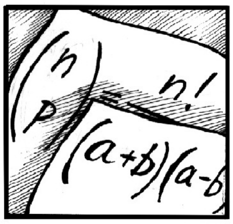

Eksponenttifunktio

Pekka Alestalo
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

Johdanto

Eksponenttifunktio e^x on eräs tärkeimmistä matematiikassa ja varsinkin sen sovelluksissa esiintyvistä funktioista. Ainoa syy tähän on sen toteuttama differentiaaliyhtälö $D\,e^x = e^x$, jota ilman (hieman liioitellen) kukaan ei olisi koskaan kuullutkaan Neperin luvusta e. Lukiokirjoissa eksponenttifunktiota käsitellään välillä hyvinkin huolettomasti, ja suppeimmasta päästä taitaa olla seuraava ”määritelmä”: Eksponenttifunktion e^x arvo voidaan laskea laskimella jokaisella muuttujan x arvolla.

Syksyn 2017 pitkän matematiikan ylioppilaskokeen tehtävässä 8 tutkittiin polynomeja

$$P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

ja niiden yhteyttä eksponenttifunktioon e^x. Tehtävän b-kohdassa täytyi osoittaa, että $P_n'(x) = P_{n-1}(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja kaikilla indekseillä $n = 2, 3, \ldots$, joka muistuttaa eksponenttifunktion derivoimiskaavaa $D\,e^x = e^x$. Laskun tärkein välivaihe on kaavan

$$\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$$

keksiminen, mutta muuten siinä tarvitaan vain polynomien derivoimissääntöjä. Tämän kirjoituksen tarkoituksena on selittää, kuinka polynomeista $P_n(x)$ päästään eksponenttifunktion täsmälliseen määritelmään, ja todistaa tarkasti kaikki sen ominaisuudet. Esitietona kannattaa tutustua kirjoitukseeni [1] Neperin luvusta, ja lisäksi tarvitaan joitakin perustietoja sarjojen käsittelystä; osa niistä kerrataan lyhyesti. Loppuosan ominaisuuksien perustelu noudattaa perinteistä tyyliä ja löytyy esimerkiksi viitteistä [7, luku VI], [4, Chapter 25] ja [5, Chapter 21]. Kaikissa näissä oletetaan kuitenkin aikaisemmin todistetut potenssisarjojen derivoimissäännöt, jotka tämän kirjoitelman yksinkertaisemmassa tilanteessa voidaan kiertää.[1]

Määritelmä

Huolimattomasti päätellen yhtälöstä $P_n'(x) = P_{n-1}(x)$ voidaan ottaa raja-arvo, kun $n \to \infty$, jolloin päädytään funktioon $P(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x)$, ja se toteuttaa vaaditun differentiaaliyhtälön $P'(x) = P(x)$. Raja-arvon olemassaolon lisäksi tähän liittyy kuitenkin vakavampi ongelma. Tarkasti ottaen raja-arvoa $n \to \infty$ sovelletaan yhtälöön

$$DP_n(x) = P_{n-1}(x).$$

Oikealla puolella

$$\lim_{n\to\infty} P_{n-1}(x) = P(x)$$

[1] Jos tästä kirjoituksesta jätetään kaikki ylimääräinen pois, niin varsinaiset todistukset tiivistyvät alle kahteen sivuun.

ilman suurempia ongelmia, mutta vasemmalla puolella tarvittaisiin ominaisuutta

$$\lim_{n\to\infty} DP_n(x) = D\lim_{n\to\infty} P_n(x) = DP(x).$$

Toisaalta derivaatta D on (erotusosamäärän) raja-arvo, ja yleensä kahden raja-arvon järjestyksen vaihtaminen tuottaa hankaluuksia.

Esimerkki 1. Lausekkeelle $\frac{k}{n+k}$ on voimassa

$$\lim_{k\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{k}{n+k}\right) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0$$

ja

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\frac{k}{n+k}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Kun näinkin yksinkertainen esimerkki osoittaa raja-arvojen vaihtamiseen liittyvän ongelman, niin on oikeastaan hyvin yllättävää, että derivaatan kohdalla operaatio on (yleensä) sallittu! Mutta tämä vaatii huolellista analysointia, johon seuraavaksi ryhdymme.

Määritelmä 2. Eksponenttifunktio $\exp\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ määritellään kaavalla

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3\ldots,$$

kun $x\in\mathbf{R}$.

Siirtyminen polynomista sarjaan ei ole kuitenkaan aivan ongelmatonta: Onko selvää, että sarja suppenee kaikilla muuttujan arvoilla $x\in\mathbf{R}$? Määritelmän perusteella ainoa helppo tapaus on $\exp(0)=1$.

Vastauksen antaa tässä tapauksessa sarjoihin liittyvä suhdetesti.

Lause 3. (Suhdetesti) Jos sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ termeille on voimassa

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1,$$

niin sarja suppenee.

Suhdetestin intuitiivinen perustelu on seuraava: Geometriselle sarjalle kahden peräkkäisen termin suhde $\frac{a_{k+1}}{a_k} = q$ on sarjan suhdeluku, josta sen suppeneminen määräytyy. Suhdetestin mukaan yleinen sarja suppenee, jos sen termit käyttäytyvät asymptoottisesti samalla tavalla kuin suppenevassa geometrisessa sarjassa.

Tarkemmin: Sarjan alkupää ei vaikuta sen suppenemiseen, joten voidaan olettaa, että $|a_{k+1}/a_k| \le q < 1$ jollekin vakiolle q ja kaikille k. Tästä seuraa

$$|a_k| \le |a_{k-1}|q \le |a_{k-2}|q^2 \le \cdots \le |a_0|q^k,$$

joten sarjalle saadaan suppeneva geometrinen majorantti. Näin ollen sarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ suppenee *Majoranttiperiaatteen*[2] nojalla.

Funktion exp tapauksessa $a_k = x^k/k!$, jolloin

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{x^{k+1}/(k+1!)}{x^k/k!}\right| = \frac{|x|}{k+1} \to 0,$$

kun $k\to\infty$, joten sarja suppenee kaikilla $x\in\mathbf{R}$.

Ensimmäinen yritys

Puutteellisia yrityksiä karttava lukija voi sivuuttaa tämän kappaleen kokonaan, katsoa apulauseen 4 ja siirtyä suoraan lauseeseen 6. Toisaalta tämä kappale saattaa antaa motivointia myöhemmille laskuille.

Nyt kun sarjan suppeneminen on selvitetty, voidaan ryhtyä tutkimaan exp-funktion derivaattaa erotusosamäärän

$$\operatorname{eom}(x,h) = \frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h}$$

avulla. Yhdistämällä sarjat saadaan

$$\begin{aligned}\operatorname{eom}(x,h) &= \frac{1}{h}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\big((x+h)^k - x^k\big)\\ &= \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\big((x+h)^k - x^k\big),\end{aligned}$$

koska indeksin arvolla $k=0$ on $(x+h)^k - x^k = 0$. Sarjan sisällä olevaa erotusta voidaan käsitellä väliarvolauseen (viite [2])

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

avulla valitsemalla $f(x) = x^k$, $b = x+h$ ja $a = x$. Näin saadaan kaikilla $k\ge 1$

$$(x+h)^k - x^k = kc_k^{k-1}h,$$

jossa c_k on lukujen x ja $x+h$ välissä; tarkasti ottaen $c_k = c_k(x,h)$ riippuu myös muuttujista x ja h. Tämän perusteella

$$\begin{aligned}\operatorname{eom}(x,h) &= \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot kc_k^{k-1}h\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}c_k^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}c_{k+1}^{k};\end{aligned}$$

viimeisessä vaiheessa on siirretty summausindeksiä $k-1\mapsto k$, joka muuttaa myös alkukohdan $k=1\mapsto k=0$.

Jos $x>0$ ja $h>0$, niin $x\le c_{k+1}\le x+h$ kaikilla k, joten erotusosamäärälle saadaan arviot

$$\exp(x) \le \operatorname{eom}(x,h) \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(x+h)^k = \exp(x+h),$$

[2] Jos $|a_k|\le p_k$ kaikilla k ja sarja $\sum_k p_k$ suppenee, niin sarja $\sum_k a_k$ suppenee.

sillä kaikki termit ovat positiivisia. Vastaavasti tapauksessa $x > 0$ ja $h < 0$ voidaan ensinnäkin olettaa, että $x + h > 0$, koska tutkimme raja-arvoa $h \to 0$. Tällöin $x + h \le c_{k+1} \le x$, ja saadaan

$$\exp(x + h) \le \operatorname{eom}(x, h) \le \exp(x).$$

Jos osoitetaan, että exp-funktio on jatkuva, niin näistä kahdesta epäyhtälöstä seuraa (hienosti sanottuna *suppiloperiaatteen*[3] nojalla), että

$$\lim_{h\to 0} \operatorname{eom}(x, h) = \exp(x),$$

joka tarkoittaa samaa kuin $D\exp(x) = \exp(x)$.

Jatkuvuuden todistaminen ei ole erityisen vaikeaa, mutta sitä suurempi ongelma on alun oletus $x > 0$. Tapauksessa $x < 0$ yllä olevan laskun epäyhtälöt menevät sekaisin, eikä päättely enää suju. Koska tämä menetelmä ei näytä johtavan exp-funktion täydelliseen käsittelyyn, niin sivuutamme jatkuvuustodistuksen ja kokeilemme väliarvolauseen sijasta hieman tarkempaa approksimaatiota.

Aputulos

Funktion exp derivaatta täytyy laskea määritelmän eli erotusosamäärän avulla. Sitä helpottaa seuraava aputulos.

Apulause 4. Jos $x, h \in \mathbf{R}$ ja $k \in \mathbf{N}$, niin on olemassa sellainen $c_k \in [x, x + h]$, että

$$(x + h)^k = x^k + kx^{k-1}h + \frac{1}{2}k(k-1)c_k^{k-2}h^2. \qquad (1)$$

Yllä oleva kaava saattaa näyttää omituiselta, mutta sen taustalla on yksinkertainen idea perustilanteessa $x, h > 0$. Oikean puolen kaksi ensimmäistä termiä ovat samat kuin binomikaavassa

$$(x + h)^k = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} x^{k-m}h^m,$$

sillä $\binom{k}{0} = 1$ ja $\binom{k}{1} = k$. Koska $\binom{k}{2} = \frac{1}{2}k(k-1)$, niin kolmas termi muistuttaa binomikaavan kolmatta termiä $\binom{k}{2}x^{k-2}h^2$. Ja nyt vain yksi pointti: Korvaamalla tässä (jatkuvassa ja aidosti kasvavassa lausekkeessa) x sitä hieman suuremmalla luvulla c_k saadaan kaavaan (1) yhtäsuuruus *ilman binomikaavan loppuosan termejä!*

Apulauseen perustelu tapauksessa $x, h > 0$; muut tapaukset voidaan käsitellä samaan tyyliin, mutta tilanne muuttuu hankalammaksi. Sen vuoksi alla esitetään myös toinen todistus, jossa eri tapauksia ei tarvitse lainkaan erotella.

Edellä jo todettiin, miksi tällainen luku c_k on olemassa. Lisäksi $c_k \ge x$, sillä valinnalla $c_k = x$ oikea puoli sisältää vain binomikaavan kolme ensimmäistä termiä ja jää sen vuoksi liian pieneksi (paitsi tapauksessa $k = 2$). Osoitetaan vielä, että arvolla $c_k = x + h$ oikean puolen lausekkeesta tulee liian suuri, joten $c_k \le x + h$, ja väite seuraa. Sijoittamalla lausekkeeseen $\binom{k}{2}x^{k-2}h^2$ luvun x paikalle $x+h$ nähdään binomikaavan avulla, että termin $x^{k-m}h^m$ kertoimeksi tulee

$$\frac{1}{2}k(k-1)\binom{k-2}{m-2}.$$

Tämä on suurempi kuin vastaava kerroin kaavan (1) vasemmalla puolella, joka on binomikaavan mukaan $\binom{k}{m}$. Kaavan yhtäsuuruus pätee siis jollakin arvolla $x \le c_k \le x + h$.

Tehtävä 5. Perustele epäyhtälö

$$\frac{1}{2}k(k-1)\binom{k-2}{m-2} \ge \binom{k}{m}.$$

Apulauseen todistus: Apulause seuraa alla olevasta lauseesta 6 soveltamalla sitä funktioon $f(x) = x^k$. $\square$

Lause 6. Olkoon $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ kaksi kertaa derivoituva funktio; ts. $f''(x)$ on olemassa kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Jos $x, h \in \mathbf{R}$, niin on olemassa sellainen $c \in [x, x + h]$, että

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(c)h^2. \qquad (2)$$

Todistus[4]. Tarkastellaan apufunktiota

$$r(t) = f(t) - f(x) - f'(x)(t - x) - b(t - x)^2,$$

joka arvolla $t = x+h$ muistuttaa kaavan (2) vasemman ja oikean puolen erotusta; vakio b täytyy valita sopivalla tavalla myöhemmin, koska emme vielä tiedä luvun c merkitystä. Tällöin

$$\begin{aligned} r'(t) &= f'(t) - f'(x) - 2b(t - x) \text{ ja} \\ r''(t) &= f''(t) - 2b. \end{aligned}$$

Tavoitteena on löytää sellainen piste c, että $r''(c) = 0$. Derivaatan nollakohtia löytyy varsinaisen funktion nollakohtien välistä, joten valitaan vakio b niin, että $r(x+h) = 0$; tämä on mahdollista funktion $r(t)$ määritelmän perusteella. Tällöin $r(x) = r(x + h) = 0$, joten näiden lukujen välissä on derivaatan nollakohta c_1, jolle siis $r'(c_1) = 0$. Toisaalta myös $r'(x) = 0$, joten lukujen x ja c_1 välissä on toisen derivaatan nollakohta c_2: $r''(c_2) = 0$. Yhtälöstä $0 = r''(c_2) = f''(c) - 2b$ saadaan vakion b arvoksi

$$b = \frac{1}{2}f''(c).$$

Lauseen 6 kaava seuraa nyt yhtälöstä $r(x + h) = 0$ sijoittamalla siihen vakiolle b saatu lauseke ja valitsemalla $c = c_2$. $\square$

[3] Jos $u(h) \le v(h) \le w(h)$ jollakin välillä $h \in [h_0 - \delta, h_0 + \delta] \setminus \{h_0\}$ ja $\lim_{h\to h_0} u(h) = \lim_{h\to h_0} w(h) = L$, niin $\lim_{h\to h_0} v(h) = L$.

[4] Osa lukijoista tunnistaa tässä Taylorin kaavan helpoimman version todistuksen. Todistus on hieman lyhyempi osittaisintegroinnin tai ns. Cauchyn väliarvolauseen avulla, mutta tässä esitetty perustelu saattaa olla helpompi keksiä.

Ominaisuudet

Lause 7. Eksponenttifunktiolle on voimassa

$$D\exp(x) = \exp(x)$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Todistus. Olkoon $x \in \mathbf{R}$ ja $h \neq 0$. Tällöin Apulauseen perusteella[5]

$$\begin{aligned}\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} &= \frac{1}{h}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\big((x+h)^k - x^k\big)\\ &= \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\big(kx^{k-1}h\\ &\qquad + \frac{1}{2}k(k-1)c_k^{k-2}h^2\big),\end{aligned}$$

koska indeksin arvolla $k = 0$ on $(x+h)^k - x^k = 0$. Sarja jakaantuu siis kahteen osaan, joista ensimmäinen sievenee muotoon

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k!}x^{k-1}h &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k\\ &= \exp(x);\end{aligned}$$

välivaiheessa on siirretty summausindeksiä $k-1 \mapsto k$, joka muuttaa myös alkukohdan $k = 1 \mapsto k = 0$. Jälkimmäisen sarjan summaus voidaan kertoimen $k-1$ vuoksi aloittaa kohdasta $k = 2$, joten se on muotoa

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2h}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k(k-1)}{k!}c_k^{k-2}h^2 = \frac{h}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-2)!}c_k^{k-2}\\ &= \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}c_{k+2}^{k}\end{aligned}$$

kahden askeleen indeksinsiirrolla. Tässä $c_{k+2} = c_{k+2}(x,h)$ on lukujen x ja $x+h$ välissä, ja koska tutkimme raja-arvoa $h \to 0$, niin voidaan olettaa, että $|h| \le |x|+1$; lisäys $+1$ tarvitaan erikoistapauksen $x = 0$ vuoksi. Tällöin $|c_{k+2}| \le |x| + |h| \le 1 + 2|x|$, joten jälkimmäiselle sarjalle saadaan arvio

$$\begin{aligned}|E| &\le \frac{|h|}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}|c_{k+2}|^k \le \frac{|h|}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(1+2|x|)^k\\ &= \frac{|h|}{2}\exp(1+2|x|).\end{aligned}$$

Kiinteällä $x \in \mathbf{R}$ tämän ylärajan raja-arvo on nolla, kun $h \to 0$, joten exp-funktion erotusosamäärän raja-arvo kohdassa x on $\exp(x)$. □

Olemme nyt valmiit kokoamaan yhteen exp-funktion tärkeimmät ominaisuudet ja todistamaan ne. Viimeisessä kohdassa selviää myös exp-funktion yhteys lausekkeeseen e^x: ne ovat aivan samat!

Lause 8. Eksponenttifunktiolla on seuraavat ominaisuudet:

(i) $D\exp(x) = \exp(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

(ii) $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

(iii) $\lim_{x\to\infty}\exp(x) = \infty$ ja $\lim_{x\to-\infty}\exp(x) = 0$.

(iv) $\exp\colon \mathbf{R} \to]0,\infty[$ on jatkuva ja aidosti kasvava bijektio.

(v) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ kaikilla $x, y \in \mathbf{R}$.

(vi) $\exp(x) = e^x$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, kun $e = \exp(1) \approx 2{,}71828\ldots$ on Neperin luku.

Todistus. (i) Tämä todistettiin jo aikaisemmin, mutta mainitaan tärkeimpänä ominaisuutena vielä uudelleen.

(ii) Olkoon $f(x) = \exp(x)\exp(-x)$, kun $x \in \mathbf{R}$. Tällöin

$$\begin{aligned}f'(x) &= \exp'(x)\exp(-x) + \exp(x)D\exp(-x)\\ &= \exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) = 0,\end{aligned}$$

joten f on vakiofunktio. Koska

$$f(0) = \exp(0)\exp(-0) = 1\cdot 1 = 1,$$

niin $f(x) = 1$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, josta ominaisuus (ii) seuraa.

(iii) Määritelmän perusteella

$$\exp(x) = 1 + x + \cdots > 1 + x,$$

kun $x > 0$. Koska $\lim_{x\to\infty}(1+x) = \infty$, niin sama pätee sitä suuremmalle lausekkeelle $\exp(x)$. Raja-arvo tapauksessa $x \to -\infty$ seuraa tästä käyttämällä kohdan (ii) kaavaa.

(iv) Funktion derivoituvuudesta seuraa sen jatkuvuus. Määritelmän perusteella $\exp(x) \ge \exp(0) = 1$, kun $x \ge 0$, jolloin kohdan (ii) kaavasta seuraa $\exp(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Koska $D\exp(x) = \exp(x) > 0$, niin exp-funktio on aidosti kasvava. Arvojoukkoa ja bijektiivisyyttä koskeva väite seuraa tämän jälkeen jatkuvuudesta ja kohdasta (iii).

(v) Olkoon $y \in \mathbf{R}$ jokin kiinnitetty luku. Tarkastellaan apufunktiota

$$g(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)\exp(y)},$$

kun $x \in \mathbf{R}$. Kohdan (iv) perusteella lausekkeen nimittäjä ei ole nolla, joten g on hyvin määritelty. Osamäärän derivaattakaavan mukaan (lyhennetään tässä $e(x) = \exp(x)$ jne.)

$$g'(x) = \frac{e(x+y)e(x)e(y) - e(x+y)e(x)e(y)}{(e(x)e(y))^2} = 0,$$

[5] Apulauseen merkitys näkyy nyt hyvin, koska sarjan sisään jää vain kaksi termiä, eikä koko binomikaavaa.

joten g on vakiofunktio ja sen arvo on

$$g(0) = \frac{\exp(0+y)}{\exp(0)\exp(y)} = 1.$$

Koska $y \in \mathbf{R}$ voi olla mikä tahansa, niin kaava (v) seuraa tästä.

(vi) Tarkastellaan aluksi positiivista rationaalilukua $x = p/q$, kun $p, q \in \mathbf{N}$. Kaavan (v) perusteella

$$e = \exp(1) = \exp(\underbrace{1/q + \cdots + 1/q}_{q \text{ kpl}}) = \exp(1/q)^q,$$

joten $\exp(1/q) = e^{1/q}$. Tämän avulla saadaan

$$\exp(p/q) = \exp(\underbrace{1/q + \cdots + 1/q}_{p \text{ kpl}}) = \exp(1/q)^p$$
$$= (e^{1/q})^p = e^{p/q}.$$

Vastaava tulos negatiivisille rationaaliluvuille p/q seuraa tämän jälkeen kaavasta (ii). Koska yhtälö $\exp(x) = e^x$ pätee kaikille rationaaliluvuille $x \in \mathbf{Q}$, niin exp-funktion jatkuvuuden nojalla se pätee[6] myös kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Kaikki kohdat on nyt todistettu. □

Pohdiskelua

Seuraavassa vielä kommentteja muista vaihtoehdoista exp-funktion määritelmäksi:

- Määritelmä rationaalisten eksponenttien e^r raja-arvona, kun $r \to x$: Periaatteessa luonnollista, mutta miksi tutkitaan jonkin kummallisen luvun e potensseja? Tämä lähestymistapa on selvitetty perusteellisesti viitteessä [3, kappaleet 6.1–2] tai [6, luku VI].
- Määritelmä raja-arvona
$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$
Tässäkin on ideaa, mutta kallista aikaa kuluu kummallisten raja-arvojen pyörittelyyn. Sarjakehitelmän käyttö sen sijaan johdattelee suoraan yleisempiin potenssisarjoihin ja niiden ominaisuuksiin.
- Määritellään ensin logaritmi funktion $f(t) = 1/t$ rajaamana pinta-alana välillä $1 \le t \le x$ ja eksponenttifunktio tämän käänteisfunktiona: Moninkertaista jälkiviisautta ja vaatii tarkasti ottaen integraalilaskentaa tai ainakin pinta-alan täsmällisen määritelmän.

Loppukaneetti

Tässä on vielä lopuksi hyvä tilaisuus korjata aikaisempaan Neperin lukua koskevaan kirjoitukseeni [1] jäänyt painovirhe: sivun 22 vasemman palstan kaavariviltä (4) puuttuu osa kertoimista. Kaavassa lukee

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right),$$

mutta oikea lauseke on muotoa

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Viitteet

[1] Pekka Alestalo: Neperin luvun kahdet kasvot. Solmu 2/2015, 21–23.

[2] Anne-Maria Ernvall-Hytönen: Väliarvolause: Mikä ihme ja miksi ihmeessä? Solmu 1/2018, 18–20.

[3] P. Harjulehto, R. Klén, M. Koskenoja: Analyysiä reaaliluvuilla. Unigrafia, Helsinki 2014.

[4] Frank Morgan: Real Analysis. American Mathematical Society, 2005.

[5] Frank Morgan: Real Analysis and Applications. American Mathematical Society, 2005.

[6] Lauri Myrberg: Differentiaali- ja integraalilaskenta, osa 1 korkeakouluja varten. Kirjayhtymä, Helsinki 1981.

[7] Juhani Pitkäranta: Calculus Fennicus. Avoimet oppimateriaalit, 2015. `https://github.com/avoimet-oppimateriaalit-ry/calculus-fennicus/releases`

[6] Tässä oletetaan, että arvoilla $a > 0$ lauseke a^x on määritelty ja jatkuva muuttujan $x \in \mathbf{R}$ suhteen; vrt. esimerkiksi viite [3, kapple 6.1]. Toinen vaihtoehto on määritellä yleisesti $a^b = \exp(b \ln a)$, jolloin päädytään samaan tulokseen.