Kellyn kaava

Jukka Liukkonen
Mat. yo. evp.

Johdanto

Vedonlyöjien, sijoittajien ja muiden rahapelaajien hyvin tuntema **Kellyn kaava**[1]

$$\theta = \frac{p\lambda - 1}{\lambda - 1} \tag{1}$$

kertoo, kuinka suuri osuus *pelikassasta* vedonlyönnissä kannattaa panostaa seuraavalle kierrokselle, jotta rahavarat karttuisivat keskimäärin mahdollisimman nopeasti. Pelikassa tarkoittaa pelaajan pelaamiseen käytettävissä olevaa rahasummaa. Kaavassa esiintyvät symbolit ovat:

λ = vedonvälittäjän tarjoama *kerroin*, jolla kerrottuna pelaaja saa rahallisen *panoksensa* takaisin, jos pelaajan veikkaama vaihtoehto toteutuu; muussa tapauksessa panos jää vedonvälittäjälle,

p = pelaajan arvio voiton todennäköisyydelle,

θ = kaavan suosittelema panos osuutena koko pelikassasta.

▼ **Esimerkki**. Tulevassa Suomen ja Ruotsin välisessä jääkiekko-ottelussa pelaaja perusteellisen analyysin jälkeen arvioi Suomen voittavan todennäköisyydellä $p = 0{,}6$. Vedonvälittäjä tarjoaa Suomen voitolle kertoimen $\lambda = 1{,}7$. Jos pelaaja panostaa vetoon koko pelikassansa $B = 1000$ € ja Suomi voittaa, pelikassa kasvaa arvoon $\lambda B = 1{,}7 \cdot 1000$ € $= 1700$ €. Jos tulee tasapeli tai Suomi häviää, pelaaja menettää koko panoksensa eli menee ns. *poikki*. Keskimäärin pelaaja arvioi voittavansa siinä mielessä, että pelikassan koon *odotusarvo* ottelun jälkeen, käyttäen pelaajan itsensä arvioimaa todennäköisyyttä, on

$$\begin{aligned} p\lambda B + (1-p) \cdot 0 \cdot B &= 0{,}6 \cdot 1{,}7 \cdot 1000 \text{ €} \\ &= 1020 \text{ €}. \end{aligned}$$

Odotusarvohan on summa, missä termeinä ovat satunnaismuuttujan arvot kerrottuina niihin liittyvillä todennäköisyyksillä. Tässä tapauksessa tulosvaihtoehtoja *Suomi voittaa* ja *Suomi ei voita* vastaavat satunnaismuuttujan arvot ovat 1700 € (panos palautuu kertoimella 1,7) ja 0 € (panos palautuu kertoimella 0 eli jää välittäjälle). Nämä ovat pelikassan mahdolliset euromääräiset arvot ottelun jälkeen. Vastaavat todennäköisyydet ovat 0,6 ja 0,4. Pelaajan saaman voiton odotusarvo on 1020 € − 1000 € = 20 €. Kellyn kaavan suosittelema panostus on

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{p\lambda - 1}{\lambda - 1} = \frac{0{,}6 \cdot 1{,}7 - 1}{1{,}7 - 1} = \frac{0{,}02}{0{,}7} \\ &\approx 0{,}02857. \end{aligned}$$

Alaspäin pyöristettynä Kellyn suositus panokseksi on 2,8 % pelikassasta, siis 28 €. Voiton odotusarvo tällä panostuksella on $0{,}6 \cdot 1{,}7 \cdot 28$ € − 28 € = 0,56 €. ▲

[1] Nimi juontaa juurensa AT&T:n Bell-laboratoriossa työskennelleestä John Larry Kelly Juniorista (1923–1965), joka esitteli kaavaan johtavan periaatteen vuonna 1956 tutkittuaan digitaalisessa tiedonsiirrossa esiintyviä häiriöitä. Suomalaislähtöinen Nokia osti muutama vuosi sitten Alcatel-Lucent -yhtiön ja sai kaupan myötä Bell-laboratorion omistukseensa.

Kellyn kaavassa nimittäjä $\lambda - 1$ on voiton suhde panokseen eli *tuotto* pelaajan voittaessa vedon (engl. *rate of return* tai *odds*). Osoittaja $p\lambda - 1$ on voiton odotusarvon suhde panokseen eli *odotettu tuotto* (engl. *expected rate of return* tai *edge*). Englanninkieliset pelurit lausuvat kaavan ohjeena muodossa *bet edge over odds.* Sen mukaan koko pelikassaa ei kannata riskeerata. Jos pelaaja menee poikki, pelaajalla ei enää ole varoja lyödä vetoa tulevien otteluiden tuloksista. Kellyn kaavan mukaisella panostuksella riskiä pyritään pienentämään niin, että pelaaja vaurastuisi mahdollisimman tehokkaasti pitkällä aikavälillä, kun samaa peliä ajatellaan toistettavan loputtomiin.

Taloudellisen voitontavoittelun yhteydessä riskin pienentäminen tyypillisesti merkitsee myös tuotto-odotusten kohtuullistamista. Kellyn kaava toimii tietyssä mielessä tätä sääntöä vastaan. Kaavan hyödyllisyyttä on hyvä verrata toiseen poikkeukseen säännöstä: esimerkiksi osakemarkkinoilla riskiä pienennetään salkkua *hajauttamalla* ilman, että odotettu tuotto alenisi. Jotkut yhteen tai muutamaan yhtiöön syvällisesti perehtyneet osakepoimijat tosin saattavat esittää vastalauseen ”älä hajauta tuottoasi pois” -saatesanojen kera. Myös vedonlyönnissä vedot voidaan hajauttaa eri kohteisiin. Kelly ja hajauttaminen yhdessä ovat kokeilemisen arvoinen yhdistelmä.

Keskimääräinen kasvu

Kun peliä pelataan N kierrosta, yksittäisen pelikierroksen panos ja tuotto vaihtelevat. Tällöin myös pelikassan koko vaihtelee. Jos pelikassan koko euroissa on alunperin B_0 ja eri kierrosten jälkeen $B_1, B_2, \ldots, B_N$, rahavarojen kasvua (tai pienenemistä) kuvaa kasvukerroin $X_k = B_k/B_{k-1}$. Pelikassan koko N kierroksen jälkeen voidaan esittää tulona

$$\begin{aligned} B_N &= X_N B_{N-1} = X_N X_{N-1} B_{N-2} = \ldots \\ &= X_N X_{N-1} \ldots X_1 B_0. \end{aligned}$$

Luku $X = (X_N X_{N-1} \ldots X_1)^{1/N}$, lukujen $X_1, \ldots, X_n$ ns. geometrinen keskiarvo, kuvaa pelikassan **keskimääräistä kasvua** N ensimmäisellä pelikierroksella, sillä vakiokasvulla X saadaan sama lopputulos kuin vaihtelevalla kasvulla X_k, $k = 1, \ldots, N$:

$$X_N X_{N-1} \ldots X_1 B_0 = \underbrace{X X \ldots X}_{N \text{ kpl}} B_0.$$

Kertoimen X arvo riippuu siitä, kuinka monta pelikierrosta otetaan mukaan tarkasteluun. Luku X on täten pelikierrosten lukumäärän N funktio, $X = X(N)$. Jos tällä funktiolla on raja-arvo, kun N kasvaa rajatta, kyseinen raja-arvo tulkitaan pelikassan keskimääräiseksi kierroskohtaiseksi kasvukertoimeksi hyvin pitkällä aikavälillä. Raja-arvo

$$\lim_{N \to \infty} X(N)$$

on täten mittari pelaamisen taloudelliselle tehokkuudelle. Myöhemmin nähdään, millä tavalla kertoimet X_k riippuvat todellisessa pelissä panossuhteesta θ, joka on pelin parametri. Tällöin myös edellä mainittu raja-arvo riippuu parametrista θ. Pelaaminen on tehokkainta silloin, kun tämä parametri säädetään Kellyn kaavan mukaiseksi. Edellytyksenä mallin toimivuudelle on, että pelaaja on arvioinut eri tulosvaihtoehtojen toteutumistodennäköisyydet oikein, mitä se sitten tarkoittaneekin. On melko mahdotonta sanoa, mitkä ovat ”oikeat” todennäköisyydet esimerkiksi jääkiekkomaaottelussa.

Vahva suurten lukujen laki

Todellisessa pelitilanteessa kasvukertoimia $X_1, \ldots, X_n$ ei tunneta ennalta, vaan ne määräytyvät vedonlyönnin kohteen dynamiikasta. Vedonlyönnin kohdetta, esimerkiksi Suomi–Ruotsi-ottelua, pidetään satunnaisilmiönä, ja ilmiöstä johdettavat suureet, esimerkiksi ottelun lopputulos, ovat satunnaismuuttujia. Myös kasvukertoimet $X_1, \ldots, X_n$ ovat satunnaismuuttujia. Jos satunnaismuuttujan käsite ei ole lukijalle tuttu, hän voi ajatella sen satunnaislukuna, joka voi saada tiettyjä arvoja tietyillä todennäköisyyksillä. Nämä arvot ja niihin liittyvät todennäköisyydet muodostavat satunnaismuuttujan *jakauman.* Jos satunnaismuuttujan Y mahdolliset arvot ovat $y_1, \ldots, y_n$ todennäköisyyksin $p_1, \ldots, p_n$, satunnaismuuttujan Y jakauman odotusarvo $E[Y]$ lasketaan kaavasta

$$E[Y] = p_1 y_1 + \ldots + p_n y_n = \sum_{i=1}^{n} p_i y_i \,.$$

Odotusarvo on jakauman painopiste, kun todennäköisyyksien p_i suuruiset painot ajatellaan sijoitetuiksi lukusuoralle vastaavien lukujen y_i kohdalle. Itse lukusuora ajatellaan tässä painottomaksi.

Kellyn kaava voidaan johtaa nojautumalla ns. **vahvaan suurten lukujen lakiin**. Se kuuluu seuraavasti:

Olkoot $Y_1, Y_2, \ldots$ keskenään riippumattomia satunnaismuuttujia, joilla on samat arvot ja sama jakauma kuin satunnaismuuttujalla Y. Tällöin

$$\frac{1}{N}(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N) \xrightarrow[N \to \infty]{\text{a.s.}} E[Y].$$

Raja-arvonuolen päälle kirjoitetut kirjaimet a.s. ovat lyhenne englannin kielen sanoista *almost surely* eli suomeksi *melkein varmasti.* Merkintä tarkoittaa, että satunnaismuuttujien Y_k keskiarvo $(Y_1 + \ldots + Y_N)/N$ lähestyy raja-arvonaan satunnaismuuttujan Y odotusarvoa $E[Y]$ todennäköisyydellä yksi, kun N kasvaa rajatta. Sellaisen tapauksen todennäköisyys, jossa kyseistä raja-arvoa ei ole olemassa, tai se on jokin muu kuin $E[Y]$, on nolla, siis niin pieni, ettei tällaista poikkeustapausta normaalisti tarvitse ottaa huomioon; tapahtuman harvinaisuus on samaa luokkaa kuin se, että päättymättömässä kolikonheitossa ei milloinkaan saada klaavaa – mahdollista, mutta ”äärettömän” epätodennäköistä.

Satunnaismuuttujien keskinäinen riippumattomuus tarkoittaa käytännössä samaa kuin riippumattomuus normaalissa puhekielessä: esimerkiksi jos Y_1 on lottoarvonnan tulos tällä viikolla ja Y_2 lottoarvonnan tulos ensi viikolla, niin Y_1 ja Y_2 eivät mitenkään voi riippua toisistaan, ne ovat riippumattomat satunnaismuuttujat. Huomautettakoon, että niillä on keskenään myös sama arvojoukko ja sama jakauma. Jos yleisemmin $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ ovat keskenään riippumattomia satunnaismuuttujia, joilla on samat arvot ja sama jakauma kuin satunnaismuuttujalla Y, jonoa $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ sanotaan *otokseksi* satunnaismuuttujasta Y. Tämä ehto on oletuksena vahvassa suurten lukujen laissa.

Kellyn kaavan johto

Seuraavassa johdetaan Kellyn kaava hieman yleistetyssä tilanteessa, jossa pelin tulosvaihtoehdot ovat $A_1, \ldots, A_n$. Niistä tasan yksi toteutuu, mutta pelaaja voi asettaa panoksensa usealle vaihtoehdolle samanaikaisesti. Tulosvaihtoehtojen indekseinä käytetään kirjaimia i ja j, kirjain k on pelikierroksen indeksi. Samaa peliä ajatellaan toistettavan N kertaa niin, että eri toistokertojen tulokset eivät riipu toisistaan millään tavalla. Tuloksia $A_1, \ldots, A_n$ vastaavat vedonlyöntikertoimet ovat $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, ja pelaajan arvioimat todennäköisyydet eri tuloksille ovat $p_1, \ldots, p_n$. Tällöin

$$p_1 \geq 0, \; \ldots, \; p_n \geq 0, \quad p_1 + \ldots + p_n = 1 .$$

Vedonvälittäjän arvioimat todennäköisyydet sisältyvät kertoimiin λ_i. Viisas välittäjä säätää kertoimen epäyhtälön $q_i\lambda_i < 1$ mukaiseksi, missä välittäjän todennäköisyysarviota tulosvaihtoehdolle A_i on merkitty q_i. Tällöin välittäjä odottaa saavansa $1 - q_i\lambda_i$ euroa jokaista pelaajan tulokselle A_i panostamaa euroa kohti.

Pelaajan kokonaispanos vaihtelee pelimenestyksen mukana kierrokselta toiselle, mutta panos jakautuu kaikilla kierroksilla samalla tavalla eri tulosvaihtoehtojen kesken. Jakautumista kuvataan suhdeluvuilla $\beta_1, \ldots, \beta_n$, joille

$$\beta_1 \geq 0, \; \ldots, \; \beta_n \geq 0, \quad \beta_1 + \ldots + \beta_n = 1 .$$

Jos pelaajan euromääräinen kokonaispanos kierrokselle k on W_{k-1}, tulosvaihtoehdon A_i euromääräinen osuus panoksesta on $\beta_i W_{k-1}$. Panos kannattaa asettaa vain sellaisille tulosvaihtoehdoille, joista on odotettavissa tuottoa, ts. joille $p_i\lambda_i > 1$. Tämän ehdon toteuttavaa vedonlyöntikerrointa sanotaan **ylikertoimeksi**[2]. Järkevä vedonlyöjä asettaa näin ollen sellaiset panokset, että $\beta_i > 0$ vain kun $p_i\lambda_i > 1$.

Pelaaja siis pelaa samaa peliä N kierrosta. Pelaajan pelikassa on alussa B_0 ja kierroksen k jälkeen B_k. Pelaaja panostaa kuhunkin peliin osuuden θ pelikassasta: pelaajan panos peliin k (so. kierrokselle k) on

$$W_{k-1} = \theta B_{k-1} .$$

Jos kierroksella k toteutuu tulos A_i, pelin k jälkeen pelaajan pelikassa on

$$\begin{aligned} B_k &= B_{k-1} - W_{k-1} + \lambda_i\beta_i W_{k-1} \\ &= B_{k-1} - \theta B_{k-1} + \lambda_i\beta_i\theta B_{k-1} \\ &= \big(1 + (\lambda_i\beta_i - 1)\theta\big) B_{k-1} = x_i B_{k-1} . \end{aligned}$$

Kerroin

$$x_i = 1 + (\lambda_i\beta_i - 1)\theta$$

käsitetään satunnaismuuttujan X arvoksi. Pelikassan kehitystä voidaan kuvata prosessina

$$B_N = X_N X_{N-1} \ldots X_2 X_1 B_0,$$

missä $X_1, \ldots, X_N$ on otos satunnaismuuttujasta X, ts. satunnaismuuttujilla X_k, $k = 1, \ldots, N$, on yhteisenä arvojoukkona $\{x_1, \ldots, x_n\}$, ja muuttujat ovat keskenään riippumattomia ja samoin jakautuneita kuin X. Tilanne on samanlainen kuin kappaleessa *Keskimääräinen kasvu.*

Kelly-vedonlyönnissä maksimoidaan keskimääräistä kasvukerrointa $(X_N \ldots X_1)^{1/N}$ ja vieläpä asymptoottisesti eli tilanteessa $N \to \infty$, siis kun pelikierrosten lukumäärä kasvaa rajatta. Satunnaismuuttujien teoriassa summat ja monikerrat ovat helpommin lähestyttäviä kuin tulot ja potenssit. Tämän takia keskimääräisen kasvukertoimen sijaan tarkastellaan sen logaritmia. Logaritmihan on funktio, joka muuttaa tulot summiksi ja potenssit vakiolla kertomisiksi: $\log(uv) = \log u + \log v$ ja $\log\left(u^a\right) = a \log u$. Kantaluvuksi valitaan Neperin luku e, mikä johtaa luonnolliseen logaritmiin $\ln = \log_e$. Keskimääräisen kasvukertoimen logaritmi on

$$\ln\Big((X_N \ldots X_1)^{1/N}\Big) = \frac{1}{N}(\ln X_1 + \ldots + \ln X_N).$$

Yhtälön oikealla puolella on samoin jakautuneiden riippumattomien satunnaismuuttujien $\ln X_k$ aritmeettinen keskiarvo, otos satunnaismuuttujasta $\ln X$. Vahvan suurten lukujen lain nojalla

$$\frac{1}{N}(\ln X_1 + \ldots + \ln X_N) \xrightarrow[N\to\infty]{\text{a.s.}} E[\ln X],$$

ja eksponenttifunktion $\exp(t) = e^t$ jatkuvuuden johdosta

$$(X_N \ldots X_1)^{1/N} \xrightarrow[N\to\infty]{\text{a.s.}} e^{E[\ln X]}.$$

[2]Ehdon $p_i\lambda_i < 1$ toteuttava kerroin λ_i on **alikerroin**. Yhtälön $p_i\lambda_i = 1$ tapauksessa on kysymyksessä **reaalikerroin**. Alikerrointa käyttävä vedonlyöjä haluaa päästä rahoistaan eroon. Reaalikertoimen käyttö on sikäli reilua vedonvälittäjää kohtaan, että tällöin vedonlyöjä ei halua kummankaan osapuolen ajan mittaan häviävän eikä voittavan.

Raja-arvonuolen kummallakin puolella on parametrista θ riippuva lauseke, vaikka θ-riippuvuutta ei olekaan kirjoitettu näkyviin: vasemmalla on pelikassan keskimääräinen kasvukerroin N kierroksella, ja oikealla puolella on kasvukertoimen raja-arvo.

Tehtävänä on maksimoida raja-arvo $e^{E[\ln X]}$ parametrin θ suhteen. Koska eksponenttifunktio on aidosti kasvava, lausekkeella $e^{E[\ln X]}$ on samat maksimikohdat kuin eksponentilla

$$(2) \qquad E[\ln X] = \sum_{i=1}^{n} p_i \ln x_i = \sum_{i=1}^{n} p_i \ln(1+\alpha_i\theta),$$

missä on merkitty lyhyesti

$$\alpha_i = \lambda_i\beta_i - 1.$$

Käytännön kannalta mielenkiintoisissa tilanteissa pätee $0 < \theta < 1$. Tällöin $\alpha_i\theta \geq -\theta > -1$, sillä $\alpha_i \geq -1$. Täten luvut $1 + \alpha_i\theta$ ovat positiivisia, ja logaritmit $\ln(1 + \alpha_i\theta)$ ovat olemassa.

Kun θ lähestyy lukua 1 vasemmalta, lauseke $1+\alpha_i\theta$ lähestyy lauseketta $1+\alpha_i = \lambda_i\beta_i$, $i = 1, \ldots, n$. Tavallisesti vedonlyönnissä ei aseteta panoksia kaikille tulosvaihtoehdoille, jolloin on olemassa indeksi j, jolle $\beta_j = 0$. Tälle indeksille

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 1^-} p_j \ln(1 + \alpha_j\theta) &= \lim_{\theta\to 1^-} p_j \ln\big(1 + (\lambda_j\beta_j - 1)\theta\big)\\ &= \lim_{\theta\to 1^-} p_j \ln(1 - \theta) = -\infty,\end{aligned}$$

sillä todellisille tulosvaihtoehdoille todennäköisyydet ovat positiivisia. Edellisestä johtuen $E[\ln X] \to -\infty$, kun $\theta \to 1^-$. Toisaalta $E[\ln X] \to 0$, kun $\theta \to 0^+$. Derivoimalla parametrin θ suhteen saadaan

$$\frac{d}{d\theta} E[\ln X] = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i\alpha_i}{1 + \alpha_i\theta}.$$

Oikeanpuoleinen lauseke esittää muuttujan θ jatkuvaa funktiota, joka saa positiivisen arvon kohdassa $\theta = 0$ kuten kohta osoitetaan, joten $E[\ln X]$ on muuttujan θ kasvava funktio eräällä välillä $]0, \varepsilon[$, missä $\varepsilon > 0$. Näistä havainnoista päätellään, että odotusarvo $E[\ln X]$ saavuttaa suurimman arvonsa jollakin avoimeen väliin $]0, 1[$ kuuluvalla muuttujan θ arvolla, ja tuo suurin arvo on positiivinen.

Odotusarvon derivaatan lausekkeen positiivisuus arvolla $\theta = 0$ johtuu siitä, että panos kannattaa asettaa vain ylikertoimen omaaville tulosvaihtoehdoille, joille siis $p_i\lambda_i > 1$. Järkevä vedonlyöjä asettaa näin ollen sellaiset panokset, että $\beta_i > 0$ vain kun $p_i\lambda_i > 1$. Muuttujan θ arvolla nolla saadaan silloin

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i\alpha_i}{1 + \alpha_i\theta} &= \sum_{i=1}^{n} p_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} p_i(\lambda_i\beta_i - 1)\\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i\lambda_i\beta_i - \sum_{i=1}^{n} p_i\\ &= \sum_{\beta_i>0} p_i\lambda_i\beta_i - 1\\ &> \sum_{\beta_i>0} \beta_i - 1 = 1 - 1 = 0.\end{aligned}$$

▼ Välitilinpäätös

Kun kokonaispanoksen suhde pelikassaan on jokaisella pelikierroksella θ, ja pelikassan kasvukerroin yhdellä kierroksella on satunnaismuuttuja X, pelikassan keskimääräisellä kasvukertoimella on lauseke $e^{E[\ln X]}$. Kasvu ja täten keskimääräinen kasvukin ovat parametrin θ funktioita. Arvolla $\theta = 0$ peliin ei panosteta, joten kassa säilyy muuttumattomana. Tällöin kasvukertoimilla on arvo 1. Järkevillä ehdoilla keskimääräinen kasvukerroin nollautuu, kun $\theta = 1$ eli panoksena käytetään koko pelikassaa. Maksimaalinen keskimääräinen kasvu saavutetaan eräällä avoimeen väliin $]0, 1[$ kuuluvalla parametrin θ arvolla. Maksimikohdassa keskimääräinen kasvukerroin on suurempi kuin 1. ▲

Vielä pitää löytää maksimaalisen kasvun antava arvo parametrille θ. Odotusarvon $E[\ln X]$ suurin arvo saavutetaan sellaisella parametrin θ arvolla, jolla odotusarvon derivaatta häviää. Pitää siis ratkaista θ yhtälöstä

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i\alpha_i}{1 + \alpha_i\theta} = 0.$$

Laventamalla murtolausekkeet samannimisiksi saadaan astetta $n - 1$ oleva polynomiyhtälö. Se on yleensä ratkaistava numeerisesti, sillä tapauksessa $n \geq 6$ ei ole käytettävissä yleistä ratkaisukaavaa, ja tapauksissa $n = 4$ ja $n = 5$ ratkaisukaavan käyttö on turhan hankalaa.

Jos pelaaja lyö vetoa tasan yhden lopputuloksen puolesta, tilanne helpottuu oleellisesti. Asettakoon pelaaja koko panoksen tulosvaihtoehdon A_j puolesta. Tällöin $\beta_j = 1$ ja $\beta_i = 0$, kun $i \neq j$. Siis $\alpha_j = \lambda_j - 1$ ja $\alpha_i = -1$, kun $i \neq j$. Koska $p_1 + \ldots + p_n = 1$, pätee

$$\sum_{i\neq j} p_i = 1 - p_j\,.$$

Kaavaan (2) sijoittamalla saadaan

$$E[\ln X] = (1 - p_j) \ln(1 - \theta) + p_j \ln(1 + (\lambda_j - 1)\theta).$$

Derivaatta muuttujan θ suhteen on

$$\frac{d}{d\theta} E[\ln X] = \frac{p_j - 1}{1 - \theta} + \frac{p_j(\lambda_j - 1)}{1 + (\lambda_j - 1)\theta}.$$

Yhtälöllä

$$\frac{d}{d\theta} E[\ln X] = 0$$

on yksikäsitteinen ratkaisu

$$\theta = \frac{p_j \lambda_j - 1}{\lambda_j - 1}.$$

Tämä on oleellisesti sama kaava kuin (1), siis Kellyn kaava.

Lopuksi

Kellyn kaavaa (1) käytettäessä kannattaa kiinnittää huomiota kahteen seikkaan:

1. Todennäköisyys p on vedonlyöjän itsensä (tai luotettavalta kaverilta saatu) arvio. On inhimillistä, että voiton todennäköisyyttä yliarvioidaan ja sen seurauksena käytetään liian suurta panosta.

2. Kellyn kaavan mukaisen panoksen käyttäminen ei sulje pois sitä mahdollisuutta, että pelaaja heti aluksi ajautuu pitkään tappioputkeen ja näin menettää huomattavan osan pelikassastaan.

Mainituista syistä johtuen vetoa lyödään yleensä pienemmällä panoksella kuin mitä Kellyn kaava suosittelee. On tapana soveltaa Kellyn kaavaa hieman muunnettuna muodossa

$$\theta = \frac{1}{d}\,\frac{p\lambda - 1}{\lambda - 1}.$$

Vakiota d kutsutaan **Kellyn jakajaksi**. Kukin pelaaja säätää jakajan d omaan riskinottohaluunsa sopivaksi. Tyypillinen pelurien käyttämä arvo on $d = 2$. Ohjelmoinnista kiinnostunut lukija kirjoittaa vaivatta vedonlyöntisimulaattorin, jonka avulla Kellyn jakajan vaikutusta pelikassan kokoon ja koon vaihteluun voidaan tutkia.

Pelikassan kehitystä simuloitiin Python-ohjelmalla käyttäen muutamaa erisuurta Kellyn jakajan arvoa. Kullakin simulointikierroksella vedonlyöntiä jatkettiin kunnes pelikassa oli joko puolittunut tai kaksinkertaistunut sen mukaan, kumpi sattui tapahtumaan ensin. Simulointikierroksia oli kaikkiaan 1 000 000 kappaletta. Näin saatiin melko luotettava likiarvo *puolittumistodennäköisyydelle*, so. sen tapahtuman todennäköisyydelle, että pelikassa puolittuu ensin ja mahdollisesti kaksinkertaistuu vasta sen jälkeen. Vedonlyöntikertoimen arvona oli $\lambda = 2$, ja voiton todennäköisyydeksi asetettiin $p = 0{,}6$. Seuraavaan taulukkoon on koottu simulaation tulokset. Puolittumisaika tarkoittaa pelikassan puolittumiseen johtaneiden pelikierrosten lukumäärää. Vastaavasti tuplaantumisaika tarkoittaa pelikassan kaksinkertaistumiseen johtaneiden pelikierrosten lukumäärää.

Kellyn jakaja	Puolittumis-todennäköisyys	Keskimääräinen puolittumisaika	Keskimääräinen tuplaantumisaika
$d = 1$	0,31	14	15
$d = 2$	0,094	40	40
$d = 4$	0,0061	80	81
$d = 6$	0,00037	117	116
$d = 8$	0,000024	139	150

Taulukosta havaitaan, että pelikassan hiipumisen riskiä voidaan pienentää isontamalla Kellyn jakajaa, mutta silloin pitää joko lyödä enemmän vetoja tai tyytyä pienempään tuottoon.