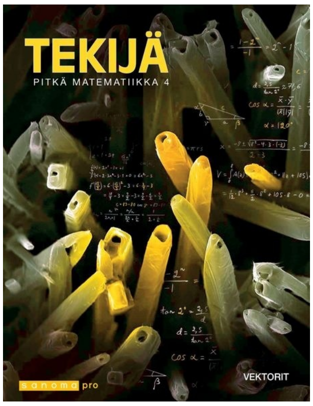
Kirja-arvio: Pitkä matematiikka, neljäs ja viides kurssi

Matti Lehtinen

Markus Hähkiöniemi, Satu Juhala, Petri Juutinen, Sari Louhikallio-Fomin, Erkki Luoma-Aho, Terhi Raittila ja *Tommi Tikka* : **Juuri. Vektorit.** 166 s. Otava 2016. Hinta joulukuussa 2017 eri verkkokaupoissa 21,20–22,00 euroa. *Paavo Heiskanen, Päivi Kaakinen, Jukka Lehtonen, Mika Leikas* ja *Jorma Tahvanainen*: **Tekijä. Pitkä matematiikka 4.** 148 s. Sanoma Pro 2016. Hinta joulukuussa 2017 eri verkkokaupoissa 20,60–21,40 euroa.

Markus Hähkiöniemi, Satu Juhala, Petri Juutinen, Erkki Luoma-Aho, Terhi Raittila ja *Tommi Tikka* : **Juuri. Analyyttinen geometria.** 160 s. Otava 2016. Hinta syyskuussa 2017 eri verkkokaupoissa 21,20–21,40 euroa. *Sami Alatupa, Paavo Heiskanen, Päivi Kaakinen, Jukka Lehtonen, Mika Leikas* ja *Jorma Tahvanainen*: **Tekijä. Pitkä matematiikka 5.** 164 s. Sanoma Pro 2016. Hinta syyskuussa 2017 eri verkkokaupoissa 20,40–25,55 euroa.



Tämä kirjoitus jatkaa Solmussa 3/2017 alkanutta katsausta lukion pitkän matematiikan oppikirjoihin, matemaatikon silmin katseltuina. En puutu kirjojen ja niiden oheisaineistojen didaktiseen arvoon – näiden arviointiin en (ainakaan) ole pätevä. Varmuuden vuoksi kertaan, että paikoin kriittisetkin mielipiteeni ovat vain omiani, eivät esimerkiksi Solmun toimituksen. Kritiikkini kohdistuu monesti opetussuunnitelmaan. Mutta kirjailijoita moitin kovin tiukasta pitäytymisestä opetussuunnitelman kirjaimeen, matematiikan vahingoksi.

Vektorikurssi

Lukion pitkän matematiikan neljäs kurssi on omistettu vektoreille. Opetussuunnitelma listaa kurssin kohdalle kuusi tavoitetta ja viisi keskeistä sisältöä. Tavoitteiden joukossa on vektoreihin liittyvän geometrian lisäksi kohta, joka sanoo, että opiskelijan tulisi ymmärtää yhtälöryhmän ratkaisemisen periaate. Keskeisiin sisältöihin kuuluvat vektorien laskutoimitukset. Vektorituloa ei kuitenkaan mainita. Kurssin keskeistä sisältöä ovat myös suorat ja tasot avaruudessa. Opetussuunnitelma ei ota kantaa siihen, eittämättä yleissivistykseen kuuluvaa tietoon, että lineaarisilla malleilla, siis vektoriavaruuksilla, kuvataan erittäin monenlaisia ilmiöitä eri tiedonaloilla. *Juuri* kertoo alun motivointiosiossa vektorigrafiikasta, mutta kirjan luettuaan ei tästä tekniikasta ole viisastunut.

Mikä on vektori? Se voi olla yleisen lineaarisen struktuurin alkio, mutta kun halutaan, että tällaisesta oliosta olisi suoraa käytännön hyötyä, on saatava kytkentä havaintomaailmaan. Jos vektorikäsite pohjataan geometriaan, on jotenkin päästävä siihen, että vektoria määrittävät suunta ja koko. Tyydyttävä vektorin määritelmä on ”suuntajanojen ekvivalenssiluokka”. Jos tällaisten luokkien laskutoimitukset määritellään luokkien edustajien avulla, on varmistuttava siitä, että eri edustajan valinta ei vaikuta tulokseen.

Oppikirjat joutuvat oikaisemaan. *Juuren* mukaan ”vektori on jana, jolla on suunta”. *Juuri* jatkaa määritelmää kertomalla, että ”vektorin pituus on sitä vastaavan janan pituus”. Mutta jos vektori itse on jana, niin mikä on sitä vastaava jana? *Tekijä* ei määrittele käsitettä vektori ollenkaan, mutta kertoo, että ”Vektorilla on suunta ja pituus. Vektoria kuvaavan nuolen suunta osoittaa vektorin suunnan ja nuolen pituus ilmaisee vektorin pituuden.” *Juuren* mukaan kaksi vektoria ovat ”yhtä suuret, jos ne ovat yhtä pitkät ja samansuuntaiset”. *Tekijän* mukaan kaksi vektoria ovat sama vektori, jos ne ovat samansuuntaiset ja yhtä pitkät. *Tekijä* ottaa myös käyttöön käsitteen suuntajana ja kertoo jokaisen suuntajanan edustavan jotain vektoria. Vektori suuntajanojen ekvivalenssiluokkana on siis oikeastaan *Tekijän* tekijöiden mielessä. Olisiko asian voinut ääneenkin sanoa?

Kumpikin kirja esittää vektorin perusmerkinnäksi pienen kirjaimen, jonka päällä on viiva, $\overline{u}$, ja mainitsee ohimennen, että viivan sijasta voidaan käyttää nuolta, $\vec{u}$. Kun kompleksiluvut on poistettu lukion oppimääristä, ei sekaannusta kompleksiluvun liittoluvun merkinnän kanssa tule, ainakaan lukiossa. *Juuri* muistaa myös lisätietolaatikossa mainita lihavoinnin käytön vektorin merkkinä. Että näin tehtäisiin ”koneella kirjoitettaessa” niin kuin *Juuri* sanoo, on kyllä hiukan omituista. Mutta anglosaksisessa kirjallisuudessa lihavointi on sangen yleinen vektorin kirjoitusasu ja esimerkiksi fysiikan oppikirjoissa siihen väkisinkin törmää. – Merkinnöistä vielä: *Tekijä* käyttää sekä vektorikurssin että analyyttisen geometrian osuudessa mielestäni vähemmän onnistunutta merkintätapaa ”$P(a, b)$” tai ”$P(a, b, c)$” pisteelle, jonka nimi on P ja jonka koordinaatit ovat a ja b tai a, b ja c. Merkintä on ristiriidassa kautta matematiikan käytössä olevan funktiomerkinnän kanssa eikä sitä oikein mikään perustele. Jos pisteen (a, b) nimeksi otetaan P, niin $P = (a, b)$. *Juuri* onkin omaksunut tämän käytännön. Samat käytänteet jatkuvat sarjojen analyyttiselle geometrialle omistetuissa osissa.

Molemmat kirjat määrittelevät vektorien skalaaritulon $\overline{a}\cdot\overline{b}$ koordinaattilausekkeena $(a_1\overline{i}+a_2\overline{j}+a_3\overline{k})\cdot(b_1\overline{i}+b_2\overline{j}+b_3\overline{k}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Tätä varten tarvitaan ensin vektorille yksikäsitteinen koordinaattiesitys. Kirjat todistavatkin esityksen $\overline{a} = t\overline{u} + s\overline{v}$ yksikäsitteisyyden, kun $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat erisuuntaisia vektoreita ja $\overline{a}$ on samassa tasossa kuin $\overline{u}$ ja $\overline{v}$. Sen sijaan esityksen olemassaoloa ei oikeastaan missään perustella. Ja kolmiulotteinen tilanne otetaan vastaan vain ilmoitusasiana. Kumpikaan kirja ei kysy, riippuuko määritelty suure siitä, miten kantavektorit on valittu.

Skalaaritulon häviämisen yhteys vektorien kohtisuoruuteen perustellaan Pythagoraan lauseen kautta. Kun *Tekijä* on valinnut järjestyksen, jossa pistetulon osittelulaki perustellaan heti määritelmän jälkeen, se saa kohtisuoruusehdon perustelun näyttämään elegantimmalta kuin koordinaattien pyörittelyyn (xy-tasossa vain) turvautuva *Juuri*. – Molemmat kirjat toki esittävät sitten lauseena skalaaritulon standardimääritelmän $\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos(\overline{a}, \overline{b})$ ja perustelevat sen kurssissa 3 esitetyn kosinilauseen avulla. – Valittu järjestys ei aivan tee oikeutta skalaaritulon olemukselle. Sehän nimenomaan tuo vektorien maailmaan mittakepin suuntien erolle, kulmalle. Kirjat eivät myöskään esittele skalaarituloa työkaluna, jota käytetään, kun määritetään vektorin komponentti toisen vektorin suunnassa.

Opetussuunnitelmassa kurssin keskeisiin sisältöihin listattu (lineaarisen) yhtälöryhmän ratkaiseminen tulee tarpeeseen esimerkiksi silloin, kun tunnettu vektori halutaan jakaa tunnettujen vektorien suuntaisiksi komponenteiksi. *Juuri* esitteleekin kahden ja kolmen tuntemattoman lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemisen tekniikkaa vektorien koordinaattiesitykseen johdattavan luvun jälkeen. Kirjassa joudutaan jo tätä ennen ratkaisemaan yhtälöryhmiä. *Tekijä* sen sijaan aloittaa kurssin yhtälöryhmistä. Determinanttien tarjoamaa algoritmia ryhmän ratkaisemiseen ei kumpikaan kirja edes mainitse. Toinen asia, jonka kohdalla kirjojen järjestykset eroavat toisistaan, on osio ”geometriaa vektoreilla”, jonka *Tekijä* sijoittaa koko esityksen loppuun ja *Juuri* ennen kolmiulotteisiin vektoreihin siirtymistä. Osiot ovat kuitenkin melko samanlaiset.

Opetussuunnitelman viides keskeinen sisältö on ”suorat ja tasot avaruudessa”. Suorasta kerrotaan sen vektori- ja parametrimuotoinen yhtälö. *Juuri* antaa nämä eksplisiittisesti myös xy-tasossa, muttei vihjaakaan, että esityksestä

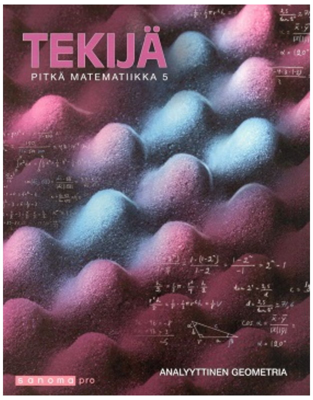
$$\begin{cases} x = x_0 + ts_x \\ y = y_0 + ts_y \end{cases}$$

saattaisi t:n eliminoimalla päästä suoran $y = ax + b$ -muotoiseen yhtälöön. Sen sijaan asian kolmiulotteinen vastine, tason yhtälö $ax+by+cz+d = 0$ kyllä esitetään.

Kun opetussuunnitelma ei mainitse vektorin vektorituloa, siitä ei kumpikaan kirja mitään mainitse. Vektoreiden soveltaminen niin suorien ja tasojen geometriaan kuin fysiikkaankin jää tästä syystä vähän raajarikkoiseksi. Olisiko oppikirjailijoilla saattanut olla rohkeutta sisällyttää kokonaisuuteensa myös vektoritulo, tietysti varoituksin siitä, että hypätään opetussuunnitelman aitauksen yli?

Analyyttinen geometria

Lukion pitkän matematiikan viidennen kurssin otsikko on Analyyttinen geometria. Keskeisiksi sisällöiksi opetussuunnitelma listaa pistejoukon yhtälön, suoran, ympyrän ja paraabelin yhtälöt ja pisteen etäisyyden suorasta. Analyyttisen geometrian ulkopuolelta on vielä otettu sisällöksi itseisarvoyhtälön ja -epäyhtälön ratkaiseminen. Opetussuunnitelman geometria-alusta näyttää olevan taso, eivätkä oppikirjatkaan useamman ulottuvuuden asioihin puutu.



Perinteinen koulun analyyttinen geometria on keskittynyt kartioleikkauksiin, toisen asteen käyriin. Opetussuunnitelma mainitsee näistä enää ympyrän ja paraabelin. *Juuri* esittää kuitenkin ilahduttavasti johdantosivullaan kuvasarjan kartiota eri asennoissa leikkaavista tasoista ja nimeää vastaavat käyrät. *Tekijäkin* mainitsee sanan kartioleikkaus – ainakin ehdottaessaan toisen asteen lausekkeen neliöksi täydentämisen työkaluksi laskulaitteen ”kartioleikkaussovellusta”.

Molempien kirjojen ensimmäinen asiakokonaisuus on itseisarvo. *Tekijä* kompastelee. Se määrittelee itseisarvon käsitteen toisen määrittelemättömän käsitteen avulla: ”luvun a itseisarvo on luvun a etäisyys luvusta 0”. Kaksi sivua myöhemmin tulee sitten uusi määritelmä: ”lukujen a ja b etäisyys on lukujen erotuksen itseisarvo $|a-b|$”. *Juuri* esittää konstailematta määritelmän

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{jos } a \geq 0, \\ -a, & \text{jos } a < 0. \end{cases}$$

Tyyppiä $|f(x)| < |g(x)|$ olevalle epäyhtälölle *Tekijä* antaa kategorisesti ratkaisuohjeeksi yhtäpitävän epäyhtälön $f(x)^2 < g(x)^2$ ratkaisemisen. Esimerkkinä käsitelty epäyhtälö $|3x-4| > |x|$ taitaa kyllä ratketa ainakin yhtä mukavasti suoraan itseisarvon määritelmään nojautumalla kuin toisen asteen yhtälön kautta kiertäen.

Opetussuunnitelman käyttämä ilmaus ”pistejoukon yhtälö” näyttää määrittäneen oppikirjoja. Näin molemmat tulevat esitelleeksi ”käyrän yhtälön”, mutta eivät puhu pistejoukoista, joiden määritelmät perustuvat epäyhtälöihin. Ei olisi paljon lisää tekstiä tarvittu ympyrän sisä- ja ulkopuolen tai suoran määrittämien puolitasojen analyyttisten määrittelyjen esittelyille.

Molemmat kirjat kiinnittävät sivumäärällä mitaten eniten huomiota suoriin. Kun kurssissa 4 on jo esitelty suoran ominaisuuksia sen vektorimuotoisesta esityksestä lähtien, tuntuu hämmästyttävältä, että kumpikaan kirja ei tunnu sanallakaan tätä mainitsevan. Ei kumuloidu matemaattinen tieto.

Opetussuunnitelman tavoitteissa mainitaan ympyrä ja paraabeli. ”Perinteiseen” analyyttisen geometrian oppimäärään kuuluvat muut toisen asteen käyrät *Tekijä* jättää maininnatta. *Juuri* sentään esittelee ellipsin ja hyperbelin harjoitustehtävissä ja käsittelee ”pistejoukon yhtälö” -luvussa esimerkkinä käyrää $x^2+2y^2=6$, sitä kuitenkaan ellipsiksi kertomatta; käyrän piirtämiseksi ehdotetaan ”sopivan ohjelman” käyttöä. *Juuri* kertoo myös paraabelin määritelmän johtosuoran ja polttopisteen avulla ja näyttää jopa kuvan, jossa johtosuora ei ole kummankaan koordinaattiakselin suuntainen. Analyyttisesti toki käsitellään vain paraabeleja, joiden akseli on x- tai y-akselin suuntainen.

Ympyrä-osioon molemmat kirjat sisällyttävät erilaisia tangentin annetulle ympyrälle piirtämisen tehtäviä. *Tekijä* tarjoaa tehtävien ratkaisuksi toisen asteen yhtälön diskriminantin häviämisen tutkimista vaativia ”yhden leikkauspisteen” menetelmiä, *Juuren* keino on pisteen etäisyyden suorasta kertova kaava. Oppilaan tai opettajan keksittäväksi jää säteen ja tangentin kohtisuoruuden soveltaminen, usein näppärä tangentin määrityskeino.

En ole oikein osannut asettaa tarkastelussa olevia kahta oppikirjasarjaa paremmuusjärjestykseen kurssien MAB1 ja MAA2 – MAA4 kohdalla. Kurssin MAA5 oppimateriaaleista tuntuu *Juuri* onnistuneen hiukan paremmin, se kun näyttää pitävän edes raollaan ikkunoita opetussuunnitelman rajaaman alueen ulkopuolelle.