske kolmion K ja neliön N_2 pinta-alojen suhteen tarkka arvo.*

Tehtävän kiehtovuus on mielestäni siinä, että sen voi ratkaista usealla erilaisella selkeällä tavalla. Eri tavoissa on omat etunsa ja heikkoutensa, mutta mitään yksittäistä tapaa ei voi nostaa kaikkien muiden yläpuolelle, tai vastaavasti tuomita kaikkia muita onnettomammaksi tavaksi ratkaista tehtävä.

Riippumatta siitä miten tehtävän ratkaisee, on fiksua aloittaa toteamalla, että voidaan merkitä neliöiden aloja $9s^2$, $2s^2$ ja $11s^2$. Sivujen pituudet ovat siis $3s$, $\sqrt{2}s$ ja $\sqrt{11}s$.

Tehdään nyt ratkaisun loppuosa erilaisilla tavoilla.

Pythagoraan lauseella

Tämä ratkaisutapa on äärimmäisen elegantti, lyhyt ja selkeä. Tässä tavassa on kuitenkin tajuttava välittömästi, että kolmio on suorakulmainen, sillä koko ratkaisu nojaa tähän havaintoon.

Huomataan, että

$$(3s)^2 + (\sqrt{2}s)^2 = 9s^2 + 2s^2 = 11s^2 = (\sqrt{11}s)^2,$$

eli kolmion on oltava suorakulmainen. Koska

$$\sqrt{2}s < 3s < \sqrt{11}s,$$

ovat kateettien pituudet $\sqrt{2}s$ ja $3s$. Kolmion ala on siis

$$\frac{\sqrt{2}s \cdot 3s}{2} = \frac{3\sqrt{2}s^2}{2}.$$

Koska neliön N_2 ala on $2s^2$, on alojen suhde

$$\frac{\left(\frac{3\sqrt{2}s^2}{2}\right)}{2s^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Heronin lauseella

Heronin lauseella tehtävän ratkaisemisessa on yksi nerokkuus: Kolmion mallista ei tarvitse tietää yhtikäs mitään, vaan riittää tietää kolmion sivujen pituudet, jotta saadaan ala, mutta laskut vaativat hieman enemmän huolellisuutta kuin muissa ratkaisutavoissa. Heronin lauseen mukaan kolmion ala on

$$\sqrt{p(p-\sqrt{2}s)(p-3s)(p-\sqrt{11}s)},$$

missä $p = \frac{\sqrt{2}s+3s+\sqrt{11}s}{2}$. Tämän lausekkeen voisi epäilemättä syöttää laskimelle sievennettäväksi. Jos tästä haluaa selvitä kynällä ja paperilla, voi aloittaa vaikkapa ensin laskemalla

$$\begin{aligned}p(p-\sqrt{11}s) &= \frac{\sqrt{2}s+3s+\sqrt{11}s}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}s+3s-\sqrt{11}s}{2}\\ &= \frac{(\sqrt{2}+3)^2-11}{4}s^2\\ &= \frac{2+9+2\cdot 3\sqrt{2}-11}{4}s^2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}s^2.\end{aligned}$$

Siirrytään nyt muihin tulontekijöihin juurrettavassa:

$$\begin{aligned}&(p-\sqrt{2}s)(p-3s)\\ &= \frac{-\sqrt{2}s+3s+\sqrt{11}s}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}s+-3s+\sqrt{11}s}{2}\\ &= \frac{11s^2-(3s-\sqrt{2}s)^2}{4}\\ &= \frac{11-9-2+2\cdot 3\sqrt{2}}{4}s^2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}s^2.\end{aligned}$$

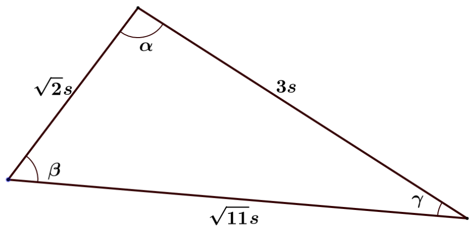
Siispä

$$\sqrt{p(p-\sqrt{2}s)(p-3s)(p-\sqrt{11}s)} = \frac{3\sqrt{2}}{2}s^2.$$

Alojen suhde on siis

$$\frac{\left(\frac{3\sqrt{2}s^2}{2}\right)}{2s^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Kosinilauseella suorakulmaiseksi kolmioksi havaiten



Tämä ratkaisutapa on ensimmäisen ratkaisutavan läheinen sukulainen: kolmio todetaan suorakulmaiseksi, jonka jälkeen ala on hyvin helppo laskea. Minä itse näkisin kuitenkin tässä ratkaisutavassa merkittävän psykologisen eron verrattuna ensimmäiseen. Ensimmäisessä ratkaisutavassa pitää ikään kuin arvata, että kolmio saattaisi olla suorakulmainen, ja sitten tarkistaa asia Pythagoraan lauseella, kun taas tässä ratkaisutavassa ei tarvitse tätä havaintoa erikseen tehdä, vaan kolmion suorakulmaisuus tipahtaa käteen ikään kuin vahingossa.

Käytetään kosinilausetta kulmaan α. Nyt

$$(\sqrt{11}s)^2 = (\sqrt{2}s)^2 + (3s)^2 - 2\cdot 3s\cdot\sqrt{2s}\cdot\cos\alpha,$$

joten

$$-2\cdot 3s\cdot\sqrt{2s}\cdot\cos\alpha = 0,$$

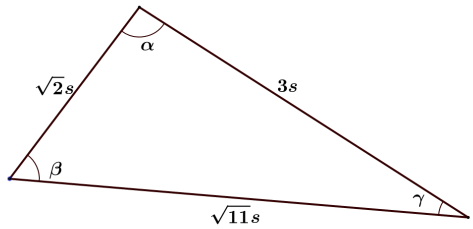
eli $\cos\alpha = 0$, josta saadaan, että kulman α on pakko olla suora. Kolmion ala on siis kateettien tulo jaettuna kahdella, eli

$$\frac{3s\cdot\sqrt{2}s}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}s^2,$$

joten alojen suhde on

$$\frac{\left(\frac{3\sqrt{2}s^2}{2}\right)}{2s^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Kosinilauseen ja alan sinikaavan yhteiskäytöllä



Tämä ratkaisu on varsin suoraviivainen: mitään kommervenkkeja tai älynväläyksiä ei tarvita, vaan ratkaisun saa pienellä puurtamisella.

Tähän ratkaisuun päädytään, jos kosinilausetta käytetään kulmaan β tai γ. Ratkaisut ovat keskenään samanlaisia, joten käsitellään vain toinen, eli se, mitä tapahtuu, kun kosinilausetta käytetään kulmaan β. Nyt

$$(3s)^2 = (\sqrt{2}s)^2 + (\sqrt{11}s)^2 - 2\sqrt{2}s\cdot\sqrt{11}s\cdot\cos\beta,$$

joten

$$2\sqrt{22}\cos\beta = 4,$$

eli

$$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{22}} = \sqrt{\frac{2}{11}}.$$

Koska $\cos^2\beta+\sin^2\beta = 1$, on pädettävä

$$\sin^2\beta = 1-\cos^2\beta = 1-\frac{2}{11} = \frac{9}{11}.$$

Koska $\sin\beta \geq 0$, on oltava

$$\sin\beta = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

Kolmion ala on siis

$$\frac{\sqrt{2}s\cdot\sqrt{11}s\cdot\sin\beta}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}s^2,$$

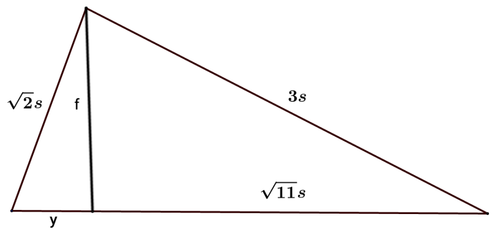
joten alojen suhde on

$$\frac{\left(\frac{3\sqrt{2}s^2}{2}\right)}{2s^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Paloitellen ja Pythagorasta käyttäen

Tämä ratkaisutapa on edellisen ratkaisun kaltainen sekä filosofialtaan että luonteeltaan. Ratkaisussa runnotaan riittävästi dataa irti kolmiosta, jotta tehtävä ratkeaa.

Asetetaan kolmio niin, että sen kanta on sen pisin sivu, ja piirretään korkeusjana.



Nyt

$$\begin{cases} 2s^2 = y^2 + f^2 \\ 9s^2 = (\sqrt{11}s - y)^2 + f^2. \end{cases}$$

Jos jälkimmäisestä yhtälöstä vähennetään ensimmäinen, saadaan

$$7s^2 = 11s^2 - 2\sqrt{11}sy,$$

joten

$$y = \frac{2s}{\sqrt{11}}.$$

Koska $2s^2 = y^2 + f^2$, saadaan

$$f^2 = 2s^2 - y^2 = 2s^2 - \left(\frac{2s}{\sqrt{11}}\right)^2 = \frac{18}{11}s^2,$$

joten

$$f = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{11}}s.$$

Koska kolmion ala saadaan kertomalla kanta ja korkeus keskenään ja jakamalla tulo kahdella, saadaan alaksi

$$\frac{\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{11}}s \cdot \sqrt{11}s}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}s^2.$$

Suhteeksi tulee jälleen

$$\frac{\left(\frac{3\sqrt{2}s^2}{2}\right)}{2s^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Laaja-alainen projektiosaaminen matematiikan opetuksessa

Matematiikkadiplomi-sivulla

`http://matematiikkalehtisolmu.fi/diplomi.html`

on tulostettavissa matematiikkadiplomien tehtävistä kerättyjä tehtäväpaketteja, joita voi käyttää laaja-alaisen osaamisen opetuksessa. Käytettävissä on 10 tehtäväpakettia:

Maapallo

Suomen historia

Terveys ja ravinto

Talous

Todennäköisyys

Matematiikka ja taide (2 tasoa)

Mittaaminen (2 tasoa)

Koodauksen (tai ohjelmoinnin) pohjustus

Alaluokille sopivia tehtäviä on kolmen viimeisen aiheen paketeissa.

Opettajille lähetetään pyynnöstä vastaukset koulun sähköpostiin. Pyynnön voi lähettää osoitteeseen

juha piste ruokolainen at yahoo piste com