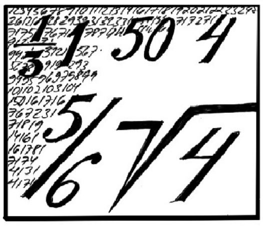


Moniulotteisuuden ihmeitä: Shapiron syklinen epäyhtälö

Esa V. Vesalainen
Matematik och statistik, Åbo Akademi

Edellisessä Solmun numerossa artikkelissa [7] kerrottiin Nesbittin epäyhtälöstä:

Nesbittin epäyhtälö. *Jos a, b ja c ovat positiivisia reaalilukuja, niin*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Tämä on eräs klassisimmista esimerkeistä loistavista matemaattisista ongelmista. Ongelma on tyylikäs, helppo muotoilla ja ymmärtää, ja sen voi ratkaista lukuisilla eri tavoilla, ja kuitenkin mikään aivan yksinkertainen idea ei toimi, vaan jotain hieman epätriviaalia ratkaisun eteen on pakko tehdä ratkaisutavasta riippumatta.

Tässä artikkelissa tarkastelemme Nesbittin epäyhtälön yleistämistä useammille muuttujille. Korkeammissa ulottuvuuksissa tämä johtaa varsin mielenkiintoiseen ja yllättävään havaintoon, ja tarjoaa toisaalta loistavan tekosyyn esitellä monia kauniita epäyhtälöihin liittyviä ideoita ja tuloksia.

Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö

Aloitamme ensin alkuperäisestä kolmen muuttujan tapauksesta jatkaen sitten neljän muuttujan tapaukseen ja siitä ylöspäin. Eräs tehokas tapa käsitellä nämä ensimmäiset tapaukset perustuu Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöön, mikä onkin mainiota, sillä se on muutenkin varsin tärkeä epäyhtälö. Se on myös esiintynyt pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa syksyllä 2014.

Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö. *Jos n on positiivinen kokonaisluku, ja jos a_1, a_2, …, a_n ja b_1, b_2, …, b_n ovat reaalilukuja, niin*

$$\begin{aligned}&\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right)\\ &\qquad\geqslant\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)^2.\end{aligned}$$

Todistus. Reaalilukujen neliöt ovat aina epänegatiivisia. Voimme siten todistaa Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön vaikkapa kirjoittamalla vasemman ja oikean puolen erotuksen neliöiden summana. On hieman näppärämpää tehdä tämä erotukselle kahdella kerrottuna:

$$\begin{aligned}&2\sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{\ell=1}^{n}b_\ell^2-2\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\\ &=\sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{\ell=1}^{n}b_\ell^2+\sum_{\ell=1}^{n}a_\ell^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2-2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\sum_{\ell=1}^{n}a_\ell b_\ell\\ &=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\left(a_k^2b_\ell^2+a_\ell^2b_k^2\right)-2\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}a_kb_ka_\ell b_\ell\\ &=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\left(a_kb_\ell-a_\ell b_k\right)^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

Nesbittin epäyhtälö

Antakaamme aluksi Nesbittin epäyhtälölle erilainen todistus kuin artikkelissa [7]. Tällä kertaa käytämme Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä.

Nesbittin epäyhtälön todistus. Todistuksen ajatuksena on lisätä epäyhtälön vasemmalle puolelle sopiva ylimääräinen tekijä ja aloittaa käyttämällä Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä niin, että ikävältä tuntuvat nimittäjät häviävät: Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön mukaan

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \\
&\qquad \cdot\Big(a\,(b+c)\;+b\,(c+a)+c\,(a+b)\Big) \\
&\geqslant \left(\sqrt{\frac{a}{b+c}}\sqrt{a\,(b+c)}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}\sqrt{b\,(c+a)}\right. \\
&\qquad\qquad \left.+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\sqrt{c\,(a+b)}\right)^2 \\
&= (a+b+c)^2 \\
&= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca.
\end{aligned}$$

Koska lisäksi

$$a\,(b+c)+b\,(c+a)+c\,(a+b)=2ab+2bc+2ca,$$

tiedämme nyt siis, että

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca},$$

ja riittää enää todistaa, että

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca.$$

Mutta tämä viimeinen seuraa suoraan Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöstä, sillä onhan oltava

$$\begin{aligned}
a^2+b^2+c^2 &= \sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2+a^2} \\
&\geqslant ab+bc+ca.
\end{aligned}$$

Neljä muuttujaa

On luonnollista kysyä, voisiko Nesbittin epäyhtälöä yleistää useammille muuttujille jollakin tavalla? Osoittautuu, että tämä on mahdollista. Esimerkiksi neljälle muuttujalle pätee seuraava epäyhtälö.

Lause. *Jos a, b, c ja d ovat positiivisia reaalilukuja, niin pätee*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geqslant 2.$$

Todistus. Aloitamme jälleen käyttämällä Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä, jonka nojalla voimme arvioida

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\right) \\
&\qquad \cdot\left(a\,(b+c)+b\,(c+d)+c\,(d+a)+d\,(a+b)\right) \\
&\geqslant (a+b+c+d)^2\,.
\end{aligned}$$

Koska kahdelle reaaliluvulle x ja y aina pätee

$$(x-y)^2\geqslant 0,$$

on oltava

$$x^2+y^2\geqslant 2xy.$$

Tällä kahden muuttujan aritmeettis-geometrisella epäyhtälöllä voimme arvioida termeittäin, että

$$\begin{aligned}
&ab+ac+bc+bd+cd+ca+da+db \\
&\leqslant ab+\frac{a^2+c^2}{2}+bc+\frac{b^2+d^2}{2}+cd+ca+da+db \\
&= \frac{1}{2}\,(a+b+c+d)^2\,.
\end{aligned}$$

Yhdistämällä tämä aiempaan arvioon ja sieventämällä saadaan haluttu epäyhtälö

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geqslant 2.$$

Viisi muuttujaa

Nyt on luonnollista jatkaa kysymällä, mitä viiden muuttujan tilanteessa käy. Osoittautuu, että se toimii odotetunlaisesti:

Lause. *Jos a, b, c, d ja e ovat positiivisia reaalilukuja, niin*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+a}+\frac{e}{a+b}\geqslant\frac{5}{2}.$$

Todistus. Aloitamme samoin kuin aiemminkin arvioimalla ensin Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöllä

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+a}+\frac{e}{a+b} \\
&\geqslant \frac{(a+b+c+d+e)^2}{ab+ac+bc+bd+cd+ce+de+da+ea+eb}.
\end{aligned}$$

Kertomalla neliö $(a+b+c+d+e)^2$ auki voimme jatkaa

$$=2+\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2}{ab+ac+\ldots+eb}.$$

Riittää siis todistaa, että

$$\begin{aligned}
&2\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\right) \\
&\geqslant ab+ac+bc+bd+cd+ce+de+da+ea+eb.
\end{aligned}$$

Mutta tämän voi tehdä helposti vaikkapa Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä käyttäen, koska senhän mukaan

$$\begin{aligned} &2\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\right) \\ &= \sqrt{a^2+a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+d^2+d^2+e^2+e^2} \\ &\quad\cdot \sqrt{b^2+c^2+c^2+d^2+d^2+e^2+e^2+a^2+a^2+b^2} \\ &\geqslant ab+ac+bc+bd+cd+ce+de+da+ea+eb. \end{aligned}$$

Kuusi muuttujaa

Mainittakoon vielä, että samanlaisin työkaluin pystyy todistamaan myös kuuden muuttujan version:

Lause. *Jos a, b, c, d, e ja f ovat positiivisia reaalilukuja, niin*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+f}+\frac{e}{f+a}+\frac{f}{a+b}\geqslant 3.$$

Jätämme tämän todistamisen lukijan pohdittavaksi.

Shapiron ongelma

Vuonna 1954 Shapiro esitti kysymyksen: päteekö kaikille kokonaisluvuille $n \geqslant 3$ ja positiivisille reaaliluvuille $a_1, a_2, \ldots, a_n$ epäyhtälö

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2}\geqslant \frac{n}{2}\,?$$

Tämä kysymys on tietenkin varsin luonnollinen yllä lueteltujen erikoistapausten valossa.

Lighthill osoitti, että epäyhtälö ei päde 20 muuttujan tapauksessa, mikä avasi uuden kysymyksen siitä, mille kaikille muuttujien lukumäärille n epäyhtälö pätee? Monien monituisten käänteiden ja useiden matemaatikoiden ahkeroinnin jälkeen lopulliseksi vastaukseksi osoittautui, että se pätee parillisille muuttujien lukumäärille $n \leqslant 12$ ja parittomille $n \leqslant 23$.

Rankinin ja Drinfeldin tulokset

Tietenkin nyt voi kysyä, kuinka pahasti epäyhtälö oikeastaan epäonnistuu isoilla muuttujien lukumäärillä n? On varsin kiintoisaa, että Shapiron ongelman kaltainen ilmio kuitenkin toteutuu kaikilla n. Rankin nimittäin todisti, että jokaisella kokonaisluvulla $n \geqslant 3$ löytyy vakio γ_n siten, että kaikille positiivisille reaaliluvuille $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pätee

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2}\geqslant \frac{\gamma_n n}{2},$$

ja lisäksi, että peräti $\gamma_n \geqslant \gamma$, missä $\gamma \approx 0{,}6094\ldots$

Myöhemmin luvun γ arvoja parannettiin moneen kertaan, ja on luonnollista kysyä, mikä on sen paras mahdollinen arvo. Sokerina pohjalla haluaisimme kertoa Fieldsin mitalisti Drinfeldin varsin nuorena löytämästä tuloksesta, joka kertoo luvun γ parhaan mahdollisen arvon. Nimittäin:

Drinfeldin lause. *Kaikille $n \in \mathbb{Z}_+$ ja positiivisille reaaliluvuille $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pätee*

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2}\geqslant \frac{\gamma n}{2},$$

missä γ on eräs tietty positiivinen reaalivakio, jolle $\gamma \approx 0{,}98913\ldots$ Lisäksi tässä lukua γ ei voi korvata millään isommalla reaaliluvulla.

Epäyhtälön oikea puoli on siis vain reilun prosentin pienempi kuin Shapiron ehdottama!

Aiomme lopuksi esittää todistuksen tälle Drinfeldin söpölle epäyhtälölle. Sivuutamme kuitenkin sen osoittamisen, että tämä vakion γ arvo on tosiaan paras mahdollinen. Optimaalisuuden todistus on hieman työläs, mutta ajatus on varsin yksinkertainen: Kun on annettu mielivaltaisen pieni positiivinen reaaliluku ε, valitaan n ensin riittävän isoksi, ja sitten muuttujat $a_1, \ldots, a_n$ siten, että epäyhtälön todistuksessa jokainen arvio on hyvin tarkka. Tällä tavalla voi valita luvut $a_1, \ldots, a_n$ siten, että epäyhtälön vasemman puolen lausekkeen arvo on pienempi kuin $(\gamma+\varepsilon)n/2$.

Konveksit funktiot

Olkoot a ja b reaalilukuja, joille $a < b$. Kutsumme reaalilukujen joukkoja

$$]-\infty, b[\,, \qquad]a,b[\qquad \text{ja} \qquad]a,\infty[$$

avoimiksi väleiksi, joukkoja

$$]-\infty, b]\,, \qquad [a,b] \qquad \text{ja} \qquad [a,\infty[$$

suljetuiksi väleiksi, ja joukkoja

$$[a,b[\qquad \text{ja} \qquad]a,b]$$

puoliavoimiksi väleiksi.

Määritelmä. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ jokin väli. Sanomme, että funktio $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ on konveksi, jos kaikilla $\lambda \in [0,1]$ ja kaikilla $x, y \in I$ pätee

$$\lambda f(x)+(1-\lambda)\,f(y)\geqslant f\bigl(\lambda x+(1-\lambda)\,y\bigr)\,.$$

Tässä määritelmässä esiintyvä epäyhtälö sanoo, että funktion f kuvaajan pisteet $\langle x, f(x)\rangle$ ja $\langle y, f(y)\rangle$ yhdistävä jana ei käy kuvaajan alapuolella. Käytännössä on usein helppo käyttää seuraavaa kriteeriä.

Lause. *Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ avoin väli, ja olkoon $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivoituva funktio. Tällöin f on konveksi, jos ja vain jos derivaatta f' on kasvava funktio.*

Jos f on kahdesti derivoituva, niin se on konveksi, jos ja vain jos sen toinen derivaatta ei saa negatiivisia arvoja.

Kriteerin jälkimmäinen osa seuraa välittömästi edellisestä, ja edellinen osa on väliarvolauseen sovellus, mutta sivuutamme yksityiskohdat. Tässä on ehkä selventävää huomata, että derivaatan f' kasvavuus tarkoittaa sitä, että siirrettäessä pistettä $\langle x, f(x)\rangle$ funktion f kuvaajaa pitkin oikealle siihen piirretty kuvaajan tangentti voi kiertää vain vastapäivään, mutta ei koskaan myötäpäivään.

Esimerkkejä. Funktiot

$$x \longmapsto x^2\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$x \longmapsto e^x\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ja

$$x \longmapsto \frac{1}{x}\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

ovat konvekseja. Tämän voi havaita esimerkiksi siitä, että niiden derivaatat

$$x \longmapsto 2x\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$x \longmapsto e^x\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ja

$$x \longmapsto -\frac{1}{x^2}\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

ovat kasvavia funktioita.

Sen sijaan funktiot

$$x \longmapsto \sin x\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ja

$$x \longmapsto x^3 + x^2\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

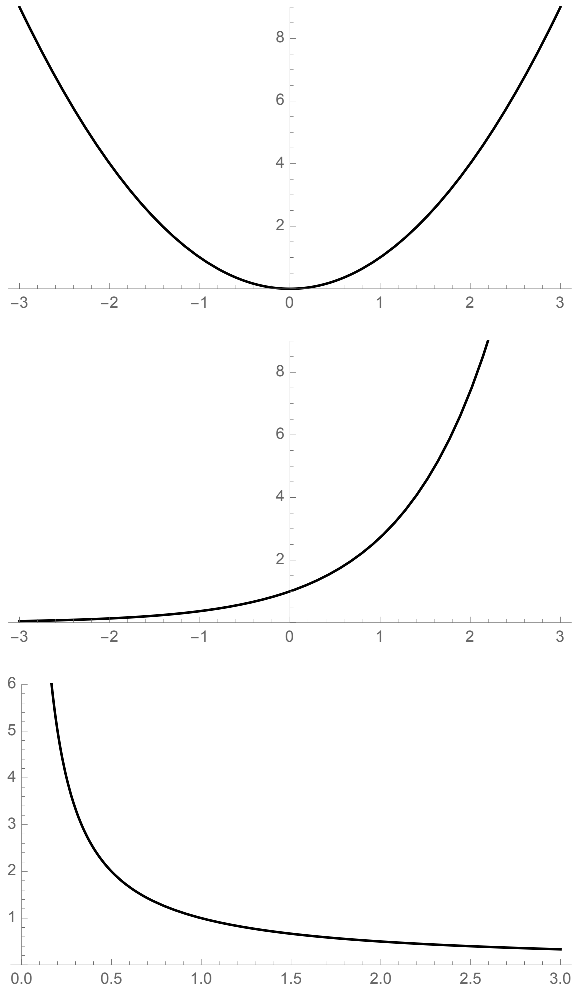
eivät ole konvekseja. Tämän näkee vaikkapa siitä, että

$$\frac{\sin 0 + \sin \pi}{2} = \frac{0+0}{2} = 0 < 1 = \sin\frac{\pi}{2} = \sin\frac{0+\pi}{2},$$

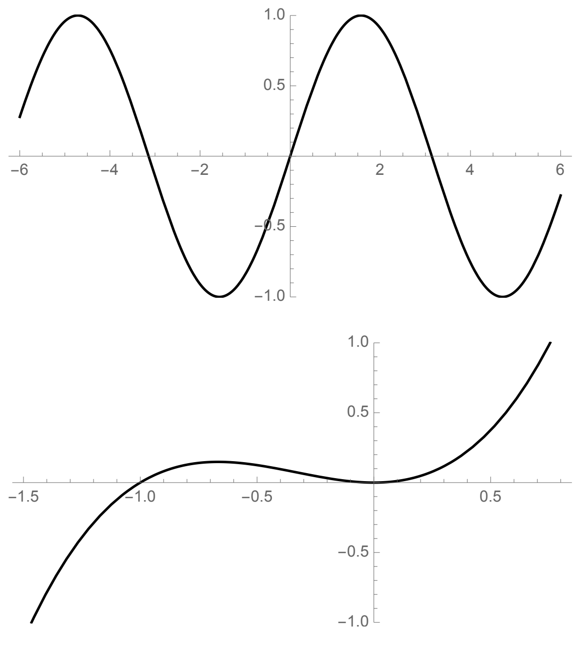
ja

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^3 + (-1)^2 + 0^3 + 0^2}{2} &= 0 < \frac{1}{8}\\ &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \left(\frac{-1+0}{2}\right)^3 + \left(\frac{-1+0}{2}\right)^2,\end{aligned}$$

jolloin konveksisuuden määritelmä ei päde erikoistapauksessa $\lambda = 1/2$.



Lausekkeiden x^2, e^x ja $1/x$ määräämien funktioiden kuvaajat. Nämä kolme funktiota ovat konvekseja.



Lausekkeiden $\sin x$ ja $x^3 + x^2$ määräämien funktioiden kuvaajat. Nämä kaksi funktiota eivät ole konvekseja.

Jensenin epäyhtälö

Toinen tärkeistä työkaluista, joita tarvitsemme Drinfeldin epäyhtälön todistamiseen, on Jensenin epäyhtälö, jota käytämme todistuksen viimeisessä askeleessa. Se on kuitenkin varsin vahva ja tehokas työkalu, joten sille kannattaa omistaa jonkin verran aikaa.

Jensenin epäyhtälö. *Olkoot I väli ja $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ konveksi funktio. Olkoon lisäksi $n \in \mathbb{Z}_+$, olkoot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reaalilukuja väliltä I, ja olkoot $p_1, p_2, \ldots, p_n$ reaalilukuja väliltä $[0,1]$ siten, että $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Tällöin*

$$\begin{aligned} &p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \ldots + p_n f(x_n) \\ &\qquad\geqslant f(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n). \end{aligned}$$

Erityisesti pätee

$$\frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n} \geqslant f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right).$$

Todistus. Jälkimmäinen epäyhtälö tietenkin seuraa edellisestä valitsemalla yksinkertaisesti $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1/n$, joten riittää todistaa vain edellinen. Todistamme sen induktiolla. Tapaus $n = 1$ on itse asiassa triviaali, sillä silloin epäyhtälön molemmat puolet ovat yhtä suuret. Tapaus $n = 2$ puolestaan on täsmälleen sama kuin konveksisuuden määritelmä.

Oletetaan siis, että olemme todistaneet sen jollakin kokonaisluvulla $n \geqslant 2$ enintään n muuttujan tapauksessa, ja olkoot $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ lukuja väliltä I, ja olkoot $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}$ lukuja väliltä $[0,1]$ siten, että $p_1 + p_2 + \ldots + p_{n+1} = 1$. Merkitään yksinkertaisuuden vuoksi $P = p_1 + \ldots + p_n$, jolloin $p_{n+1} = 1 - P$.

Todistamme Jensenin epäyhtälön $n+1$ muuttujalle soveltamalla induktio-oletuksen n muuttujan versiota ja konveksisuuden määritelmän kahden muuttujan versiota:

$$\begin{aligned} &p_1 f(x_1) + \ldots + p_n f(x_n) + p_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &= P \cdot \left(\frac{p_1}{P} f(x_1) + \ldots + \frac{p_n}{P} f(x_n)\right) + (1-P)\, f(x_{n+1}) \\ &\geqslant P \cdot f\left(\frac{p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n}{P}\right) + (1-P)\, f(x_{n+1}) \\ &\geqslant f\left(P \cdot \frac{p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n}{P} + (1-P)\, x_{n+1}\right) \\ &= f(p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n + p_{n+1} x_{n+1}). \end{aligned}$$

Esimerkkejä Jensenin epäyhtälön käytöstä

Katsokaamme pikaisesti läpi pari yksinkertaista esimerkkiä Jensenin epäyhtälön käytöstä:

Kvadraattis-aritmeettinen epäyhtälö. *Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$ ja olkoot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ positiivisia reaalilukuja. Tällöin*

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \geqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Todistus. Olemme jo aiemmin todenneet, että funktio

$$x \longmapsto x^2 \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

on konveksi. Siten Jensenin epäyhtälön nojalla

$$\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n} \geqslant \left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)^2,$$

mistä väite seuraakin ottamalla neliöjuuret puolittain.

Aritmeettis-geometrinen epäyhtälö. *Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$ ja olkoot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ positiivisia reaalilukuja. Tällöin*

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

Todistus. Merkitään ensin

$$y_1 = \log x_1, \quad \ldots, \quad y_n = \log x_n.$$

Eksponenttifunktio $\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ on konveksi, kuten aiemmin todettiin. Siten Jensenin epäyhtälön nojalla

$$\frac{e^{y_1} + \ldots + e^{y_n}}{n} \geqslant e^{(y_1 + \ldots + y_n)/n},$$

eli

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{e^{y_1} \cdots e^{y_n}} = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n},$$

kuten pitikin.

Vakion γ arvo

Vakion γ täsmällinen määrittely Drinfeldin epäyhtälössä on hieman hienosyinen. Määrittelemme apufunktion $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, josta vaadimme, että

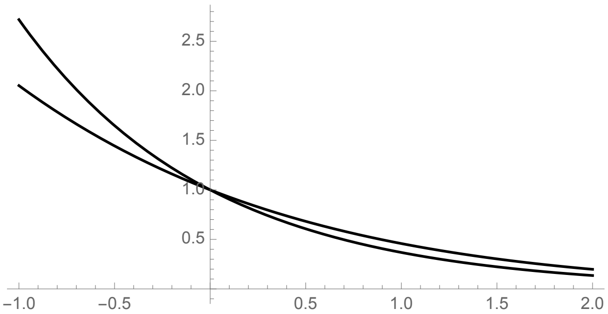
$$g(x) \leqslant e^{-x} \quad \text{ja} \quad g(x) \leqslant \frac{2}{e^x + e^{x/2}}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$, ja lisäksi vaadimme, että g on konveksi.

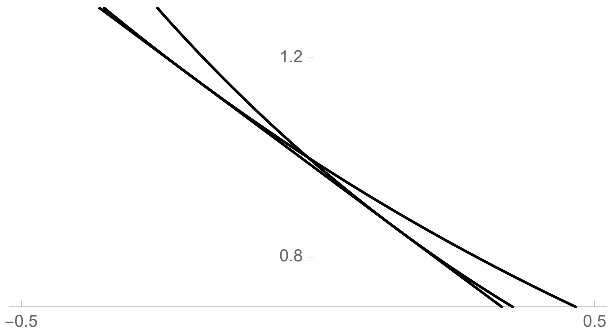
Tällaisella funktiolla on sellainen ominaisuus, että Drinfeldin epäyhtälö pätee vakiolla $\gamma = g(0)$. Ei ole hankala vakuuttua siitä, että paras tapa valita g on ottaa minimi lausekkeiden e^{-x} ja $2/(e^x + e^{x/2})$ määräämistä funktioista ja paikata origon ympäristöön ilmestyvä epäkonveksi osa kuvaajien yhteisellä tangentilla.

Tarkemmin, on geometrisesti selvää, että on olemassa yksikäsitteinen suora ℓ, joka sivuaa molempien funktioiden e^{-x} ja $2/(e^x + e^{x/2})$ kuvaajia alhaalta. Tämä suora sivuaa kuvaajaa $y = e^{-x}$ jossakin pisteessä $\langle x_1, y_1 \rangle$, missä $x_1 > 0$, ja kuvaajaa $y = 2/(e^x + e^{x/2})$ jossakin pisteessä $\langle x_2, y_2 \rangle$, missä $x_2 < 0$. Määrittelemme funktion g konkreettisesti asettamalla

$$g(x) = \begin{cases} 2/(e^x + e^{x/2}), \text{ kun } x < x_2, \\ \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1, \text{ kun } x_2 \leqslant x \leqslant x_1, \text{ ja} \\ e^{-x}, \text{ kun } x > x_1. \end{cases}$$



Lausekkeiden e^{-x} ja $2/(e^x + e^{x/2})$ kuvaajat.



Lausekkeiden e^{-x} ja $2/(e^x + e^{x/2})$ kuvaajien yhteinen tangentti. Ylempi leikkauspiste sijaitsee pystyakselin pisteessä 1. Yhteinen tangentti leikkaa pystyakselin hieman alemmassa pisteessä γ. Vakion γ arvo epäyhtälössä on lähellä arvoa 1 siksi, että kuvioon syntyvä kolmio on niin litteä.

Suuruusjärjestysepäyhtälö

Toinen tarvittava työkalu Drinfeldin epäyhtälön todistamiseen on suuruusjärjestysepäyhtälö:

Suuruusjärjestysepäyhtälö. *Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$, ja olkoot $a_1, \ldots, a_n$ ja $b_1, \ldots, b_n$ reaalilukuja, joille $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ ja $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$. Olkoot lisäksi $c_1, c_2, \ldots, c_n$ luvut $b_1, b_2, \ldots, b_n$ jossakin järjestyksessä. Tällöin*

$$\begin{aligned} &a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \\ &\qquad \geqslant a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n \\ &\qquad\qquad \geqslant a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1. \end{aligned}$$

Todistus. Jälkimmäinen epäyhtälö seuraa helposti edellisestä vaihtamalla lukujen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ merkit, joten riittää todistaa vain edellinen. Todistamme sen induktiolla muuttujien lukumäärän n suhteen. Todistettava epäyhtälö pätee triviaalisti, kun muuttujien lukumäärä n on 1. Oletetaan sitten, että kokonaisluku $n \geqslant 2$ on sellainen, että epäyhtälö pätee muuttujien lukumäärällä $n-1$, ja olkoot $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ reaalilukuja, kuten suuruusjärjestysepäyhtälön muotoilussa.

Oletetaan ensin, että c_n ei ole suurin luvuista $c_1, \ldots, c_n$, jolloin siis löytyy indeksi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, jolle $c_i \geqslant c_j$ kaikille $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ja $c_i > c_n$. Tällöin

$$(a_n - a_i)(c_i - c_n) \geqslant 0,$$

eli

$$a_ic_i + a_nc_n \leqslant a_ic_n + a_nc_i,$$

eli lausekkeen $a_1c_1 + \ldots + a_nc_n$ arvo ei pienene, kun vaihdamme luvut c_i ja c_n keskenään.

Siten voimme olettaa, että $c_n \geqslant c_\ell$ kaikille $\ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Mutta tässä tapauksessa todistettavassa epäyhtälössä oikean ja vasemman puolen viimeiset termit ovat yhtä suuret, ja se seuraa suoraan induktio-oletuksen $n-1$ muuttujan suuruusjärjestysepäyhtälöstä.

Suuruusjärjestysepäyhtälön sovelluksia

Ennen jatkamista näytämme pari esimerkkiä siitä, miten suuruusjärjestysepäyhtälöä voi käyttää.

Lause. *Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Tällöin*

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant a^2b + b^2c + c^2a.$$

Todistus. Olkoot luvut a, b ja c missä tahansa suuruusjärjestyksessä. Tällöin luvut a^2, b^2 ja c^2 ovat myös samassa suuruusjärjestyksessä. Esimerkiksi, jos a on isoin luvuista a, b ja c, niin silloin a^2 on isoin luvuista a^2, b^2 ja c^2. Tai jos esimerkiksi b on toiseksi pienin luvuista a, b ja c, niin silloin b^2 on toiseksi pienin luvuista a^2, b^2, c^2.

Koska lukujen a, b, c ja lukujen a^2, b^2, c^2 suuruusjärjestykset ovat samat, on siis suuruusjärjestysepäyhtälön mukaan oltava

$$\begin{aligned} a^2b + b^2c + c^2a &\leqslant a^2 \cdot a + b^2 \cdot b + c^2 \cdot c \\ &= a^3 + b^3 + c^3. \end{aligned}$$

Lause. *Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Tällöin*

$$a+b+c \leqslant \frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}.$$

Todistus. Symmetrian vuoksi voimme olettaa, että $a \leqslant b \leqslant c$. Tällöin myös

$$a^3 \leqslant b^3 \leqslant c^3 \quad \text{ja} \quad \frac{1}{bc} \leqslant \frac{1}{ca} \leqslant \frac{1}{ab},$$

ja toisaalta myös

$$a^2 \leqslant b^2 \leqslant c^2 \quad \text{ja} \quad \frac{1}{c} \leqslant \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a},$$

jolloin voimme soveltaa suuruusjärjestysepäyhtälöä kahdesti arvioidaksemme

$$\begin{aligned}\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab} &\geqslant \frac{a^3}{ab}+\frac{b^3}{bc}+\frac{c^3}{ca} = \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \\ &\geqslant \frac{a^2}{a}+\frac{b^2}{b}+\frac{c^2}{c} = a+b+c.\end{aligned}$$

Drinfeldin epäyhtälön todistus

Todistakaamme lopuksi Drinfeldin epäyhtälö hänen omaa argumenttiaan [2] seuraten. Eli olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$, ja olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positiivisia reaalilukuja. Määritellään yksinkertaisuuden vuoksi

$$S = \frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2}.$$

Tavoitteemme on osoittaa, että

$$S \geqslant \frac{\gamma n}{2} = \frac{g(0)n}{2},$$

missä g on aiemmin määrittelemämme konveksi funktio.

Aloitamme muuttujanvaihdolla

$$b_1 = \frac{a_2}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_3}{a_2}, \quad \ldots, \quad b_{n-1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}, \quad b_n = \frac{a_1}{a_n},$$

jolloin

$$b_1 b_2 \cdots b_n = \frac{a_2 a_3 \cdots a_n a_1}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n} = 1,$$

ja

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_1}}+\frac{1}{\frac{a_3}{a_2}+\frac{a_4}{a_2}}+\ldots+\frac{1}{\frac{a_1}{a_n}+\frac{a_2}{a_n}} \\ &= \frac{1}{\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}}+\frac{1}{\frac{a_3}{a_2}+\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\frac{a_1}{a_n}+\frac{a_1}{a_n}\cdot\frac{a_2}{a_1}} \\ &= \frac{1}{b_1(1+b_2)}+\frac{1}{b_2(1+b_3)}+\ldots+\frac{1}{b_n(1+b_1)}.\end{aligned}$$

Olkoot seuraavaksi luvut $c_1, c_2, \ldots, c_n$ luvut $b_1, b_2, \ldots, b_n$ järjestettynä uudelleen niin, että

$$c_1 \leqslant c_2 \leqslant \ldots \leqslant c_n.$$

Tällöin luvut

$$\frac{1}{c_1}, \quad \frac{1}{c_2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{c_n},$$

ja luvut

$$\frac{1}{1+c_1}, \quad \frac{1}{1+c_2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{1+c_n}$$

ovat samassa suuruusjärjestyksessä, jolloin suuruusjärjestysepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}S &\geqslant \frac{1}{c_1(1+c_n)}+\frac{1}{c_2(1+c_{n-1})}+\ldots+\frac{1}{c_n(1+c_1)} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{c_\ell(1+c_{n-\ell+1})}.\end{aligned}$$

Lisäämme lausekkeen symmetriaa hieman kirjoittamalla vielä

$$\begin{aligned}S &\geqslant \sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{c_\ell(1+c_{n-\ell+1})} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{c_\ell(1+c_{n-\ell+1})}+\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{c_\ell(1+c_{n-\ell+1})} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{c_\ell(1+c_{n-\ell+1})}+\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{c_{n-\ell+1}(1+c_\ell)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n}\left(\frac{1}{c_\ell(1+c_{n-\ell+1})}+\frac{1}{c_{n-\ell+1}(1+c_\ell)}\right).\end{aligned}$$

Otamme käyttöön jälleen uudet muuttujat asettamalla $d_\ell = c_\ell c_{n-\ell+1}$ jokaiselle $\ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$, jolloin siis

$$d_1 = c_1 c_n, \quad d_2 = c_2 c_{n-1}, \quad \ldots, \quad d_n = c_n c_1.$$

Lisäksi

$$d_1 d_2 \cdots d_n = (c_1 c_2 \cdots c_n)^2 = (b_1 b_2 \cdots b_n)^2 = 1.$$

Lisäksi asetamme

$$e_\ell = \frac{1}{c_\ell(1+c_{n-\ell+1})}+\frac{1}{c_{n-\ell+1}(1+c_\ell)}$$

jokaiselle $\ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$, jolloin siis

$$S \geqslant \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n} e_\ell.$$

Kiinnitetään seuraavaksi $\ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ja tarkastellaan yhtä termiä e_ℓ. Ensinnäkin,

$$\begin{aligned}e_\ell &= \frac{c_{n-\ell+1}+c_{n-\ell+1}c_\ell+c_\ell+c_\ell c_{n-\ell+1}}{c_\ell c_{n-\ell+1}(1+c_{n-\ell+1})(1+c_\ell)} \\ &= \frac{(1+c_\ell)(1+c_{n-\ell+1})+d_\ell-1}{d_\ell(1+c_\ell)(1+c_{n-\ell+1})} \\ &= \frac{1}{d_\ell}\left(1+\frac{d_\ell-1}{(1+c_\ell)(1+c_{n-\ell+1})}\right).\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että jos $d_\ell \geqslant 1$, niin silloin sulkeiden sisällä toinen termi on selvästi epänegatiivinen, jolloin

$$e_\ell \geqslant \frac{1}{d_\ell}.$$

Jos taas $d_\ell < 1$ niin silloin sulkeiden sisällä toinen termi on negatiivinen, ja koska Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöllä voimme arvioida

$$\begin{aligned}(1+c_\ell)(1+c_{n-\ell+1}) &\geqslant \left(1+\sqrt{c_\ell c_{n-\ell+1}}\right)^2\\ &= \left(1+\sqrt{d_\ell}\right)^2,\end{aligned}$$

saamme termille e_ℓ arvion

$$\begin{aligned}e_\ell &\geqslant \frac{1}{d_\ell}\left(1+\frac{d_\ell-1}{\left(1+\sqrt{d_\ell}\right)^2}\right) = \frac{1}{d_\ell}\left(1+\frac{\sqrt{d_\ell}-1}{\sqrt{d_\ell}+1}\right)\\ &= \frac{1}{d_\ell}\cdot\frac{2\sqrt{d_\ell}}{\sqrt{d_\ell}+1} = \frac{2}{d_\ell+\sqrt{d_\ell}}.\end{aligned}$$

Nyt voimme siis arvioida

$$S \geqslant \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n} e_\ell \geqslant \frac{1}{2}\sum_{\substack{1\leqslant\ell\leqslant n,\\ d_\ell\geqslant 1}}\frac{1}{d_\ell} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{1\leqslant\ell\leqslant n,\\ d_\ell<1}}\frac{2}{d_\ell+\sqrt{d_\ell}}.$$

Tehkäämme vielä viimeinen muuttujanvaihto asettamalla

$$x_1 = \log d_1,\quad x_2 = \log d_2,\quad \ldots,\quad x_n = \log d_n,$$

jolloin

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \log(d_1 d_2 \cdots d_n) = \log 1 = 0.$$

Näiden uusien muuttujien avulla voimme kirjoittaa viimeisen arviomme muodossa

$$S \geqslant \frac{1}{2}\sum_{\substack{1\leqslant\ell\leqslant n,\\ x_\ell\geqslant 0}} e^{-x_\ell} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{1\leqslant\ell\leqslant n,\\ x_\ell<0}}\frac{2}{e^{x_\ell}+e^{x_\ell/2}}.$$

Koska $e^{-x} \geqslant g(x)$ ja $2/(e^x + e^{x/2}) \geqslant g(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, voimme edelleen arvioida

$$S \geqslant \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n} g(x_\ell).$$

Lopuksi, koska g oli konveksi funktio, voimme Jensenin epäyhtälöllä arvioida

$$S \geqslant \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n} g(x_\ell) \geqslant \frac{n}{2}\, g\!\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) = \frac{n}{2}\, g(0),$$

ja olemme valmiit.

Ongelmia pohdittavaksi

Ongelma 1. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{a+b+c}{abc} \leqslant \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Ongelma 2. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$a^4+b^4+c^4 \geqslant a^2bc+b^2ca+c^2ab.$$

Ongelma 3. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{a+b+c}{2}.$$

Ongelma 4. Olkoot α, β ja γ kolmion kulmat radiaaneissa. Osoita, että

$$\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2} \geqslant \sqrt{3}.$$

Ongelma 5. Olkoot α, β ja γ kolmion kulmat. Osoita, että

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Ongelma 6. Todista, että jos $p \in [1,\infty[$, jos $n \in \mathbb{Z}_+$, ja jos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ovat positiivisia reaalilukuja, niin

$$\sqrt[p]{\frac{x_1^p+x_2^p+\ldots+x_n^p}{n}} \geqslant \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

Ongelma 7. Osoita potenssikeskiarvojen epäyhtälö: Jos r ja s ovat positiivisia reaalilukuja, joille $r \geqslant s$, jos $n \in \mathbb{Z}_+$, ja jos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ovat positiivisia reaalilukuja, niin

$$\sqrt[r]{\frac{x_1^r+x_2^r+\ldots+x_n^r}{n}} \geqslant \sqrt[s]{\frac{x_1^s+x_2^s+\ldots+x_n^s}{n}}.$$

Ongelma 8. Olkoot a, b, c, d, e ja f positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+f}+\frac{e}{f+a}+\frac{f}{a+b} \geqslant 3.$$

Lähteet

Alkuperäinen lähde Nesbittin epäyhtälölle on [11] ja Shapiron ongelmalle [12]. Shapiron ongelman varhaisempaa historiaa on lyhyesti esitelty kirjan [10] kappaleessa 2.21 ja myöhempää historiaa erinomaisessa artikkelissa [1]. Drinfeldin todistusta voi ihmetellä vaikkapa hänen alkuperäisen artikkelinsa käännöksestä [2] englanniksi.

Klassisia epäyhtälöitä on käsitelty monien muiden teosten ohella kirjoissa [8, 10, 13], Solmun sivuilla artikkeleissa [3, 4, 5, 6], ja Internetissä vaikkapa matematiikan olympiavalmennuksen materiaalisivuilla [9, 14].

Viitteet

[1] Clausing, A.: *A review of Shapiro's cyclic inequality*, kokoomateoksessa [15], 17–31.

[2] Drinfel'd, V. G.: *A cyclic inequality*, Mathematical Notes, 9 (1971), 68–71.

[3] Ernvall-Hytönen, A.-M.: *Aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo*, Solmu, 1/2016, 27–30.

[4] Halmetoja, M: *Epäyhtälöistä, osa 1*, Solmu, 2/2010, 11–14.

[5] Halmetoja, M.: *Epäyhtälöistä, osa 2*, Solmu, 3/2010, 18–22.

[6] Halmetoja, M.: *Karamatan epäyhtälö*, Solmu, 3/2013, 24–28.

[7] Lehtori K.: *Lumoava yhtälö ja hieno epäyhtälö*, Solmu, 2/2017, 24–25.

[8] Hung, P. K.: *Secrets in Inequalities: volume 1 — basic inequalities*, GIL Publishing House, 2007.

[9] Lappalainen, J., ja A.-M. Ernvall-Hytönen: *Epäyhtälöoppia matematiikkaolympialaisten tehtäviin*, `http://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/eykirja.pdf`.

[10] Mitrinović, D. S.: *Analytic Inequalities*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 165, Springer-Verlag, 1970.

[11] Nesbitt, A. M.: *Problem 15114*, Educational Times, 3 (1903), 37–38.

[12] Shapiro, H. S.: *Problem 403*, American Mathematical Monthly, 61 (1954), 571.

[13] Steele, J. M.: *The Cauchy–Schwarz Master Class. An introduction to the art of mathematical inequalities*, MAA Problem Books, Cambridge University Press, 2004.

[14] Vaderlind, P.: *Epäyhtälöiden kieltämätön viehätys*, `http://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/vaderlind.pdf`.

[15] Walter, W. (toim.): *General Inequalities 6. 6th International Conference on General Inequalities, Oberwolfach, Dec. 9–15, 1990*, International Series in Numerical Mathematics, 103, Springer, 1992.

Solmun matematiikkadiplomit

Solmun matematiikkadiplomit I–X tehtävineen ovat tulostettavissa osoitteessa

`matematiikkalehtisolmu.fi/diplomi.html`

Alimmat tasot ovat koulun alkuun, ylimmissä riittää pohtimista lukiolaisillekin.

Opettajille lähetetään pyynnöstä vastaukset koulun sähköpostiin. Pyynnön voi lähettää osoitteeseen

juha piste ruokolainen at yahoo piste com