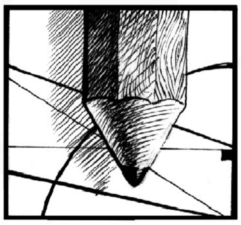


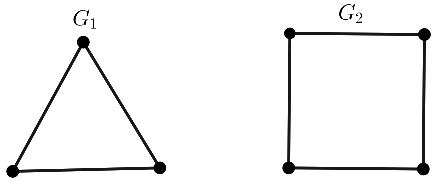
Tason värityksestä – Hadwigerin-Nelsonin ongelma

Neea Palojärvi
Åbo Akademi

Hadwigerin-Nelsonin ongelmassa tarkastellaan tason väritystä. Kysymys on, mikä on pienin määrä värejä, joka tarvitaan tason värittämiseen, kun halutaan ettei mitään kahta pistettä, jotka ovat etäisyydellä 1 toisistaan, väritetä samalla värillä. Tunnettujen tulosten mukaan tällainen väritys on mahdollista saada aikaan seitsemää väriä käyttäen (ks. [2, 4]). Siispä Hadwigerin-Nelsonin ongelman oikea vastaus on korkeintaan seitsemän. Toisaalta tiedetään (ks. [1]), että halutun värityksen tekemiseen tarvitaan vähintään viisi väriä. Avoimena kysymyksenä on, onko viisi, kuusi vai seitsemän oikea vastaus Hadwigerin-Nelsonin ongelmaan. Tässä kirjoituksessa tarkastellaan värien määrän alarajaan liittyviä tuloksia ja osoitetaan, että ongelman pystyy ratkaisemaan seitsemällä värillä.

Ongelman muotoilu graafiteorian avulla

Hadwigerin-Nelsonin ongelma voidaan muotoilla myös graafiteorian avulla. Tarkastellaan väritettävää tasoa äärettömänä graafina, jossa solmuina ovat tason pisteet ja kahden solmun välillä on kaari täsmälleen silloin, kun ne ovat tasossa täsmälleen etäisyydellä 1 toisistaan. Nimetään tämä graafiksi G. Nyt kysymys kuuluu, mikä on pienin määrä värejä, jotka voidaan liittää graafin G solmuihin niin, etteivät mitkään kaksi vierekkäistä solmua ole samanväriset. Tätä värien lukumäärää kutsutaan graafin *väriluvuksi.* Esimerkiksi kuvan 1 graafin G_1 väriluku on kolme ja graafin G_2 kaksi.

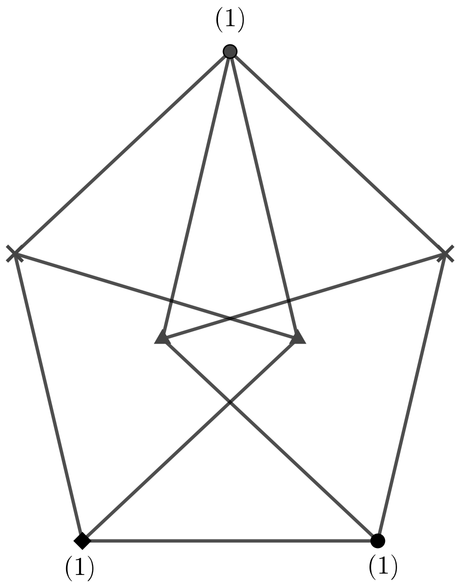


Kuva 1: Graafin G_1 väriluku on kolme ja graafin G_2 väriluku on kaksi.

Tarvittavan värien määrän alarajasta

Tarkastellaan ensin, kuinka monta väriä ainakin tarvitaan, jotta taso voidaan värittää Hadwigerin-Nelsonin ongelmassa vaaditulla tavalla. Hyödynnetään tähän edellisessä luvussa kerrottua tulkintaa ongelmasta graafiteorian avulla ja erityisesti siinä määriteltyä graafia G. Jos pystytään löytämään graafin G aligraafi, jonka väriluku on n, niin luonnollisesti myös koko graafin G väriluku on ainakin n. Tavoitteena on siis tutkia graafin G aligraafien värilukuja.

Leo ja William Moserin [3] todistusten mukaan havaitaan, että graafin G väriluvun on oltava ainakin neljä. Todistus perustuu Moserin graafin hyödyntämiseen. Moserin graafi on kuvassa 2 oleva graafi, joka koostuu seitsemästä solmusta ja niistä yhdistävästä 11 kaaresta. Jokaisen kaaren pituus on 1 ja täten se on graafin G aligraafi. Kuten kuvasta 2 näkyy, Moserin graafin pystyy värittämään neljällä värillä niin, etteivät mitkään kaksi vierekkäistä solmua ole samanväriset. Eri värit on kuvattu kuvassa solmujen eri muotoina. Toisaalta Moserin graafin värittämiseen tarvitaan ainakin neljä väriä. Nimittäin, jos graafin yrittäisi värittää käyttämällä enintään kolmea väriä, niin tutkimalla tasasivuisia kolmioita huomataan, että kuvassa luvulla 1 merkittyjen solmujen pitäisi olla samanvärisiä. Mutta tämä on mahdotonta, sillä kahden alimman solmun välillä on kaari. Täten Moserin graafin väriluku on neljä. Moserin graafin avulla saadaan siis graafin G väriluvuksi vähintään neljä.



Kuva 2: Moserin graafin väriluku on neljä.

Kuten jo alussa todettiin, alaraja neljä ei kuitenkaan ole paras tunnettu tulos värien määrälle. Tämän vuoden huhtikuussa brittiläinen harrastelijamatemaatikko Aubrey de Grey osoitti [1], että graafilla G on 1581-solmuinen aligraafi, jonka väriluku on viisi. Täten siis graafin G väriluku on vähintään viisi. Kun kerran on olemassa jokin arvio tarvittavien värien määrän alarajalle, olisi myös kiinnostava tietää, mitä tarvittavien värien ylärajasta tiedetään.

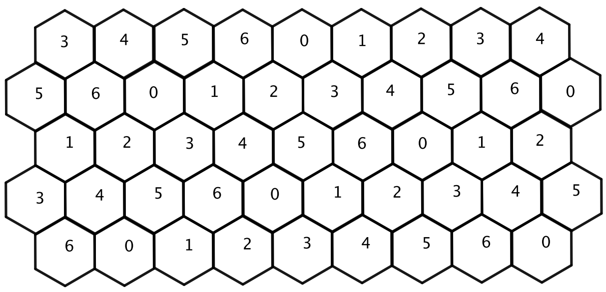
Värejä tarvitaan korkeintaan seitsemän

Tämän luvun päämääränä on osoittaa, että taso voidaan värittää seitsemällä värillä niin, että mitkään kaksi etäisyydellä 1 toisistaan olevaa pistettä eivät ole samanvärisiä. Tämä tehdään kahdessa osassa. Ensin taso väritetään sopivasti seitsemällä värillä ja sitten todistetaan, että tämä väritys toteuttaa halutut ehdot. Todistus perustuu John Isbellin (ks. esimerkiksi [2, 4]) keksimään tason väritykseen, jonka perusteella hän osoitti, että seitsemällä värillä pystytään värittämään taso Hadwigerin-Nelsonin ongelmassa vaadittujen ehtojen mukaisesti.

Tason värittäminen

Tarkastellaan nyt sellaista tason väritystä, jonka huomataan seuraavassa alaluvussa toteuttavan Hadwigerin-Nelsonin ongelman vaatimat ehdot. Tavoitteena on jakaa taso alueisiin, joissa kussakin on vain yhtä väriä. Koska halutaan, että kaksi pistettä, joiden etäisyys on yksi, eivät saa olla samanväriset, niin yhden samanvärisen alueen on aidosti mahduttava $\frac{1}{2}$-säteisen ympyrän sisään. Toisaalta samanväriset alueet eivät saa olla liian lähellä toisiaan, joten alueiden on oltava riittävän suuria.

Isbellin konstruktion mukaan haluttu väritys voidaan toteuttaa täyttämällä taso säännöllisen kuusikulmion muotoisilla alueilla. Edellisessä kappaleessa tehtyjen havaintojen mukaan kuusikulmioiden halkaisijan on oltava pienempi kuin 1, mutta toisaalta riittävän suuri. Sanokaamme vaikkapa, että yhden kuusikulmion halkaisija on 0,90. Merkitään $r = 0{,}45$ eli r on kuusikulmion säde. Annetaan käytettävälle seitsemälle värille nimet $0, 1, \ldots, 6$. Asetetaan kuusikulmiot limittäin ja väritetään ne kuvan 3 mukaisesti. Tarkastellaan väritystä vielä yksityiskohtaisemmin.



Kuva 3: Tason väritys.

Halutaan, että kuusikulmioiden väritykset noudattavat kuvassa 3 esitettyä säännönmukaisuutta. Valitaan siis, että origokeskeisen kuusikulmion väri on 0, sen oikealla puolella olevan väri on 1 ja niin edelleen. Havaitaan, että kun kuusikulmiot asetetaan limittäin, niin aina joka toisella rivillä kuusikulmioiden keskipisteillä on samat x-koordinaatit. Asetetaan ensin niihin riveihin säännölliset kuusikulmiot, joissa kuusikulmioiden keskipisteiden x-koordinaatit ovat samat kuin sillä rivillä, jossa on origokeskeinen kuusikulmio. Kun siirrytään riviltä ylöspäin sellaiselle riville, jolla on seuraavaksi saman x-koordinaatin omaava keskipiste, niin keskipisteen y-koordinaatti kasvaa luvun $3r$ verran. Kahta riviä ylempänä kuusikulmion värin numeron modulo 7 on kasvettava kahdella. Toisaalta, aina oikealle siirryttäessä kuusikulmion värin numeron on kasvettava yhdellä modulo 7 ja Pythagoraan lauseen nojalla x-koordinaatti kasvaa luvun $\sqrt{3}r$ verran. Luonnollisesti y-koordinaatti pysyy oikealle siirryttäessä samana. Asetetaan siis tasoon $(\sqrt{3}rx, \frac{3}{2}ry)$-keskeiset kuusikulmiot, missä x on kokonaisluku ja y parillinen kokonaisluku sekä väritetään ne värillä $x + y \pmod 7$. Tällä tavoin saadaan väritettyä joka toinen kuusikulmiorivi origosta ylös- ja alaspäin katsoen. Vielä täytyy tarkastella limittäisiä rivejä.

Toimitaan limittäisten rivien kohdalla vastaavasti kuin edellisessä kappaleessa. Limittäisillä riveillä kuusikulmion keskipisteen x-koordinaatti on Pythagoraan lauseen nojalla luvun $\frac{\sqrt{3}}{2}r$ verran enemmän kuin sen vasemmassa alakulmassa olevan kuusikulmion x-koordinaatti. Toisaalta taas kuusikulmion keskipisteen y-koordinaatti on tässä tilanteessa luvun $\frac{3}{2}r$ verran enemmän. Asetetaan siis tasoon $\big(\sqrt{3}r(x + \frac{1}{2}), \frac{3}{2}r(y + 1)\big)$-keskeiset kuusikulmiot, missä x on kokonaisluku ja y parillinen kokonaisluku, sekä väritetään kukin niistä värillä $x + y + 5 \pmod 7$. Nyt on saatu myös limittäiset rivit käsiteltyä. Täten saadaan kuvan 3 kaltainen kuvio. On vielä osoitettava, että tämä väritys todella toteuttaa halutut ehdot.

Väritys toteuttaa halutut ehdot

Osoitetaan nyt, että edellisessä alaluvussa määritelty tason väritys toteuttaa Hadwigerin-Nelsonin ongelman vaatimat ehdot. Ajatuksena on, että ensin osoitetaan värityksen toteuttavan hyödyllisen säännönmukaisuuden ja sitten tämän säännönmukaisuuden avulla todistetaan itse päätulos. Käsitteiden lyhentämiseksi määritellään, että kuusikulmion *vierekkäiset* kuusikulmiot ovat ne kuusikulmiot, joilla on tarkasteltavan kuusikulmion kanssa yksi yhteinen sivu. Seuraavassa lauseessa todistetaan vierekkäisiin kuusikulmioihin liittyvä ominaisuus.

Lause 1. Kuusikulmion ja sen vierekkäisten kuuden kuusikulmion värit käyvät läpi kaikki värit $0, 1, \ldots, 6$.

Todistus. Oletetaan, että tarkasteltavan kuusikulmion keskipiste on pisteessä $(\sqrt{3}rx, \frac{3}{2}ry)$, missä x on kokonaisluku ja y parillinen kokonaisluku. Väite voidaan todistaa vastaavalla tavalla myös tapauksessa, jossa kuusikulmion keskipiste on pisteessä

$$\left(\sqrt{3}r(x + \frac{1}{2}), \frac{3}{2}r(y + 1)\right).$$

Nyt siis tarkasteltava kuusikulmio on väritetty värillä $x + y \pmod 7$. Sen vierekkäiset kuusikulmiot on siis väritetty modulo 7 väreillä

$$(x + 1) + y, \quad (x - 1) + y,$$

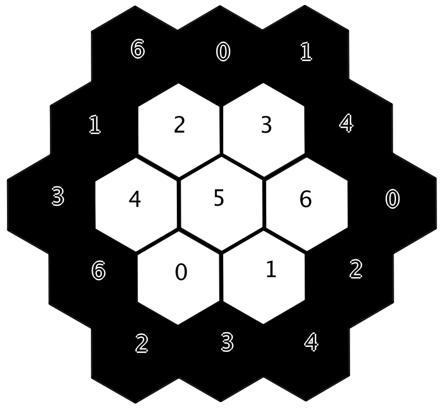
$$x + y + 5, \quad (x - 1) + y + 5,$$

$$x + (y - 2) + 5 \quad \text{ja} \quad (x - 1) + (y - 2) + 5.$$

Täten ne käyvät läpi kaikki muut jäännösluokat modulo 7 paitsi $x + y \pmod 7$. Siis väite on todistettu. $\square$

Edellisestä lauseesta seuraa, ettei mikään kuusikulmion vierekkäisistä kuusikulmioista voi olla alkuperäisen kuusikulmion kanssa samanvärinen. Lisäksi ainoa näiden vierekkäisten kuusikulmioiden vierekkäisistä kuusikulmioista, joka on samanvärinen kuin alkuperäinen kuusikulmio, on tämä kuusikulmio itse. Nimittäin edellisen nojalla kaikki vierekkäiset kuusikulmiot ovat erivärisiä kuin kuusikulmio itse ja toisaalta näiden kuusikulmioiden vieressä on täsmälleen yksi kuusikulmio, joka on väritetty samalla värillä kuin tarkasteltava kuusikulmio. Siis tämä ainoa kyseisellä värillä väritetty kuusikulmio on tarkasteltava kuusikulmio. Tätä on havainnollistettu kuvassa 4, missä keskimmäisen kuusikulmion väri on 5.

Kutsutaan käsitteistön lyhentämiseksi edellisessä kappaleessa mainittuja vierekkäisten kuusikulmioiden vierekkäisten kuusikulmioita, jotka eivät ole alunperin tarkasteltava kuusikulmio, alkuperäisen kuusikulmion *uloimmiksi* kuusikulmioiksi. Ne on merkitty kuvassa 4 mustalla. Todistetaan nyt edellisten havaintojen avulla päätulos.



Kuva 4: Keskellä olevan, värillä 5 *väritetyn kuusikulmion, vierekkäisistä tai uloimmista kuusikulmioista mikään ei ole väritetty värillä* 5.

Lause 2. Edellisessä alaluvussa määritellyssä tason värityksessä mitkään kaksi pistettä, jotka ovat etäisyydellä 1 toisistaan, eivät ole samanväriset.

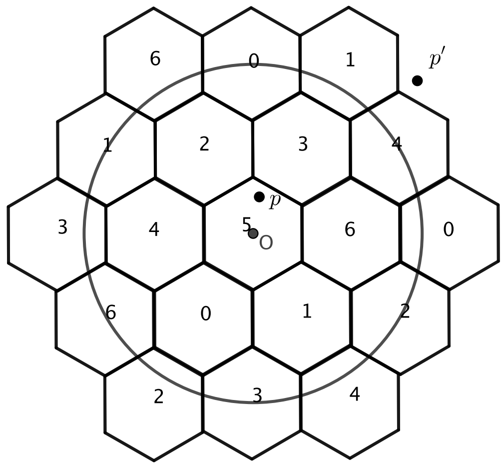
Todistus. Ensimmäinen havainto on, että jos kaksi pistettä, joiden etäisyys on 1, ovat samanväriset, ne eivät voi olla saman kuusikulmion sisällä. Nimittäin kuusikulmion halkaisija on alle 1. Voidaan siis olettaa, että jos etäisyydeltä 1 löytyy kaksi samanväristä pistettä, niin ne ovat eri kuusikulmioiden sisällä.

Todistuksen loppuosan ajatuksena on, että jos löydetään kaksi samanväristä pistettä, jotka ovat etäisyydellä 1 toisistaan, niin sopivan ympyrän säteelle saadaan kaksi eri arvoa. Ympyrän säteellä ei luonnollisestikaan voi olla kahta eri arvoa, joten seurauksena on ristiriita sen kanssa, etteivät kaksi samanväristä pistettä voi olla etäisyydellä 1 toisistaan.

Tarkastellaan jotain tason pistettä p ja oletetaan, että se on väritetty värillä c. Se on jonkin kuusikulmion sisällä ja olkoon tämän kuusikulmion keskipiste O. Nyt lauseen 1 ja sen jälkeisen huomion perusteella mikään tämän kuusikulmion vierekkäisistä tai uloimmista kuusikulmioista ei voi olla väritetty värillä c. Tämä tarkoittaa, että jos pisteestä p etäisyydellä 1 on olemassa piste p', joka on väritetty värillä c, niin se ei voi olla edellä mainittujen kuusikulmioiden sisällä. Piirretään nyt ympyrä, jonka keskipiste on p ja säde 1. Ympyrä kulkee pisteen p' kautta. Koska pisteen p etäisyys pisteestä O on enintään r, niin $1+r$-säteisen ja O-keskeisen ympyrän on kuljettava pisteen p' kautta tai pisteen p' on oltava tämän ympyrän sisällä. Lisäksi tämän havainnon nojalla tarkasteltavan ympyrän on kuljettava tai peitettävä O-keskeisen kuusikulmion kuuden lähimmän uloimman kuusikulmion keskipisteet. Tätä on havainnollistettu kuvassa 5, missä $c = 5$. Siis tarkasteltavan ympyrän säteen on Pythagoraan lauseen ja sijoituksen $r = 0{,}45$ nojalla oltava ainakin

$$\sqrt{(3r)^2 + \left(\frac{3}{2}r\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}r > 1{,}45 = 1 + r.$$

Mutta tämä on mahdotonta, sillä ympyrän säteen tulisi olla samanaikaisesti $1+r$ ja yli $1+r$! Siis etäisyydellä 1 pisteestä p ei voi olla samanväristä pistettä. $\square$

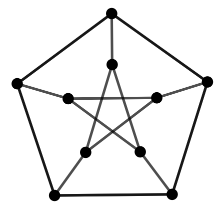


Kuva 5: O-keskeisen ja $1 + r$-säteisen ympyrän on peitettävä tai kuljettava osan uloimpien kuusikulmioiden keskipisteen kautta.

Nyt siis on osoitettu, että taso pystytään värittämään seitsemällä värillä niin, etteivät mitkään kaksi samanväristä pistettä ole etäisyydellä 1 toisistaan. Siispä Hadwigerin-Nelsonin ongelman oikea vastaus on enintään seitsemän.

Harjoitustehtäviä

1. Mikä on kuvan Petersenin graafin väriluku?



2. Todista lauseen 1 väite tapauksessa, jossa kuusikulmion keskipiste on pisteessä $(\sqrt{3}r(x + \frac{1}{2}), \frac{3}{2}r(y + 1))$, missä x on kokonaisluku ja y parillinen kokonaisluku.

3. Tässä artikkelissa todistettiin kuusikulmioiden avulla, että Hadwigerin-Nelsonin ongelman vaatimukset toteuttavaan tason väritykseen tarvitaan enintään seitsemän väriä. Mikäli kuusikulmioiden sijasta käytettäisiinkin neliöitä, mikä yläraja värien määrälle saadaan? Onko mahdollista saada neliöitä käyttämällä tarvittavalle värien määrälle ylärajaksi seitsemän?

Viitteet

[1] de Grey, A. D. N. J.: *The chromatic number of the plane is at least 5.* ArXiv e-prints, huhtikuu 2018.

[2] Hadwiger, H.: *Ungelöste Probleme No. 40.* Elem. Math., 16:103–104, 1961.

[3] Moser, L. and Moser, W.: *Solution to Problem 10.* Can. Math. Bull., 4:187–189, 1961.

[4] Soifer, A.: *Chromatic number of the plane & its relatives. Part I: The problem & its history.* Geombinatorics, 12:131–148, 2003.