Solmun ongelmapalsta

Tällä kertaa ratkaisut keskittyvät numerossa 2017/2 olleisiin tehtäviin. Numerosta 2017/1 löytyy vielä jokunen ratkaisematon tehtävä, numeron 2017/3 tehtäviin kaivataan vielä paljon ratkaisuja.

Numeron 2018/2 pulmapalstan materiaalit (tehtäväehdotukset ja ratkaisut) toivotaan maaliskuun 2018 loppuun mennessä osoitteeseen aernvall@abo.fi.

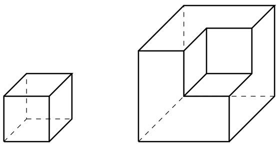
Tehtävät

Tehtävä 1. (Ehdottanut Alli Huovinen) Luvut 1, 2, 3 ja 4 voidaan järjestää kahdella tavalla siten, että jonossa peräkkäiset luvut eivät ole vierekkäin eli jonot $2,4,1,3$ ja $3,1,4,2$.

Muodostetaan näistä toistamalla uusi jono 3, 1, 4, 2, 4, 1, 3, 1, 4, 2, 4, 1, 3, 1, 4, 2, 4, 1, 3, 1, 4, 2, ... Osoita, että jokaiselle kokonaisluvulle n yllä olevasta jonosta löytyy peräkkäiset luvut siten, että n on näiden lukujen summa.

Esimerkiksi $12 = 1+4+2+4+1$ ja $1,4,2,4,1$ löytyy tuosta jonosta.

Tehtävä 2. (Ehdottanut Esa Vesalainen) *Pieni palikka* on $1\times1\times1$-kuution muotoinen, ja *iso palikka* on samanmuotoinen kuin $2\times2\times2$-kuutio, jonka jostakin nurkasta on lohkaistu pois $1\times1\times1$-kuution muotoinen pala:



Voiko yhden pienen palikan ja 585 isoa palikkaa pakata $16\times16\times16$-kuution muotoiseen laatikoon?

Tehtävä 3. (Ehdottanut Matti Sinisalo) Heronin kaavan mukaan kolmion ala on

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

kun a, b ja c ovat kolmion sivut ja $p = \frac{a+b+c}{2}$.

1. Osoita, että kolmion ala voidaan myös kirjoittaa muodossa

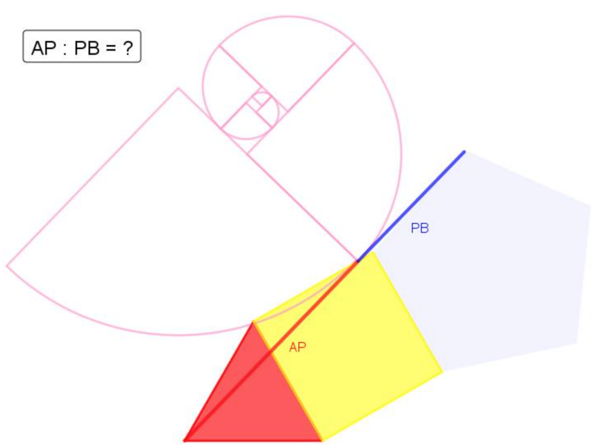
   $$\frac{1}{4}\sqrt{S_2^2 - 2S_4},$$

   kun $S_2 = a^2+b^2+c^2$ ja $S_4 = a^4+b^4+c^4$.

2. Osoita, että jos jännenelikulmion sivut ovat a, b, c, ja d ja merkitään $S_2 = a^2+b^2+c^2+d^2$, $S_4 = a^4+b^4+c^4+d^4$ ja $T = abcd$, niin jännenelikulmion ala voidaan ilmaista muodossa

   $$\frac{1}{4}\sqrt{S_2^2 - 2S_4 + 8T}.$$

Tehtävä 4. (Ehdottanut Edward Krogius) Määritä, missä suhteessa janan AB ja neliön sivun leikkauspiste P leikkaa janan AB.



Ratkaisut

Tehtävä 1, Solmu 2017/2. Ratkaise yhtälön

$$25x^4 + 100x^3 + 20x^2 + 40x + 4 = 0$$

kaikki juuret.

Ratkaisu. (Timo Kärkkäinen) Sijoitetaan polynomin kertoimiin parametri $a = 5$, jolloin saadaan muuttujan a suhteen toisen asteen yhtälö.

$$\begin{aligned} &a^2x^4 + 4a^2x^3 + 4ax^2 + 8ax + 4 \\ &\qquad = (x^4 + 4x^3)a^2 + (4x^2 + 8x)a + 4 = 0. \end{aligned}$$

Ratkaistaan tämä muuttujan a suhteen:

$$\begin{aligned} a &= \frac{-4x^2 - 8x \pm \sqrt{(4x^2 + 8x)^2 - 4(x^4 + 4x^3) \cdot 4}}{2(x^4 + 4x^3)} \\ &= \frac{-4x^2 - 8x \pm 8x}{2x^3(x + 4)} \end{aligned}$$

Saadaan kaksi toisen asteen yhtälöä muuttujan x suhteen:

$$a = -\frac{2}{x^2}, \qquad a = -\frac{2}{x(x+4)}.$$

Tämä yhtälöpari antaa kaikki alkuperäisen neljännen asteen yhtälön juuret. Ensimmäisestä yhtälöstä

$$x^2 = -\frac{2}{a} \Rightarrow \boxed{x_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{2}{5}}}$$

ja toisesta yhtälöstä

$$\begin{aligned} x(x + 4) = -\frac{2}{a} &\Rightarrow x^2 + 4x + \frac{2}{5} = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{x_{3,4} = -2 \pm 3\sqrt{\frac{2}{5}}} \end{aligned}$$

Takaisinsijoituksella nähdään, että nämä neljä ratkaisua todella ovat annetun yhtälön ratkaisuja.

Tehtävä 2, Solmu 2017/2. Kapteeni Jarmo Kerkkinen haluaa matkustaa maapallolta juhlimaan 4,3 valovuoden päähän Alpha Centaurille. Ikävä kyllä poimuajo on vaurioitunut ja kykenee tekemään vain täsmälleen 10 valovuoden loikkia. Pääseekö Jarmo juhliin? Jos ei, miksi ei? Jos pääsee, montako loikkaa vähintään tarvitaan?

Entä silloin, jos loikkien välissä voi tehdä vain täsmälleen 90 asteen käännöksen?

Ratkaisu. Yksi loikka ei selvästikään riitä. Kaksi loikkaa riittää: Muodostetaan kolmio, jonka sivut ovat 10, 10 ja 4,3 valovuotta.

Jos voi tehdä vain 90 asteen käännöksiä, ei ole mahdollista päästä Alpha Centaurille, sillä silloin mahdollisia ovat ainoastaan sellaiset pisteet, jotka sijaitsevat ikäänkuin kolmiulotteisessa koordinaatistossa, jossa yksikön pituus on 10 ja origossa on maa. Kahden tämän koordinaatiston pisteen välinen etäisyys on siis muotoa

$$\sqrt{(a10)^2 + (b10)^2 + (c10)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}10$$

valovuotta. Koska $a, b, c \in \mathbb{Z}$, on etäisyys siis aina vähintään 10 valovuotta, jos se on nollasta poikkeava.

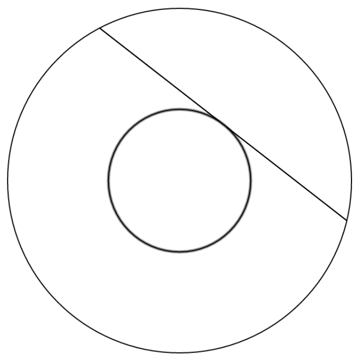
Tehtävä 3, Solmu 2017/2. Kuinka suuri on donitsin pinta-ala? Mitä donitsista kannattaa viivaimella mitata, jos voit tehdä

a) kaksi mittausta

b) vain yhden mittauksen?

(Ajatellaan tässä donitsi kaksiulotteisena otuksena, ei siis normaalina kolmiulotteisena.)

Ratkaisu. (Toimitus) Jos donitsin ulkoympyrän säde on R ja sisäympyrän säde r, niin donitsin ala on $\pi(R^2 - r^2)$. Asetetaan viivoitin donitsille alla olevan kuvan janan osoittamalla tavalla, eli viivoitin sivuaa sisempää ympyrää. Koska donitsi sivuaa sisempää ympyrää, voidaan muodostaa suorakulmainen kolmio piirtämällä sisemmälle ympyrälle se säde, joka kohtaa janan (suorassa kulmassa) ja ulommalle ympyrälle se säde, joka leikkaa janan toisen päätepisteen. Pythagoraan lauseella puolet janan pituudesta on siis $\sqrt{R^2 - r^2}$, joten donitsin ala saadaan laskettua tästä.



Tehtävä 4, Solmu 2017/2. Poistetaan yksi luku lukujoukosta, joka koostuu luvuista $1, 2, \ldots, n$. Jäljelle jääneiden lukujen keskiarvo on $40\frac{3}{4}$. Mikä luku poistettiin?

Ratkaisu (Toimitus) Selvästi pätee $n \geq 41$. Olkoon poistettu luku k. Jäljelle jääneiden lukujen summa on siis

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} - k.$$

Voidaan arvioida

$$40\frac{3}{4} = \frac{\frac{n\cdot(n+1)}{2} - k}{n-1} \leq \frac{n(n+1)-2}{2(n-1)} = \frac{n+2}{2},$$

joten

$$n + 2 \geq 80\frac{6}{4} = 81\frac{1}{2},$$

eli $n \geq 79\frac{1}{2}$. Koska n on kokonaisluku, pätee $n \geq 80$. Voidaan myös arvioida

$$40\frac{3}{4} = \frac{\frac{n\cdot(n+1)}{2} - k}{n-1} \geq \frac{n(n+1)-2n}{2(n-1)} = \frac{n}{2},$$

eli

$$n \leq 81\frac{1}{2},$$

joten $n \leq 81$. Luvulle n on siis kaksi vaihtoehtoa. Huomataan nyt, että ei ole mahdollista, että olisi $n = 80$, sillä mikäli näin olisi, tulisi päteä

$$\frac{80 \cdot 81}{2} - k = 79 \cdot 40\frac{3}{4} = 79 \cdot \frac{163}{4}.$$

Yhtälön vasen puoli on kokonaisluku, oikea puoli ei. Tämä ei siis ole mahdollista. On siis oltava $n = 81$. Nyt

$$\frac{81 \cdot 82}{2} - k = 80 \cdot 40\frac{3}{4} = 20 \cdot 163,$$

eli

$$k = 41 \cdot 81 - 20 \cdot 163 = 61.$$

On helppo tarkistaa sijoittamalla, että tämä todellakin toimii.

Solmun matematiikan verkkosanakirja

Solmun matematiikan verkkosanakirja on osoitteessa

`http://matematiikkalehtisolmu.fi/sanakirja/a.html`

Sanakirjassa selitetään käsitteitä ja annetaan niiden yhteyksiä sekä käännökset englanniksi. Sanakirjan sisältöä ja tekniikkaa koskevia kommentteja voi lähettää osoitteeseen

toimitus at matematiikkalehtisolmu piste fi