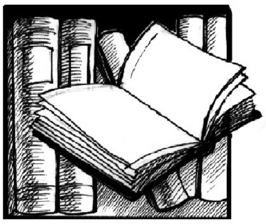
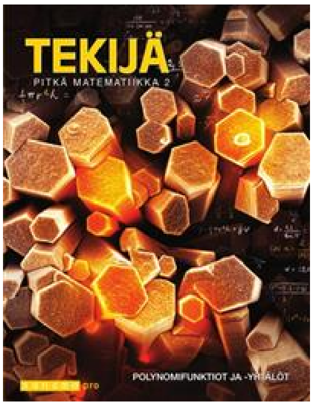


Kirja-arvio: Pitkä matematiikka, toinen ja kolmas kurssi

Matti Lehtinen

Markus Hähkiöniemi, Satu Juhala, Petri Juutinen, Sari Louhikallio-Fomin, Erkki Luoma-Aho, Terhi Raittila ja *Tommi Tikka* : **Juuri. Polynomifunktiot ja -yhtälöt.** 165 s. Otava 2016. Hinta syyskuussa 2017 eri verkkokaupoissa 21,10–26,40 euroa. *Paavo Heiskanen, Päivi Kaakinen, Pertti Lehtinen, Jukka Lehtonen, Mika Leikas* ja *Jorma Tahvanainen*: **Tekijä. Pitkä matematiikka 2.** 124 s. Sanoma Pro 2016. Hinta syyskuussa 2017 eri verkkokaupoissa 20,40–25,55 euroa.

Markus Hähkiöniemi, Satu Juhala, Petri Juutinen, Sari Louhikallio-Fomin, Erkki Luoma-Aho, Terhi Raittila ja *Tommi Tikka* : **Juuri. Geometria.** 201 s. Otava 2016. Hinta syyskuussa 2017 eri verkkokaupoissa 21,10–26,40 euroa. *Paavo Heiskanen, Päivi Kaakinen, Pertti Lehtinen, Jukka Lehtonen, Mika Leikas* ja *Jorma Tahvanainen*: **Tekijä. Pitkä matematiikka 3.** 192 s. Sanoma Pro 2016. Hinta syyskuussa 2017 eri verkkokaupoissa 20,40–25,55 euroa.



Tämä kirjoitus on jatkoa Solmussa 3/2017 julkaistuun lukion uuden opetussuunnitelman mukaisen pitkän ja lyhyen oppimäärän yhteisen kurssin oppikirjojen esittelyyn ja samalla päivitystä kymmenkunta vuotta sitten kirjoittamiini, myös Solmussa julkaistuihin oppikirjaesittelyihin. Kohteena ovat nyt lukion pitkän matematiikan toisen ja kolmannen kurssin oppikirjat. Tarjolla on kaksi vaihtoehtoa, Otavan **Juuri** ja Sanoma Pron **Tekijä**.

Kirjasarjojen yleisiä ominaisuuksia on esitelty kirjoitussarjan edellisessä osassa. *Tekijä* on lakannut erottelemasta harjoitustehtäviään perus- ja syventäviin tehtäviin. Eri osioihin liittyvät nyt tehtäväsarjat I ja II.

Molemmissa kirjasarjoissa on laskentotehtäviin kattavat ratkaisuosastot. Hiukan ihmetyttää, että *Juuri* ei kerro yhdenkään perustelua tai todistusta kysyvän tehtävän ratkaisua. Voisi ajatella, että erityisesti tällaisen tehtävän kohdalla oppilas kaipaisi tukea ratkaisuyritykselleen. – *Juuri* toisaalta antaa useisiin tehtäviin, myös todistamisiin, ratkaisuvihjeitä erillisessä osastossa.

Toisen asteen polynomi

Matematiikan pitkän oppimäärän ensimmäinen varsinainen pakollinen kurssi on MAA2, **Polynomifunktiot ja -yhtälöt**. Sen valokeila on aika kapea: toisen asteen polynomia pääasiassa katsellaan. Opetussuunnitelman mukaisista viidestä tavoitteesta silmään pistää keskimmäinen, joka kertoo, että opiskelija ”osaa ratkaista korkeamman asteen polynomiyhtälöitä, jotka voidaan ratkaista ilman polynomien jakolaskua”. Tämä tarkoittanee, että polynomin $P(x)$ jakaminen tekijöihin nollakohdan x_0 avulla muodossa $P(x) = (x - x_0)Q(x)$ suljetaan pois silloin, kun polynomin Q muodostaminen edellyttäisi ”jakokulmassa jakoa”. (*Tekijässä* on kuitenkin pari harjoitustehtävää, joissa on polynomeja jakoviivan molemmilla puolilla.)

Kirjasarjojen ensimmäisistä osista, pitkän ja lyhyen matematiikan yhteiskurssia varten kirjoitetuista, Sanoma Pron tuote oli huomattavasti kilpailijaa paksumpi. Toisessa kurssissa asetelma on kääntynyt: *Juuri* on selvästi *Tekijää* pulleampi ja raskaampi. Numeroitujen harjoitustehtävien määrässä *Tekijä* kuitenkin voittaa: siinä on 351 tehtävää, *Juuressa* on 309. Tekemistä riittää. Valtaosa harjoitustehtävistä on ”laskutehtäviä”. *Juuressa* on 13 ja *Tekijässä* 19 tehtävää, joiden ainakin jonkin osan tehtävänantoon sisältyy perustelun tai osoituksen pyyntö.

Opetussuunnitelma paaluttaa melko yksiselitteisesti kurssin sisällön, eivätkä oppikirjatkaan juuri lähde sooloilemaan. Eroja silti löytyy. *Tekijä* määrittelee ensin käsitteen *monomi* ja ilmoittaa sitten, että polynomi on monomien summa. *Juuri* puolestaan pitää polynomia muuttujasta ja vakioista yhteen-, vähennys- ja kertolaskuilla muodostettuna lausekkeena. Intuitiivisesti näyttää selvältä, että käsitteet ovat samat, mutta *Juuren* sinänsä hyvä määritelmä olisi varmaan kaivannut ainakin maininnan siitä, että tällainen lauseke on aina sievennettävissä polynomin standardimuotoon, semminkin kun kohta kerrotaan, että polynomin aste on muuttujan korkein eksponentti.

Juuri omistaa kokonaisen luvun ensimmäisen asteen polynomille, kun *Tekijä* puolestaan lähtee liikkeelle polynomeilla laskemisesta ja päätyy esittämään jostain syystä *muistikaavan* nimen saaneet tulojen $(a + b)^2$, $(a + b)^3$ ja $(a + b)(a - b)$ auki kirjoittamiset. Ehkäpä tahallaan on jätetty pois samaan nippuun yleensä yhdistetty $(a - b)^2$. *Juuri* säästää nämä toisen asteen polynomia, tulon nollasääntöä ja neliöjuurta esittelevän toisen lukunsa loppuun. Kumpikaan kirja ei esitä binomien $a^n - b^n$ ja $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ tekijöihin jaon hyödyllisiä ”muistikaavoja”, ei myöskään useamman kuin kahden yhteenlaskettavan summan neliön lauseketta. – Sitä, että polynomin aste voisi olla nollakin, ei kumpikaan kirja ota huomioon.

Kumpikin kirja määrittelee neliöjuuren $\sqrt{a}$ sanomalla sen olevan se ei-negatiivinen luku, jonka toinen potenssi on a. Tässä olisi ihan mukava esittää kysymys neliöjuuren yksikäsitteisyydestä, ja perustella vastaus. Neliöjuuren, samoin kuin *Tekijän* toisessa luvussaan esittelemien korkeampien juurten kohdalla olisi odottanut jonkinlaista juuren numeerisen arvon määrittämisen esittelyä. Kirjojen esimerkeissä on usein niitä poikkeustapauksia, joissa juuri on kokonaisluku. Laskulaitteet antavat likiarvoja, mutta utelias nuori voi ihmetellä, miten ne osaavat. – *Tekijä* kyllä kertoo harjoitustehtävässä jo ammoin tunnetun likimääräiskaavan

$$\sqrt{A} \approx a + \frac{r}{2a},$$

missä a on suurin kokonaisluku, jolle $a^2 \leq A$ ja $r = A - a^2$.

Kumpikin kirja pitää itsestään selvänä, että toisen asteen funktion kuvaaja on symmetrinen. Tätä ominaisuutta käytetään hyväksi etenkin määritettäessä funktion ääriarvoa. Symmetrisyyttä ei kirjoissa mitenkään perustella. Yksinkertaisella laskulla voitaisiin toki nähdä, että

$$ax^2 + bx + c = a\left(-x - \frac{b}{a}\right)^2 + b\left(-x - \frac{b}{a}\right) + c$$

ja perustella symmetria.

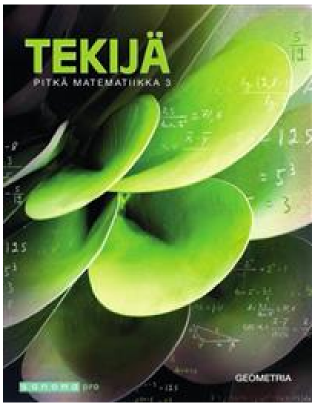
Toisen asteen polynomin teorian ydin on toisen asteen yhtälön ratkaisukaava. *Tekijä* antaa ratkaisukaavan sellaisenaan, perusteluitta ja valaisematta edes siihen sisältyvän $\pm$-merkin tarkoitusta. Kolmen sivun jälkeen esitetään kuitenkin kaavan johto normaalilla neliöksi täydentämisen menetelmällä. *Juuri* esittää kaavan todistettavana lauseena ja antaa todistukseksi saman johdon. (Kun kaava on jo annettu, sen todistus voisi perustua myös siihen, että ratkaisukaavan mukainen luku toteuttaa yhtälön.)

”Toisen asteen epäyhtälön” käsittely nojautuu kummassakin kirjassa funktion kuvaajaan. Kun kummastakin kirjasta löytyy myös toisen asteen polynomin tekijöihin jako polynomin nollakohtien avulla, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, olisi epäyhtälön ratkaisu voitu esittää täsmällisestikin ja todeta sitten yhteys kuvaajaan. – Tekijöihin jako perustellaan kummassakin kirjassa. *Tekijä* nojautuu ratkaisukaavaan ja sen perusteella johdettaviin Vièten kaavoihin, vaikkei niitä nimeltä mainitakaan. *Juuren* todistus perustuu tekijän $x - x_1$ pakottamiseen esiin. Valitettavasti *Juuri* ei kuitenkaan käsittele kaksoisjuuren tapausta.

Niitä näitä geometriasta

Pitkän matematiikan kolmas kurssi on nimeltään **Geometria**. Opetussuunnitelma määrittelee neljä keskeistä sisältöä: ”kuvioiden ja kappaleiden yhdenmuotoisuus”, ”sini- ja kosinilause”, ”ympyrän, sen osien ja siihen liittyvien suorien geometria” sekä ”kuvioihin ja kappaleisiin liittyvien pituuksien, kulmien, pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen”.

Kilpailevat sarjat ovat tuottaneet kolmoskurssiin likimain yhtä laajat teokset. Myös numeroitujen harjoitustehtävien määrä on jokseenkin sama. Asioiden jaottelussakaan ei ole suurta eroa: *Juuri* sijoittaa yhdenmuotoisuuden tasogeometrian peruskäsitteitä esittelevään lukuun, mutta *Tekijä* omistaa yhdenmuotoisuudelle oman lukunsa.



Geometria oli vielä tämän kirjoittajan muistin aikana se koulumatematiikan osa-alue, jossa teorian johdonmukainen rakentaminen oli nähtävissä. Olihan takana Eukleideen Alkeiden deduktiivisen järjestelmän vuosisatainen valta-asema yhtenä eurooppalaisen sivistyksen vastaansanomattomista kulmakivistä. Tästä matematiikan olennaisuudesta oppilas sai ainakin hiukan tietoa. Monet matematiikanopetuksen uudistusaallot ovat olleet vastareaktioita Eukleideelle. Mutta vuoden 2016 opetussuunnitelmassakin kerrotaan yhä yhtenä tavoitteena olevan sen, että opiskelija ”harjaantuu muotoilemaan, perustelemaan ja käyttämään geometrista tietoa käsitteleviä lauseita”.

Miten tämä toteutuu oppikirjoissa? *Juuren* ensimmäinen lauseeksi otsikoitu tulos on ”Kolmion kulmien summa on 180°.” Lause todistetaan, toki, vetoamalla yhdensuuntaisiin suoriin, samankohtaisiin kulmiin ja ristikulmien yhtäsuuruuteen. Lukija voi aiheellisesti kysyä, ovatko perusteluiksi esitettävät asiat sen todempia kuin ”todistettava”. Vastaavasti *Tekijä* todistaa ensimmäiseksi lauseen ristikulmien yhtäsuuruudesta, perustellen sen tavalla, joka edellyttää kulman mittaluvun olemassaoloa. *Tekijä* esittää lauseen, jonka sisältö on yhdensuuntaisaksiooma, kuitenkaan puhumatta mitään todistuksesta.

Juuri tukeutuu kilpailijaansa enemmän kirjan ulkopuoliseen aineistoon, internetistä ladattaviin Geogebrasovelmiin. Niitä käytetään perustelemaan erinäisiä tosiasioita, mm. kolmion pinta-alan kaavaa. Animaatio perusteleekin hauskasti teräväkulmaisen kolmion pinta-alan, mutta kun kolmion muuttaa tylppäkulmaiseksi, animaation mahdollisuus poistuu, ja tilalle tulee algebrallinen päättely. Johdonmukaista oppirakennelmaa ei kumpikaan kirja esitä. Jotakin todistetaan, jotkin asiat ohitetaan maininnalla todistuksen sivuuttamisesta, jotkin luvataan todistaa myöhemmissä kursseissa.

Opetussuunnitelma ei tunne käsitettä *yhtenevyys*, joka kuitenkin on *yhdenmuotoisuutta* perustavanlaatuisempi. Molemmat oppikirjat ovat kuitenkin upottaneet kolmioiden yhtenevyyden yhdenmuotoisuuden sisään. *Juuri* jättää pois ”epätäydellisen” yhtenevyyslauseen ”ssk”. Harjoitustehtävässä 189 esitetään virheellinen todistus tasakylkisen kolmion kantakulmien yhtäsuuruudelle ja kehotetaan oppilasta korjaamaan se. Tämä ei esitetyssä tilanteessa onnistune ilman ssk:ta.

Opetussuunnitelman sisältökohta ”sini- ja kosinilause” vaatii trigonometristen funktioiden määrittelyn myös tylpille kulmille, ja niin on siirryttävä suorakulmaisen kolmion ulkopuolelle. Tässä kirjat menettelevät eri tavoin. *Juuri* ottaa käyttöön yksikköympyrän ylempään puolitasoon sijoittuvan puolikkaan (toki 30 sivua aikaisemmin kuin käsite ”ympyrä” määritellään) ja määrittelee kosinin ja sinin ympyrän pisteen koordinaattien avulla. Yli oikokulman ei kuitenkaan mennä, vaikka kaikenkokoiset kulmat on aikaisemmin määritelty. *Tekijä* puolestaan esittää kolmion alan lausekkeen kahden sivun pituuksien ja sivujen välisen kulman sinin tulona ja saa tylpän kulman sinin vaatimalla pinta-alan lausekkeelle invarianssin. Tylpän kulman kosini on *Tekijässä* ilmoitusasia.

Pitkän matematiikan oppikirjojen kirjoittajia ei käy kateeksi. Opetussuunnitelman raamit tekevät kunnollisen matematiikan oppikirjan kirjoittamisen varmasti haasteelliseksi. Miten itse toimisin? Ainakin yrittäisin olla rehellinen: kertoa mikä on todistus, mikä uskottelu. Ja yrittäisin välittää tiedon siitä, että matematiikka ei ole luonnontiede. Vaikka havainnot voivat sille suuntaa näyttää, ne eivät mitään ratkaise. Ehkei valtaosa ihmiskunnasta tätä tietoa tarvitse, mutta ne suomalaiset, joille oikean matematiikan tapaamisesta olisi hyötyä ja iloa, olisivat varmaan juuri pitkän matematiikan oppikirjojen lukijoita.

Tämä kirja-arvio vastaa kirjoittajan, mutta ei välttämättä toimituskunnan näkemyksiä.