Moniulotteisuuden ihmeitä: ongelmien ratkaisuita

Esa V. Vesalainen
Matematik och statistik, Åbo Akademi

Edellisen numeron epäyhtälöartikkelissa[1] oli lopussa kahdeksan ongelmaa pohdittavaksi niille lukijoille, jotka sellaista kaipaavat. Tässä on niille esimerkkiratkaisuita.

Ongelma 1. *Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että*

$$\frac{a+b+c}{abc} \leqslant \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Ratkaisu. Kahden muuttujan aritmeettis-geometrisen epäyhtälön mukaan

$$\begin{aligned}\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} + \frac{2}{c^2} &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \\ &\geqslant \frac{2}{ab} + \frac{2}{bc} + \frac{2}{ca} = 2 \cdot \frac{a+b+c}{abc}.\end{aligned}$$

Ongelma 2. *Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että*

$$a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^2bc + b^2ca + c^2ab.$$

Ratkaisu. Missä tahansa suuruusjärjestyksessä luvut a, b ja c ikinä ovatkaan, ovat luvut a^2, b^2 ja c^2 ja toisaalta luvut a^3, b^3 ja c^3 aina samassa suuruusjärjestyksessä, ja luvut bc, ca ja ab vastakkaisessa suuruusjärjestyksessä. Nyt voimme käyttää suuruusjärjestysepäyhtälöä kahdesti arvioidaksemme

$$\begin{aligned}a^2bc + b^2ca + c^2ab &\leqslant a^2 \cdot ab + b^2 \cdot bc + c^2 \cdot ca \\ &= a^3b + b^3c + c^3a \\ &\leqslant a^3 \cdot a + b^3 \cdot b + c^3 \cdot c \\ &= a^4 + b^4 + c^4.\end{aligned}$$

Ongelma 3. *Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että*

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{a+b+c}{2}.$$

Ratkaisu. Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön mukaan

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}\right) \cdot 2\,(a+b+c) \\ &\quad= \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}\right) \\ &\qquad \cdot \Big((b+c) + (c+a) + (a+b)\Big) \\ &\quad\geqslant (a+b+c)^2,\end{aligned}$$

mistä väite seuraa pienellä sievennyksellä.

Ongelma 4. *Olkoot α, β ja γ kolmion kulmat radiaaneissa. Osoita, että*

$$\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2} \geqslant \sqrt{3}.$$

[1] Vesalainen, E. V.: *Moniulotteisuuden ihmeitä: Shapiron syklinen epäyhtälö*, Solmu, 1/2018, 26–34.

Ratkaisu. Funktio

$$x \longmapsto \tan x \colon \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$

on konveksi, sillä sen derivaatta

$$x \longmapsto \frac{1}{\cos^2 x} \colon \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$

on kasvava. Siten Jensenin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2} &\geqslant 3\tan\frac{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}}{3}\\ &= 3\tan\frac{\pi}{6} = 3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Ongelma 5. *Olkoot α, β ja γ kolmion kulmat. Osoita, että*

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Ratkaisu. Funktio

$$x \longmapsto -\sin x \colon \left]0, \pi\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$

on konveksi, sillä sen derivaatta

$$x \longmapsto -\cos x \colon \left]0, \pi\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$

on kasvava. Siten Jensenin epäyhtälön mukaan

$$\begin{aligned}-\sin\alpha - \sin\beta - \sin\gamma &\geqslant -3\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\\ &= -3\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Ongelma 6. *Todista, että jos $p \in [1, \infty[$, jos $n \in \mathbb{Z}_+$, ja jos x_1, x_2, ..., x_n ovat positiivisia reaalilukuja, niin*

$$\sqrt[p]{\frac{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p}{n}} \geqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Ratkaisu. Funktio

$$x \longmapsto x^p \colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

on konveksi, sillä sen derivaatta

$$x \longmapsto px^{p-1} \colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

on kasvava. Siten Jensenin epäyhtälön nojalla

$$\frac{x_1^p + \ldots + x_n^p}{n} \geqslant \left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)^p,$$

mistä väite seuraa ottamalla puolittain p. juuri.

Ongelma 7. *Osoita potenssikeskiarvojen epäyhtälö: Jos r ja s ovat positiivisia reaalilukuja, joille $r \geqslant s$, jos $n \in \mathbb{Z}_+$, ja jos x_1, x_2, ..., x_n ovat positiivisia reaalilukuja, niin*

$$\sqrt[r]{\frac{x_1^r + x_2^r + \ldots + x_n^r}{n}} \geqslant \sqrt[s]{\frac{x_1^s + x_2^s + \ldots + x_n^s}{n}}.$$

Ratkaisu. Valitaan $p = r/s$, jolloin edellisen ongelman mukaan

$$\begin{aligned}\frac{x_1^s + \ldots + x_n^s}{n} &\leqslant \sqrt[p]{\frac{x_1^{ps} + \ldots + x_n^{ps}}{n}}\\ &= \left(\sqrt[r]{\frac{x_1^r + \ldots + x_n^r}{n}}\right)^s,\end{aligned}$$

mistä väite seuraakin ottamalla puolittain s. juuri.

Ongelma 8. *Olkoot a, b, c, d, e ja f positiivisia reaalilukuja. Osoita, että*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+f} + \frac{e}{f+a} + \frac{f}{a+b} \geqslant 3.$$

Ratkaisu. Aloitamme soveltamalla Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä niin, että ikävältä tuntuvat nimittäjät supistuvat pois:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+f} + \frac{e}{f+a} + \frac{f}{a+b}\right)\\ &\quad\cdot\Big(a(b+c) + b(c+d) + c(d+e)\\ &\qquad + d(e+f) + e(f+a) + f(a+b)\Big)\\ &\geqslant (a+b+c+d+e+f)^2\\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + 2ad + 2be + 2cf\\ &\quad + 2ab + 2ac + 2ae + 2af + 2bc + 2bd + 2bf\\ &\quad + 2cd + 2ce + 2de + 2df + 2ef.\end{aligned}$$

Täten

$$\begin{aligned}&\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+f} + \frac{e}{f+a} + \frac{f}{a+b}\\ &\quad\geqslant 2 + \frac{(a+d)^2 + (b+e)^2 + (c+f)^2}{a(b+c) + b(c+d) + \ldots + f(a+b)}.\end{aligned}$$

Riittää siten osoittaa, että

$$\begin{aligned}&(a+d)^2 + (b+e)^2 + (c+f)^2\\ &\qquad\geqslant a(b+c) + b(c+d) + \ldots + f(a+b).\end{aligned}$$

Mutta soveltamalla Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä näemme, että

$$\begin{aligned}&(a+d)^2 + (b+e)^2 + (c+f)^2\\ &\quad= \sqrt{(a+d)^2 + (b+e)^2 + (c+f)^2}\\ &\qquad\cdot\sqrt{(b+e)^2 + (c+f)^2 + (a+d)^2}\\ &\quad\geqslant (a+d)(b+e) + (b+e)(c+f) + (c+f)(a+d)\\ &\quad= ab + ae + db + de + bc + bf\\ &\qquad + ec + ef + ca + cd + fa + fd\\ &\quad= a(b+c) + b(c+d) + c(d+e)\\ &\qquad + d(e+f) + e(f+a) + f(a+b),\end{aligned}$$

ja olemme valmiit.