Heittäydytäänpä filosofisiksi

Tuomas Korppi

Johdanto

Filosofit ovat kehitelleet teorioitaan kaikesta mahdollisesta. Jotkut filosofit ovat kehitelleet teorioitaan myös matematiikasta. Tyypillisiä kysymyksiä, joista filosofit ovat matematiikassa kiinnostuneet, ovat esimerkiksi seuraavat:

- Mitä matemaattiset oliot (luvut, vektorit, lukujoukot kuten $\mathbb{R}$ ym.) tarkalleen ottaen ovat?
- Missä mielessä todet matemaattiset väitteet ovat tosia?
- Missä määrin ihmiset voivat luotettavasti hahmottaa äärettömyyttä, esim. äärettömiä lukujoukkoja?

Filosofit harvoin ovat yksimielisiä mistään, ja tämä pätee myös matematiikkaa koskeviin filosofisiin kysymyksiin. Tässä kirjoitelmassa esittelenkin muutamia matematiikanfilosofisia koulukuntia, ja heidän vastauksiaan yllä mainittuihin kysymyksiin.

Platonismi

Platon oli antiikin Kreikassa elänyt filosofi. Platonin filosofialle ominaista oli se, että hän uskoi todellisimmassa mielessä olemassa oleviksi sellaiset asiat kuten hyvyys, kauneus ja totuus. Näitä kolmea hän käytti esimerkkeinä tosiolevasta, mutta samaan kategoriaan voidaan lukea kaikki ominaisuudet tai yleiskäsitteiden kuvaamat abstraktit asiat kuten punaisuus ja pyöreys. Ne yksittäiset asiat, joita havaitsemme aistein arkielämässämme, olivat Platonille vain tosiolevan epätäydellistä heijastumaa.

Mietitään lukua kaksi. Se voidaan kirjoittaa arabialaisin numeroin 2, roomalaisin numeroin II, sanallisesti kaksi tai englanniksi two. Kuitenkin näillä ilmauksilla 2, II, kaksi ja two on jotain yhteistä. Tekisi mieli ajatella, että nämä ilmaukset kaikki nimeävät saman olion, abstraktin luvun kaksi. Lukua on vaikea ajatella merkkinä paperilla, koska tällöin näyttäisi siltä, että jonkun neljästä mainitusta ilmauksesta pitäisi olla ”oikea” kakkonen. Ennemmin kuitenkin näyttää siltä, että nuo neljä ilmausta ovat yhtä oikeita nimiä jollekin, joka on enemmän kuin mikään näistä ilmauksista.

Ajatellaan sitten sellaista matemaattista oliota kuin täydellisen pyöreää ympyrää. Matemaatikot operoivat sillä täysin rutiininomaisesti, mutta fysikaalisesta maailmasta ei sellaista löydy. Yrittipä valmistaa kuinka pyöreän kiekon tahansa, siihen jää aina pieniä epätasaisuuksia. Täydellisen pyöreä ympyrä onkin idealisoitu, teoreettinen olio.

Matemaattiset oliot kuten luvut, vektorit, lukujoukot ja täydellisen pyöreät ympyrät voidaan siis ajatella samalla tavoin abstrakteina, idealisoituina olioina kuin hyvyys, kauneus, totuus ja punaisuus. Nykyään platonismiksi kutsutaankin matematiikanfilosofian suuntausta, jonka mukaan on olemassa ”oikeasti olemassa oleva” matemaattisten olioiden todellisuus, johon abstraktit matemaattiset oliot kuuluvat.

Platonistien mukaan matemaattisten olioiden todellisuus on ikuinen ja ihmisestä riippumaton. Matemaattisten väitteiden totuus on platonistille ongelmaton: Esimerkiksi väite ”Alkulukuja on ääretön määrä” on tosi, koska matemaattisten olioiden todellisuudessa on ääretön määrä olioita, jotka ovat alkulukuja.

Suhtautuminen äärettömyyteen on samoin ongelmatonta: Vaikka ihmisen hahmotuskyky samoin kuin arkimaailma on äärellinen, ei ole mitään periaatteellista estettä, miksei ihmisestä ja arkitodellisuudesta irrallisessa matemaattisten olioiden todellisuudessa voisi olla äärettömiä olioita, esimerkiksi reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

Lukijasta yllä mainittu filosofia voi tuntua kummalliselta, ja minustakin on kummallista, että filosofit ovat tosiaan väitelleet siitä, ovatko sellaiset asiat kuten punaisuus ja pyöreys oikeasti olemassa. Mitä annettavaa platonismilla on siis matemaatikolle?

Vastaus kuuluu: Työskennellessään suurin osa ammattimatemaatikoista ajattelee matemaattisia olioita ikään kuin ne olisivat juuri sellaisia kuin platonistit väittävät! Tämä on yksinkertaisesti tehokkain tapa löytää päteviä todistuksia. Olen kuullut myös huhuja matemaatikoista, jotka ajattelevat kaavoja, eivät abstrakteja matemaattisia olioita, mutten kykene itse hahmottamaan, kuinka nämä myyttiset kaavamatemaatikot pystyvät työskentelemään.

Sunnuntaikristittyjen lisäksi olenkin kuullut puhuttavan sunnuntaiformalisteista. Sunnuntaiformalisti on matemaatikko, joka arkisin käytännössä työskentelee platonistisista lähtökohdista käsin, mutta sunnuntaisin, tehdessään matematiikanfilosofiaa, omaksuu jonkun muun matematiikanfilosofian koulukunnan kannan, esimerkiksi formalismin.

Formalismi

Mitä maallikolle tulee mieleen, kun joku sanoo sanan matematiikka? No kaavat. Formalismi onkin matematiikanfilosofinen kanta, jonka mukaan platonistin abstrakteja matemaattisia olioita ei ole olemassa, vaan matematiikassa on kyse kaavoista ja niiden manipuloimisesta.

Mitä kaavojen manipulointi sitten tarkoittaa? Lukijalle lienee tuttua, että esimerkiksi kaavan $(x+1)^2$ saa purkaa muotoon x^2+2x+1. Matematiikassa on paljon tällaista kaavamanipulaatiota, mutta voidaanko koko matematiikka esittää tällaisena?

Formalisti tyypillisesti ajattelee matematiikan lähtevän liikkeelle aksioomista, jotka voidaan ilmaista kaavoina. Matematiikan tekeminen on formalistin mielestä sitä, että aksioomista päätellään uusia kaavoja, teoreemoja, päättelysääntöjen mukaan. Päättelysääntöjen pitää olla sellaisia, että ne ovat esitettävissä yksinkertaisena merkkijonomanipulaationa.[1]

On ollut jo yli sata vuotta tiedossa, että alkeislogiikan[2] päättelysäännöt voidaan esittää yksinkertaisena merkkijonomanipulaationa. Esimerkiksi väitteestä ”A ja B” voidaan päätellä väite ”A”, ja samoin väite ”B”. Muut alkeislogiikan päättelysäännöt ovat samanhenkisiä, jotkut ehkä hiukan monimutkaisempia.

Ehkä tärkein aksioomien ominaisuus on se, että aksioomien täytyy olla ristiriidattomat, eli sellaiset, että niistä ei voida päätellä ristiriitaa. Formalisti tyypillisesti pitääkin matemaattisesti tasa-arvoisina kaikkia ristiriidattomia aksioomasysteemejä. Muita tärkeämmäksi jonkun tietyn aksiomatisoinnin voi tehdä joku eimatemaattinen syy, esimerkiksi se, että fyysikko tarvisee työssään tietynlaista matematiikkaa.

Matemaatikon on teoreettisesti mahdollista olla formalisti, koska suurin osa käytännössä tehdystä matematiikasta palautuu joukko-oppiin. Melkein mitä tahansa matematiikkaa voidaan tehdä joukko-opin ZFC-aksioomista käsin, käyttäen alkeislogiikan päättelysääntöjä päättelysääntöinä. Ongelma vain on siinä, että osataan todistaa, että ZFC-aksioomien ristiriidattomuutta ei voida todistaa, joten formalistille jää aina pieni epäilyksen siemen koskien niiden ristiriidattomuutta.

Äärettömyys on formalistille ongelmatonta. Hän voi kirjoittaa aksiooman, joka esimerkiksi sanoo, että ääretön joukko on olemassa, ja tällaista aksioomaa voi käyttää kuten muitakin aksioomia. Formalistin aksioomat ja uusien kaavojen johdot ovat äärellisiä operaatioita äärellisillä merkkijonoilla, joten tällä tavoin formalisti onnistuu kiertämään äärettömyyttä koskevat ongelmat.

Formalismin ongelma on matemaattisten väitteiden totuus. Tutkitaan esimerkiksi väitettä ”Alkulukuja on ääretön määrä.” Formalistin mielestä tämä väite ei ole sananmukaisesti tosi, koska sellaisia olioita kuin alkulukuja ei ole olemassakaan. Formalisti joutuukin uudelleentulkitsemaan väitteen väitteeksi ”Aksioomistani voi johtaa väitteen *Alkulukuja on ääretön määrä.*”, ja vasta tämä väite on sananmukaisesti tosi. Puhuessaan muiden matemaatikkojen kanssa matematiikasta formalisti joutuukin koko ajan salaa ajattelemaan, että hän tarkoittaa hiukan jotain muuta kuin mitä hän sanoo ääneen.

Toinen formalismin ongelma on se, että tehdessään matematiikkaa monet matemaatikot tosiaan ajattelevat

[1] Olennaista on, että aksioomat, teoreemat ja päättelyt *voidaan haluttaessa ilmaista* kaavoina ja kaavamanipulaatioina. On yhdentekevää, ilmaistaanko ne käytännössä luonnollisella kielellä vai kaavoilla, kunhan ne voitaisiin haluttaessa ilmaista kaavoina.

[2] Alkeislogiikalla tarkoitan tässä ensimmäisen kertaluvun predikaattikalkyylia.

abstrakteja matemaattisia olioita, eivät kaavoja, ja formalistinen matematiikanfilosofia ei oikein selitä, kuinka tämä on mahdollista. Helsingin yliopiston matematiikan laitoksen entinen johtaja Jouko Väänänen onkin sanonut, että matemaatikolle formalismi on lähinnä tapa päästä eroon filosofeista. Kun filosofi tulee kyselemään matemaatikolta kiusallisia kysymyksiä matematiikanfilosofiasta, matemaatikko voi vastata: ”Minä vain raapustelen näitä kaavoja liitutaululle. Jätä minut rauhaan.”

Fiktionalismi

Fiktionalismia on montaa lajia, ja alla käsittelen Mark Balaguerin fiktionalismia.

Platonismin ongelma on se, että platonistit olettavat epämääräisiä ”oikeasti olemassa olevia” abstrakteja matemaattisia olioita. Formalismissa taas oli muita ongelmia. Kuinka platonismin hyvät puolet voitaisiin säilyttää, kuitenkin niin, ettei epämääräisiä olemassaoloväitteitä tarvittaisi? Eräs ratkaisuehdotus on fiktionalismi. Fiktionalismin mukaan matematiikassa on kyse abstrakteista matemaattisista olioista ja niiden ominaisuuksista, mutta nämä matemaattiset oliot ovat fiktiivisiä.

Ensimmäinen mieleen tuleva kysymys on tietysti se, että mitä opetettavaa fiktiivisten olioiden pyörittelyllä olisi meille, jos matematiikassa on siitä kyse. Kuitenkin muista yhteyksistä tiedämme, että fiktio on joskus hyvinkin opettavaista. Esimerkiksi Orwellin romaani 1984 on aivan loistava varoitus totalitarismin vaaroista. Samoin fyysikkojen kilon painoista pistemäistä kappaletta ei ole oikeasti olemassa, mutta sitä voidaan hyvinkin käyttää havainnollistavana esimerkkinä fysiikassa. Näin ollen en itse ole yhtään sitä mieltä, että matemaattisten olioiden pitäminen fiktiivisinä vähentäisi matematiikan arvoa.

Äärettömyys on tietysti fiktionalistille ongelmatonta. Mikään ei estä fiktionalistia kuvittelemasta äärettömiä joukkoja. Samoin käytännön matemaatikon työskentely abstraktien matemaattisten olioiden parissa on filosofisesti ongelmatonta: Matemaatikko kuvittelee matemaattiset oliot!

Toisin kuin formalisti, fiktionalisti ei joudu uudelleentulkitsemaan matematiikan lauseita, vaan hänelle ”Alkulukuja on ääretön määrä” tosiaan tarkoittaa sitä, että alkulukuja on ääretön määrä. Onko väite sitten fiktionalistille tosi vai epätosi onkin hiukan kinkkisempi juttu. Ainakin se on yhtä tosi kuin ne kaikkien tuntemat tosiasiat, että Joulupukilla on valkoinen parta, ja että Frodo Reppuli on kotoisin Konnusta.

Mark Balaguerin mukaan tietyt platonismin alalajit ja hänen versionsa fiktionalismista tulevat hyvin lähelle toisiaan. Ero on vain matemaattisten olioiden ”todellisessa” olemassaolossa, mitä Balaguer pitää hyvin vähämerkityksisenä kysymyksenä.

On myös huomattava, että platonisti, formalisti ja Balaguerlainen fiktionalisti käytännössä hyväksyvät päteviksi täsmälleen samat matematiikan tulokset, ja nämä tulokset ovat myös ne, jotka ei-filosofisesti suuntautuneet matemaatikot hyväksyvät. Seuraavaksi esittelen kaksi matematiikanfilosofian koulukuntaa, jotka eivät hyväksy päteviksi kaikkia matemaatikkojen hyväksymiä matematiikan tuloksia.

Finitismi

Ryhdy mielessäsi laskemaan *yksi, kaksi, kolme, neljä, …* Kuinka pitkälle pääsit? Ehkä sataan? Et ainakaan päässyt loppuun asti; et luetellut kaikkia luonnollisia lukuja. Mielesi on rajoittunut äärelliseen. Lähde nyt juoksemaan. Kuinka pitkälle pääsit? Juoksit ehkä kilometrin tai kaksi. Et kuitenkaan päässyt äärettömän pitkälle. Myös arkimaailmamme on rajoittunut äärelliseen.

Mielemme tai se maailma, missä elämme, ei tavoita ääretöntä. Kuinka tällaisessa tilanteessa voisimme tuntea äärettömyyden ja operoida sillä pätevästi? Finitistisen matematiikanfilosofian koulukunnan mukaan et voikaan. Finitistien mielestä ainoastaan äärellistä käsittelevä matematiikka on pätevää.

Finitismi on kuitenkin hankala matematiikanfilosofia matemaatikolle, koska äärettömyyteen törmää lähes kaikkialla modernissa matematiikassa. Lukujoukot ovat äärettömiä, äärettömiä lukujonoja tarvitaan lähes kaikkialla, ja jopa yksikkövälillä $[0,1]$ on äärettömän monta pistettä. Derivaatta määritellään erotusosamäärän raja-arvona, ja raja-arvo puolestaan äärettömän lähestymisen avulla.

Finitistit siis pelaavat ”varman päälle”. He hyväksyvät vain sellaisen matematiikan, joka on ihan satavarmasti pätevää, mutta samalla he pelaavat liian varman päälle: He menettävät modernin matematiikan äärettömyyksiä koskevat tulokset. Finitismi ei siis selitä sitä, kuinka on mahdollista, että matemaatikot kuitenkin pystyvät käytännössä täysin ongelmattomasti käsittelemään äärettömyyksiä.

Intuitionismi

Mitä matemaatikot tekevät työkseen? He ajattelevat matemaattisia olioita ja mielessään todistavat niille tuloksia. Intuitionistisen koulukunnan filosofit lähtevät liikkeelle tästä. Intuitionismin mukaan matematiikassa on kyse matemaatikkojen ajatuksista, niin sanotuista mentaalisista konstruktioista.

Ajattele mielessäsi joukot $A = \{a, b, c\}$ ja $D = \{d, e\}$. Ajattele seuraavaksi funktiota $f\colon A \to D$; $f(a) = f(b) = d$, $f(c) = e$. Hyvä. Suoritit juuri mentaalisen konstruktion. Konstruoit funktion f. Katso sitten, onko funktion f kuvajoukko sama kuin D. Hyvä. Konstruoit juuri todistuksen sille, että f on surjektio.

Tällaista on intuitionistin mielestä matematiikka. Intuitionistit eivät kuitenkaan vaadi, että matemaatikoiden on oltava muistihirviöitä, vaan he sallivat kynän ja paperin käytön muistin tukena, joten paperilla laskeminen on intuitionistillekin mahdollista.

Intuitionistit suhtautuvat vakavasti ajatukseen, että mieli kykenee hahmottamaan vain äärellisiä asioita. Kuitenkin intuitionistit sallivat jonkun verran äärettömiä matemaattisia olioita, mutta eivät niin paljoa kuin platonistit/formalistit/fiktionalistit. Intuitionistille äärettömät matemaattiset oliot ovat nimittäin sellaisia, joiden konstruktiota voi halutessaan jatkaa niin pitkälle kuin haluaa.

Tutkitaan esimerkiksi lukujonoa $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $x_i = 1/2^i$. Intuitionistille tämä lukujono on täysin kelvollinen, koska luetteloa $1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64, \ldots$ voi jatkaa niin pitkälle kuin haluaa. Se, että luetteloa jatkaessa paperi loppuu jossain vaiheessa universumista, ei ole intuitionistille periaatteellinen este; konstruktioita tekevällä matemaatikolla intuitionistit yleensä tarkoittavat jonkunlaista idealisoitua matemaatikkoa, joka kykenee hahmottamaan pelkästään äärellistä, mutta kuitenkin kuinka suurta äärellistä tahansa.

Siinä missä platonisti puhuu olemassa olevista matemaattisista olioista, intuitionisti puhuu konstruoiduista matemaattisista olioista. Tämä tarkoittaa sitä, että intuitionisti saa operoida vain sellaisilla matemaattisilla olioilla, jotka hän on konstruoinut mentaalisesti, tai väljemmin, joista on osoitettu, että ne olisi periaatteessa mahdollista konstruoida mentaalisesti.

Siinä missä platonisti puhuu tosista matemaattisista väitteistä, intuitionisti puhuu todistetuista matemaattisista väitteistä. Intuitionisti saa olettaa todeksi vain sellaiset matemaattiset väitteet, jotka on todistettu.

Viimeksi mainitut kaksi seikkaa saavat intuitionistin ja platonistin mieltämään alkeislogiikan eri tavoin. Tutkitaan esimerkiksi väitettä ”A tai ei-A”. Platonistin mielestä tämä on tosi väite. A on nimittäin tosi tai epätosi. Jos A on epätosi, ei-A on tosi. Joka tapauksessa siis toinen lauseista A ja ei-A on tosi, joten väite ”A tai ei-A” on väistämättä tosi.

Jotta ”A tai ei-A” olisi intuitionistin mielestä todistettu, pitäisi joko A:n tai ei-A:n olla todistettu. Jälkimmäisen todistaminen tarkoittaisi ristiriidan johtamista A:sta. On kuitenkin täysin mahdollista, että kumpaakaan näistä todistuksista ei ole tehty, ja on myös täysin mahdollista, että kumpaakaan näistä todistuksista ei ole edes periaatteessa mahdollista tehdä, joten intuitionistin mielestä ”A tai ei-A” ei ole samalla tavalla väistämättä tosi lause kuin platonistin mielestä.

Nämä kaksi piirrettä, äärettömien matemaattisten olioiden hyväksyminen vain siinä tapauksessa, että ne on mahdollista konstruoida, ja platonistia heikompi alkeislogiikka aiheuttavat sen, että intuitionistit eivät hyväksy suurta osaa nykymatematiikan tuloksista. Intuitionismin suurin ongelma onkin se, että intuitionistisesti oikeaoppinen matematiikka on mopo: Siinä voidaan todistaa vähemmän kuin platonistin matematiikassa, ja todistukset ovat vielä usein työläämpiä.

Loppusanat

Filosofiassa harvoin on lopullisia vastauksia. Kaikilla yllä mainituilla koulukunnilla on vahvuutensa ja heikkoutensa, ja jokaista ovat kannattaneet ihan järkevätkin ihmiset. Fiktionalismia lukuun ottamatta kaikki yllä mainitut koulukunnat ovat jo vanhoja ja vakiintuneita, ja uusiakin tulokkaita koulukunniksi on, vaikkei niitä olekaan tässä käyty läpi.

Itse olen nykyään taipuvainen kannattamaan fiktionalismia. Syy tähän on se, että fiktionalismi ja platonismi ovat ne kaksi koulukuntaa, jotka parhaiten vastaavat sitä, mitä matemaatikot oikeasti tekevät, ja fiktionalismilla on platonismia vähemmän ontologista (eli olemassaoloa koskevaa) painolastia.

Intuitionismi on idealtaan kiehtova, matematiikka ja matemaatikon mieli ovat perustavalla tavalla kytköksissä toisiinsa. Kuitenkin kaikkein mielenkiintoisinta matematiikkaa on mielestäni juuri se monimutkaisilla äärettömyyksillä pelaava matematiikka, jota intuitionismi ei hyväksy. Ja intuitionistien vastaväitteistä huolimatta sellaistakin matematiikkaa onnistutaan tekemään ilman, että ongelmia käytännössä esiintyy.

Kirjallisuutta

- Benacerraf, Paul ja Putnam, Hilary (ed.), *Philosophy of Mathematics*. Tämä on kattava kokoelma 1900-luvun tärkeimpiä artikkeleita matematiikanfilosofiasta.
- Balaguer, Mark, *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*. Tämä on suosikkikirjani matematiikanfilosofiasta, ja tämän kirjoitelman luvussa Fiktionalismi esittämäni Balaguerin fiktionalismi perustuu tähän kirjaan.
- Heyting, Arend, *Intuitionism: An introduction*. Kirjassa kehitetään perusmatematiikkaa intuitionistisista lähtökohdista käsin.