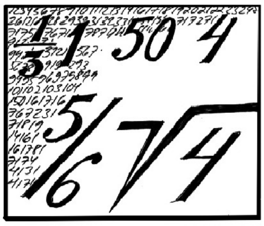

Luonnollisten lukujen induktio-ominaisuudesta

Tuomas Korppi

Johdanto

Kuten lukija varmaan tietääkin, luonnollisille luvuille voidaan tehdä induktiotodistuksia. Tämä mahdollisuus on ominainen luonnollisille luvuille. Esimerkiksi rationaali- tai reaaliluvuille ei voida tehdä induktiotodistuksia[1]. Luonnollisten lukujen järjestelmän aksiomatisoinnissa yleensä mahdollisuus tehdä induktiotodistuksia otetaankin aksioomaksi.

Induktioaksiooman avulla voidaan todistaa seuraavat luonnollisten lukujen joukon ominaisuudet

Teoreema 1. *Jos $A \subset \mathbb{N}$, niin joukossa A on pienin alkio tai A on tyhjä joukko.*

Teoreema 2. *Ei ole olemassa laskevaa, ääretöntä jonoa $n_0 > n_1 > n_2 > \ldots$ luonnollisia lukuja.*

Tässä kirjoitelmassa ensin aksiomatisoimme luonnollisten lukujen järjestelmän ja sen jälkeen pohdimme, voitaisiinko aksiomatisoinnissa induktioaksiooma korvata jommallakummalla yllä mainituista ominaisuuksista.

Lineaarijärjestys

Mietitään luonnollisten lukujen tai reaalilukujen järjestysrelaatiota $<$. Jos $x < y$ ja $y < z$, niin tällöin myös $x < z$. Lisäksi kaikille luvuille x, y pätee täsmälleen yksi seuraavista kolmesta väitteestä: $x < y$, $y < x$ tai $x = y$.

Seuraavaksi määrittelemme yleisen järjestyksen käsitteen yllä mainittujen kahden huomion pohjalta. Määritelmämme siis kertoo, millainen mielivaltaisessa joukossa X määritellyn relaation olisi oltava, että olisimme valmiit pitämään sitä järjestysrelaationa.

Olkoon X joukko. Sanomme, että $<$ on lineaarijärjestys, jos se on 2-paikkainen relaatio joukossa X, joka täyttää seuraavat ehdot:

- Jos $x, y, z \in X$, joille $x < y$ ja $y < z$, niin tällöin myös $x < z$.
- Jos $x, y \in X$, täsmälleen yksi seuraavista kolmesta ehdosta pätee: $x < y$, $y < x$, $x = y$.

Esimerkiksi reaalilukujen järjestys, rationaalilukujen järjestys, kokonaislukujen järjestys ja luonnollisten lukujen järjestys ovat lineaarijärjestyksiä.

Lineaarijärjestyksiä voidaan kuitenkin määritellä lähes miten tahansa, kunhan yllä mainitut ehdot toteutuvat. Esimerkiksi joukkoon $\{\text{Ville}, 42, \text{Punaisuus}\}$ voidaan määritellä lineaarijärjestys vaikkapa niin, että $\text{Ville} < 42$, $42 < \text{Punaisuus}$ ja $\text{Ville} < \text{Punaisuus}$.

[1] Rationaaliluvun nimittäjä ja osoittaja ovat kokonaislukuja, ja näille voidaan toki tehdä induktiotodistuksia. Näin rationaaliluvuillekin voidaan todistaa asioita (luonnollisten lukujen) induktiolla, vaikkei rationaaliluvuille sellaista induktiota voidakaan tehdä, jossa induktioaskeleessa $P(q)$ johdettaisiin siitä, että $P(q')$ pätee, kun $q' < q$.

Mielivaltaista lineaarijärjestystä $<$ voidaan ajatella suuruusjärjestyksenä siinä mielessä, että järjestyksestä $<$ puhuttaessa käytetään usein sellaisia ilmauksia kuten ”pienin alkio”, ”suurempi kuin”, ”alkioiden x ja y välissä” jne., ja nämä tarkoitetaan ymmärrettäviksi järjestyksen $<$ suhteen.

Luonnollisten lukujen joukon aksiomatisointi

Luonnollisten lukujen joukko voidaan aksiomatisoida esimerkiksi seuraavasti:

Aksiomatisointi A:

1. $<$ on lineaarijärjestys luonnollisten lukujen joukossa.
2. On olemassa pienin luonnollinen luku 0.
3. Jokaiselle luonnolliselle luvulle n on olemassa välittömästi seuraava luonnollinen luku $s(n)$. Toisin sanoen, kaikilla luonnollisilla luvuilla n pätee $n < s(n)$, eikä lukujen n ja $s(n)$ välissä ole luonnollisia lukuja.
4. Jos $N \subset \mathbb{N}$, jolle $0 \in N$, ja kaikilla n ehto $n \in N$ implikoi $s(n) \in N$, niin tällöin $N = \mathbb{N}$.

Viimeistä aksioomaa kutsutaan induktioaksioomaksi. Se olennaisesti sanoo, että luonnollisille luvuille voidaan tehdä induktiotodistuksia. Se sanoo, että jos N on joukko, joka sisältää kaikki induktiossa tavoitettavat luvut, niin tällöin N sisältää kaikki luonnolliset luvut.

Lukija voi helposti todeta, että luonnollisten lukujen joukko toteuttaa Aksiomatisoinnin A.

Nyt herää kysymys, voisiko olla muita joukkoja kuin luonnollisten lukujen joukko, jotka toteuttavat ko. aksioomat. Jos siis X on joukko, ja $<$ relaatio X:ssä, joka toteuttaa alla olevat aksioomat

Aksiomatisointi B:

1. $<$ on lineaarijärjestys X:ssä.
2. On olemassa pienin X:n alkio $\bar{0}$.
3. Jokaiselle X:n alkiolle n on olemassa välittömästi seuraava X:n alkio $\bar{s}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla X:n alkioilla n pätee $n < \bar{s}(n)$, eikä alkioiden n ja $\bar{s}(n)$ välissä ole X:n alkioita.
4. Jos $N \subset X$, jolle $\bar{0} \in N$, ja kaikilla n ehto $n \in N$ implikoi $\bar{s}(n) \in N$, niin tällöin $N = X$.

niin onko X jollain perustavalla tavalla samanlainen kuin luonnollisten lukujen joukko? (Jos lukija ei jaksa kahlata kaikkia aksioomia läpi, niin kerrottakoon, että tämä aksiomatisointi on muutoin sama kuin Aksiomatisointi A, mutta luonnollisten lukujen joukon sijaan puhutaan joukosta X.)

Huomautettakoon, että muut tavalliset lukujoukot kuin $\mathbb{N}$ eivät kelpaa X:ksi: Kokonaislukujen joukko toteuttaa aksioomat 1 ja 3, muttei aksioomia 2 ja 4. Einegatiivisten reaalilukujen joukko toteuttaa aksioomat 1 ja 2, muttei aksioomia 3 ja 4. Jos reaaliluvulle x yritettäisiin valita seuraaja $s(x)$, tämä ei olisi välitön seuraaja, koska esimerkiksi luku $(x + s(x))/2$ olisi x:n ja $s(x)$:n välissä. Lukujoukko $\{0, 1, \ldots, 100\}$ toteuttaa aksioomat 1 ja 2, muttei aksioomaa 3, koska luvulla 100 ei ole seuraajaa tässä joukossa. Tämä joukko toteuttaa kylläkin hiukan muokatun version induktioaksioomasta, kun induktioaksioomaa muokataan niin, että se huomioi alkion $s(100)$ puutteen. (Näin ollen joukolle $\{0, 1, \ldots, 100\}$ voidaan tehdä induktiotodistuksia.)

Oletetaan edelleen, että X toteuttaa Aksiomatisoinnin B. Vastaus esittämäämme kysymykseen on: Kyllä, X on perustavalla tavalla samanlainen kuin $\mathbb{N}$, kun perustavalla tavalla samanlainen määritellään oikein. Se nimittäin määritellään niin, että $\mathbb{N}$ ja X ovat perustavalla tavalla samanlaisia, koska on olemassa aidosti kasvava bijektio $b\colon \mathbb{N} \to X$.

Funktio b määritellään induktiivisesti seuraavasti:

- $b(0) = \bar{0}$.
- Jos $b(n)$ on jo määritelty, niin $b(s(n))$ määritellään $b(s(n)) = \bar{s}(b(n))$.

Seuraavien kolmen kohdan todistaminen jätetään harjoitustehtäväksi:

- $b(n)$ tulee induktiossa määritellyksi kaikille $n \in \mathbb{N}$.
- b on aidosti kasvava.
- b on bijektio.

Todistaessasi sinun kannattaa pitää mielessä, että induktiotodistuksia voidaan tehdä sekä $\mathbb{N}$:lle että X:lle. Lisäksi kannattaa pitää mielessä, että aidosti kasvavan funktion todistaminen injektioksi on helppo nakki. Kannattaa myös muistaa, että $\mathbb{N}$ on ihan tavallinen luonnollisten lukujen joukko. Todistaessasi voit käyttää kaikkea mitä tiedät $\mathbb{N}$:sta, eikä sinun tarvitse työskennellä Aksiomatisoinnista A käsin. X:stä et tosin voi olettaa tietäväsi muuta kuin sen, että se toteuttaa Aksiomatisoinnin B.

Seuraava voi mennä lukijalta yli hilseen, mutta selitän kuitenkin, mitä ammattimatemaatikko päättelisi tilanteestamme: Aksiomatisoinnit A ja B ovat olennaisesti sama aksiomatisointi. Vain nimet eroavat. Aksiomatisoinnissa B kutsutaan X:ksi sitä, mitä Aksiomatisoinnissa A kutsutaan luonnollisten lukujen joukoksi. Koska luonnollisilta luvuilta on aidosti kasvava bijektio b

mille tahansa joukolle X, joka toteuttaa Aksiomatisoinnin B, on olemassa olennaisilta piirteiltään vain yksi systeemi, luonnollisten lukujen joukko, joka toteuttaa Aksiomatisoinnin A/B. Toisin sanoen, erot systeemien välillä, jotka toteuttavat nämä aksioomat ovat epäolennaisia. **Tämä tarkoittaa sitä, että kaikki, mitä luonnollisten lukujen järjestyksestä voidaan todistaa millä tahansa menetelmällä, on seurausta Aksiomatisoinnin A aksioomista.**[2]

Huomautettakoon, että Aksiomatisoinnin A päälle rakentaen voidaan määritellä myös luonnollisten lukujen yhteen- ja kertolasku. Määritelmät ovat luonteeltaan induktiivisia, mutta siihen, kuinka se tehdään, emme tässä mene.

Induktioaksiooman seurauksia

Nyt todistetaan johdannossa luvatut luonnollisten lukujen systeemin ominaisuudet:

Teoreema 1. *Jos $N \subset \mathbb{N}$, niin joukossa N on pienin alkio tai N on tyhjä.*

Todistus: Olkoon $N \subset \mathbb{N}$. Oletetaan, että joukossa N ei ole pienintä alkiota. Luku 0 ei voi kuulua joukkoon N, koska jos se kuuluisi, se olisi N:n pienin alkio. Oletetaan, että luvuista $0, \ldots, n$ mikään ei kuulu joukkoon N. Myöskään $s(n)$ ei voi kuulua joukkoon N, koska jos se kuuluisi, se olisi N:n pienin alkio. Siinä tulikin induktion lähtökohta ja induktioaskel. Siis kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee $n \notin N$. Siis N on tyhjä joukko. □

Teoreema 2. *Ei ole olemassa laskevaa ääretöntä jonoa $n_0 > n_1 > n_2 > \ldots$ luonnollisia lukuja.*

Todistus: Jos tällainen jono olisi olemassa, niin $\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ olisi epätyhjä joukko luonnollisia lukuja, jossa ei ole pienintä alkiota. Mutta tällaista joukkoa ei edellisen teoreeman nojalla ole olemassa. □

Vaihtoehtoisia aksiomatisointiyrityksiä

Tässä luvussa induktioaksiooma yritetään korvata jommalla kummalla edellisen luvun tuloksista. Tällöin saadaan toki aksioomat, jotka luonnolliset luvut toteuttavat, mutta syntyykö muita ongelmia?

Oletetaan siis, että $X = \mathbb{N}$, ja tutkitaan seuraavia kahta aksiomatisointia.

Aksiomatisointi 1:

1. $<$ on lineaarijärjestys X:ssä.
2. On olemassa pienin X:n alkio $\bar{0}$.
3. Jokaiselle X:n alkiolle n on olemassa välittömästi seuraava X:n alkio $\bar{s}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla X:n alkioilla n pätee $n < \bar{s}(n)$, eikä alkioiden n ja $\bar{s}(n)$ välissä ole X:n alkioita.
4. Jos $N \subset X$, niin N:ssä on pienin alkio tai N on tyhjä joukko.

Aksiomatisointi 2:

1. $<$ on lineaarijärjestys X:ssä.
2. On olemassa pienin X:n alkio $\bar{0}$.
3. Jokaiselle X:n alkiolle n on olemassa välittömästi seuraava X:n alkio $\bar{s}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla X:n alkioilla n pätee $n < \bar{s}(n)$, eikä alkioiden n ja $\bar{s}(n)$ välissä ole X:n alkioita.
4. Ei ole olemassa laskevaa ääretöntä jonoa $x_0 > x_1 > x_2 > \ldots$ joukon X alkioita.

(Huomautettakoon, että nämä aksiomatisoinnit ovat samat kuin Aksiomatisointi B, josta induktioaksiooma on korvattu uudella aksioomalla.)

Ongelma on siinä, että kaikki joukot X, jotka toteuttavat nämä aksiomatisoinnit, eivät ole olennaisesti samanlaisia kuin $\mathbb{N}$.

X voidaan valita seuraavasti: X koostuu kahdesta luonnollisten lukujen joukon kopiosta[3], ensimmäisestä ja jälkimmäisestä. Kaikki jälkimmäisen kopion alkiot ovat suurempia (X:ään määriteltävän järjestyksen mielessä) kuin kaikki ensimmäisen kopion alkiot. Kopioiden sisällä järjestys määritellään kuten luonnollisten lukujen joukon järjestys.

Lukijalle jätetään harjoitustehtäväksi todistaa, että X tosiaan toteuttaa sekä Aksiomatisoinnin 1 että Aksiomatisoinnin 2.

X ja $\mathbb{N}$ eivät kuitenkaan ole olennaisesti samanlaisia: $\mathbb{N}$:ssä jokaisella alkiolla n paitsi 0:lla on välitön edeltäjä $e(n)$, jolle $e(n) < n$, ja $e(n)$:n ja n:n välissä ei ole alkioita. X:ssä taas jälkimmäisessä kopiossa on pienin alkio p. p:llä ei ole välitöntä edeltäjää, koska kaikki p:tä pienemmät alkiot ovat ensimmäisen kopion alkioita, eikä näiden joukossa ole suurinta. Myöskään p ei ole $\bar{0}$, koska $\bar{0}$ on ensimmäisen kopion pienin alkio.

[2] Pidemmälle ehtineille selitän, että tarkoitan lihavoidulla lauseella seuraavaa: Olkoon $P(X)$ mikä tahansa järjestysstruktuurien ominaisuus (eli ominaisuus, joka voi olla tai olla olematta kullakin järjestysstruktuurilla X) siten, että $P(\mathbb{N})$ pätee, eli luonnollisten lukujen systeemillä on tämä ominaisuus. Nyt voidaan todistaa seuraava väite: *Kaikilla systeemeillä X pätee, että jos X toteuttaa Aksiomatisoinnin B, niin myös $P(X)$ pätee*, eli toisin sanoen $P(X)$ on seurausta Aksiomatisoinnista B. Vastaavasti myös $P(\mathbb{N})$ on seurausta Aksiomatisoinnista A.

[3] Kopiot voivat olla esimerkiksi $Y' = \{0', 1', 2', \ldots\}$ ja $Y'' = \{0'', 1'', 2'', \ldots\}$. Idea siis on, että sekä Y' että Y'' toimivat samoin kuin luonnollisten lukujen joukko, mutta $Y' \cap Y'' = \emptyset$.

Jos olisi aidosti kasvava bijektio $b\colon \mathbb{N} \to X$, niin $b(n) = p$ jollain $n \neq 0$. Tällöin $b(e(n)) = q$ jollain $q < p$. Nyt kuitenkin q:n ja p:n välissä on alkioita, jolle mikään $\mathbb{N}$:n alkio ei voi kuvautua. Ristiriita.

X ei myöskään voi toteuttaa induktioaksioomaa, koska jos se toteuttaisi sen, se toteuttaisi koko aksiomatisoinnin B, ja aidosti kasvava bijektio b olisi olemassa. Näin ollen induktioaksiooma ei seuraa aksiomatisoinnista 1 tai aksiomatisoinnista 2.

Ohimennen mainittakoon, että Aksiomatisoinnin 1 toteuttavia systeemejä kutsutaan ordinaaleiksi. Joukko-oppia ammatikseen tutkivat matemaatikot ovat paljon tekemisissä ordinaalien kanssa. Ordinaaleille voidaan tehdä eräänlaisia, luonnollisten lukujen induktiota monimutkaisempia induktiotodistuksia. Tätä tekniikkaa kutsutaan transfiniittiseksi induktioksi, mutta yksityiskohtiin emme tässä mene.

Vielä yksi aksiomatisointiyritys

Edellisissä aksiomatisoinneissa jouduttiin ongelmiin, koska aksioomilla oli malli X, jossa oli alkio, jolla ei ollut välitöntä edeltäjää. Entä jos välittömän edeltäjän olemassaolo otettaisiin aksioomaksi induktioaksiooman sijaan?

Aksiomatisointi 3:

1. $<$ on lineaarijärjestys X:ssä.
2. On olemassa pienin X:n alkio $\bar{0}$.
3. Jokaiselle X:n alkiolle n on olemassa välittömästi seuraava X:n alkio $\bar{s}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla X:n alkioilla n pätee $n < \bar{s}(n)$, eikä alkioiden n ja $\bar{s}(n)$ välissä ole X:n alkioita.
4. Jokaisella $\bar{0}$:sta eroavalla X:n alkiolla n on välitön edeltäjä $\bar{e}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla $n \in X, n \neq \bar{0}$, pätee $\bar{e}(n) < n$, eikä $\bar{e}(n)$:n ja n:n välissä ole X:n alkioita.

(Edelleen sama kuin Aksiomatisointi B, josta induktioaksiooma on korvattu uudella aksioomalla.)

Luonnollisten lukujen systeemi toteuttaa nämä aksioomat, OK! Mutta nyt X voidaan valita myös seuraavasti: X koostuu luonnollisten lukujen joukon kopiosta, jonka perässä on kokonaislukujen joukon kopio. Kaikki kokonaislukujen joukon kopion alkiot ovat suurempia (X:ään määriteltävän järjestyksen mielessä) kuin kaikki luonnollisten lukujen joukon kopion alkiot. Kopioiden sisällä järjestys määritellään kuten kyseisissä lukujoukoissa.

Lukijalle jätetään harjoitustehtäväksi osoittaa, että X tosiaan toteuttaa Aksiomatisoinnin 3.

X on olennaisesti erilainen kuin $\mathbb{N}$, koska X:ssä on osajoukko A, jossa ei ole pienintä alkiota. A:ksi voidaan valita yksinkertaisesti se kokonaislukujen joukon kopio.

Myöskään ei ole olemassa aidosti kasvavaa bijektiota $b\colon \mathbb{N} \to X$, koska jos tällainen bijektio olisi olemassa, joukon A alkukuva olisi $\mathbb{N}$:n epätyhjä osajoukko, jossa ei ole pienintä alkiota.

Samasta syystä kuin edellisessä luvussa, X ei toteuta induktioaksioomaa, eikä näin ollen induktioaksiooma seuraa aksiomatisoinnista 3.

Toimiva ratkaisu

Aksiomatisointi 3 ei takaa, että kaikilla osajoukoilla on pienin alkio, eikä Aksiomatisointi 1 takaa, että jokaisella nollasta eroavalla alkiolla on edeltäjä. Mutta entä, jos näiden molempien uudet aksioomat otettaisiin aksioomiksi? Tällöin saadaan toimiva ratkaisu.

Aksiomatisointi 4:

1. $<$ on lineaarijärjestys X:ssä.
2. On olemassa pienin X:n alkio $\bar{0}$.
3. Jokaiselle X:n alkiolle n on olemassa välittömästi seuraava X:n alkio $\bar{s}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla X:n alkioilla n pätee $n < \bar{s}(n)$, eikä alkioiden n ja $\bar{s}(n)$ välissä ole X:n alkioita.
4. Jokaisella $\bar{0}$:sta eroavalla X:n alkiolla n on välitön edeltäjä $\bar{e}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla $n \in X, n \neq \bar{0}$, pätee $\bar{e}(n) < n$, eikä $\bar{e}(n)$:n ja n:n välissä ole X:n alkioita.
5. Jos $N \subset X$, niin joko N on tyhjä tai N:ssä on pienin alkio.

(Sama kuin Aksiomatisointi B, josta induktioaksiooma on korvattu kahdella uudella aksioomalla.)

Teoreema 3. *Jos X toteuttaa Aksiomatisoinnin 4, niin tällöin X toteuttaa myös indktioaksiooman (Aksiomatisoinnin B viimeinen aksiooma.)*

Todistus: Oletetaan, että X toteuttaa Aksiomatisoinnin 4. Olkoon $N \subset X$ sellainen, että $\bar{0} \in N$, ja $n \in N$ implikoi $\bar{s}(n) \in N$. Tehdään vastaoletus $N \neq X$. Siis $X \setminus N$ on epätyhjä, ja siinä on pienin alkio n. Nyt $n \neq \bar{0}$, joten on olemassa alkio $\bar{e}(n)$. Mutta koska $\bar{e}(n) < n$, pätee $\bar{e}(n) \in N$. Siis oletuksen nojalla $n = \bar{s}(\bar{e}(n)) \in N$. Ristiriita. □

Nyt siis jokainen Aksiomatisoinnin 4 toteuttava systeemi toteuttaa myös Aksiomatisoinnin B, ja on olennaisesti samanlainen luonnollisten lukujen systeemin kanssa.

Tutkitaan vielä seuraavaa aksiomatisointia:

Aksiomatisointi 5:

1. $<$ on lineaarijärjestys X:ssä.

2. On olemassa pienin X:n alkio $\bar{0}$.
3. Jokaiselle X:n alkiolle n on olemassa välittömästi seuraava X:n alkio $\bar{s}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla X:n alkioilla n pätee $n < \bar{s}(n)$, eikä alkioiden n ja $\bar{s}(n)$ välissä ole X:n alkioita.
4. Jokaisella $\bar{0}$:sta eroavalla X:n alkiolla n on välitön edeltäjä $\bar{e}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla $n \in X, n \neq \bar{0}$, pätee $\bar{e}(n) < n$, eikä $\bar{e}(n)$:n ja n:n välissä ole X:n alkioita.
5. Ei ole olemassa ääretöntä laskevaa jonoa $x_0 > x_1 > x_2 > \dots$ joukon X alkioita.

(Sama kuin Aksiomatisointi B, josta induktioaksiooma on korvattu kahdella uudella aksioomalla.)

Lukijalle jätetään harjoitustehtäväksi osoittaa, että jos X toteuttaa tämän aksiomatisoinnin, se toteuttaa myös Aksiomatisoinnin B. Helpointa lienee todistaa välivaiheena, että X toteuttaa Aksiomatisoinnin 4.

Aksiomatisointi 5 tietysti sopii huonosti luonnollisten lukujen aksiomatisoinniksi, koska viimeisessä aksioomassa luonnolliset luvut oletetaan jo valmiiksi tunnetuiksi; indeksien on tosiaan tarkoitus viitata oikeisiin luonnollisiin lukuihin, ei joukon X alkioihin. Tästä ongelmasta huolimatta on kuitenkin mielenkiintoista tutkia, ovatko nämä aksioomat yhtäpitäviä Aksiomatisoinnin B kanssa.

Loppusanat

Kun pistämme kirjoitelman tulokset yhteen, saamme tuloksen, että Teoreemojen 1 ja 2 väitteet ovat kumpikin yhtäpitäviä luonnollisten lukujen induktioaksiooman kanssa.

Luonnolliset luvut toteuttavat Teoreemojen 1 ja 2 väitteet, ja luvussa 3 konstruoitu aidosti kasvava bijektio takaa, että kaikki luonnollisten lukujen järjestysominaisuudet seuraavat Aksiomatisoinnista A, ja näin ollen myös Aksiomatisoinnista B, joten Aksiomatisointi B (tai aidosti kasvavan bijektion b olemassaolo) implikoi Aksiomatisointien 4 ja 5 väitteet. Sekä Aksiomatisointi 4 että Aksiomatisointi 5 puolestaan implikoivat Aksiomatisoinnin B väitteet edellisen luvun tulosten nojalla.

Yllä oleva voidaan kiteyttää seuraavasti:

Teoreema 4. *Olkoon X systeemi, joka toteuttaa Aksiomatisoinnin 3. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä.*

- *X toteuttaa induktioaksiooman.*
- *Kaikissa X:n epätyhjissä osajoukoissa on pienin alkio.*
- *Ei ole olemassa ääretöntä laskevaa jonoa $x_0 > x_1 > x_2 > \dots$ joukon X alkioita.*
- *On olemassa aidosti kasvava bijektio $b\colon \mathbb{N} \to X$.*

Aksioomat harvoin ovat yhtäpitäviä tyhjiössä, vaan ne ovat yhtäpitäviä joidenkin muiden aksioomien vallitessa. Tässä tapauksessa induktioaksiooman ja Teoreemojen 1 ja 2 väitteiden yhtäpitävyyden kannalta ratkaisevaksi osoittautui aksiooma, joka sanoo välittömien edeltäjien olemassaolon.

Jos kiinnostuit tässä kirjoituksessa esitetyistä päättelytekniikoista, sinun kannattaa lähteä yliopistoon lukemaan matematiikkaa ja erikoistua logiikkaan. Logiikassa on osa-alue, malliteoria, jossa tutkitaan sitä, millaisia aksioomat toteuttavia systemeejä voidaan millekin aksioomajoukolle muodostaa.