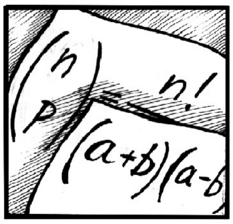

Muirheadin epäyhtälö

Esa V. Vesalainen
Matematik och statistik, Åbo Akademi

Kerromme tässä artikkelissa Muirheadin epäyhtälöstä. Se on tehokas työkalu tietynlaisten symmetristen epäyhtälöiden todistamiseen. Keskitymme vain esimerkkeihin ja ongelmiin, joissa Muirheadin epäyhtälö on yksinään riittävä. Esitämme myös täyden todistuksen sille. Jotkin vastaan tulevat kohdat ovat huomattavan mutkikkaita, ja halutessaan lukijan kannattaakin hypätä hankalien kohtien yli.

Hieman merkintöjä esimerkein

Jatkossa n tulee yleensä olemaan positiivinen kokonaisluku, joka kertoo muuttujien lukumäärän todistettavissa epäyhtälöissä. Nämä n muuttujaa tulevat usein olemaan x_1, x_2, …, x_n, joiden oletetaan olevan epänegatiivisia reaalilukuja. Vaihtelun vuoksi saatamme käyttää muuttujia a ja b, kun $n = 2$, tai x, y ja z, kun $n = 3$, ja niin edelleen.

Tulemme tarkastelemaan lausekkeita, joissa esiintyy näiden muuttujien potenssien tuloja. Merkitsemme eksponenttien jonoja ja niiden elementtejä pienillä kreikkalaisilla kirjaimilla

$$\alpha = \langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \rangle \quad \text{ja} \quad \beta = \langle \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \rangle\,,$$

ja niin pois päin. Kaikissa tilanteissamme nämä luvut α_1, …, α_n, β_1, …, β_n tulevat olemaan epänegatiivisia reaalilukuja, joille pätee $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$ ja $\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant \beta_n$.

Koska olemme kiinnostuneita symmetrisistä lausekkeista, otamme käyttöön epäyhtälökirjallisuudessa yleisen symbolin $\sum_{\text{sym}}$. Erityisesti,

$$\sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

tarkoittaa summaa kaikista termeistä, jotka saadaan, kun annetaan muuttujien x_1, x_2, …, x_n vaihtaa tai olla vaihtamatta paikkoja keskenään kaikin mahdollisin tavoin. Koska näitä eri tapoja on tunnetusti aina $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ kappaletta, on siis summassa aina $2! = 2$ termiä kahden muuttujan tapauksessa, $3! = 6$ termiä kolmen muuttujan tapauksessa, $4! = 24$ termiä neljän muuttujan tapauksessa, ja niin edelleen.

Esimerkiksi, kun $n = 2$ ja muuttujat ovat x_1 ja x_2, ovat eksponenttijonoja $\langle 2, 1 \rangle$ ja $\langle 1, 0 \rangle$ vastaavat symmetriset summat

$$\sum_{\text{sym}} x_1^2\, x_2 = x_1^2\, x_2 + x_2^2\, x_1 \quad \text{ja} \quad \sum_{\text{sym}} x_1 = x_1 + x_2.$$

Samoin, jos reaalimuuttujinamme ovat vaikkapa a ja b, niin on

$$\sum_{\text{sym}} a^2\, b = a^2\, b + a\, b^2 \quad \text{ja} \quad \sum_{\text{sym}} a = a + b.$$

Kun $n = 3$ ja reaalimuuttujamme ovat x_1, x_2 ja x_3, on eksponenttijonoa $\langle 3,2,1\rangle$ vastaava summa

$$\sum_{\mathrm{sym}} x_1^3\,x_2^2\,x_3 = x_1^3\,x_2^2\,x_3 + x_1^3\,x_3^2\,x_2 + x_2^3\,x_1^2\,x_3 + x_2^3\,x_3^2\,x_1 + x_3^3\,x_1^2\,x_2 + x_3^3\,x_2^2\,x_1,$$

ja eksponenttijonoa $\langle 4,0,0\rangle$ vastaava

$$\begin{aligned}\sum_{\mathrm{sym}} x_1^4 &= \sum_{\mathrm{sym}} x_1^4\,x_2^0\,x_3^0 \\ &= x_1^4\,x_2^0\,x_3^0 + x_1^4\,x_3^0\,x_2^0 + x_2^4\,x_1^0\,x_3^0 \\ &\quad + x_2^4\,x_3^0\,x_1^0 + x_3^4\,x_1^0\,x_2^0 + x_3^4\,x_2^0\,x_1^0 \\ &= 2\,x_1^4 + 2\,x_2^4 + 2\,x_3^4.\end{aligned}$$

Jos reaalimuuttujamme olisivat vaikkapa a, b ja c, niin olisi

$$\sum_{\mathrm{sym}} a^2\,b = a^2\,b + a^2\,c + b^2\,a + b^2\,c + c^2\,a + c^2\,b,$$

ja jos reaalimuuttujamme sattuisivat olemaan x, y ja z, olisi

$$\sum_{\mathrm{sym}} x^4 = 2\left(x^4 + y^4 + z^4\right) \quad \text{ja} \quad \sum_{\mathrm{sym}} xyz = 6xyz.$$

Samassa hengessä pätee yleisesti

$$\sum_{\mathrm{sym}} x_1\,x_2 \cdots x_n = n!\,x_1\,x_2 \cdots x_n,$$

sillä kaikki $n!$ eri tapaa järjestellä muuttujia x_1, x_2, $\ldots$, x_n keskenään johtavat aina samaan termiin, joka on muuttujien tulo. Samoin,

$$\sum_{\mathrm{sym}} x_1^5 = (n-1)!\left(x_1^5 + x_2^5 + \ldots + x_n^5\right),$$

sillä esiintyyhän esimerkiksi termi x_1^5 summassa niin monta kertaa kuin miten monella tavalla muuttujia x_2, $x_3, \ldots, x_n$ voi järjestellä keskenään, eli $(n-1)!$ kertaa.

Hieman mutkikkaampi esimerkki olisi eksponenttijonoa $\langle 1,1,\ldots,1,0,0,\ldots,0\rangle$, missä 1 esiintyy k kertaa ja 0 siten $n-k$ kertaa jollakin $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$, vastaava symmetrinen summa

$$\sum_{\mathrm{sym}} x_1\,x_2 \cdots x_k = k!\,(n-k)! \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n} x_{i_1}\,x_{i_2} \cdots x_{i_k},$$

missä viimeisessä summassa otetaan summa niiden kokonaislukujen jonojen $\langle i_1, i_2, \ldots, i_k\rangle$ yli, joille pätevät epäyhtälöt $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$. Toisin sanoen, viimeisessä summassa otetaan kaikki k eri muuttujan tulot muuttujista x_1, x_2, $\ldots$, x_n, ja lasketaan ne yhteen. Termejä summassa on binomikertoimen $\binom{n}{k}$ osoittama määrä.

Mitä tavoittelemmekaan tässä?

Olemme kiinnostuneita siitä, mitä epänegatiivisten reaalilukujen eksponenttijonoilta $\alpha = \langle \alpha_1,\ldots,\alpha_n\rangle$ ja $\beta = \langle \beta_1,\ldots,\beta_n\rangle$, missä n on positiivinen kokonaisluku, pitääkään vaatia, että olisi

$$\sum_{\mathrm{sym}} x_1^{\alpha_1}\,x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \geqslant \sum_{\mathrm{sym}} x_1^{\beta_1}\,x_2^{\beta_2} \cdots x_n^{\beta_n}$$

kaikilla epänegatiivisilla reaaliluvuilla x_1, x_2, $\ldots$, x_n?

Olettakaamme, että eksponenttijonot α ja β ovat tällaisia, ja tarkastellaan, mitä tästä seuraa. Koska eksponenttien α_1, $\ldots$, α_n permutointi ei vaikuta mitenkään vasemman puolen arvoon, voimme huoletta olettaa, että luvut ovat vähenevässä järjestyksessä. Sama pätee eksponentteihin β_1, $\ldots$, β_n, eli voimme olettaa, että

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n \quad \text{ja} \quad \beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant \beta_n.$$

Olkoon x jokin positiivinen reaaliluku, ja katsotaan, mitä oletettu epäyhtälö sanoo, kun

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x.$$

Vasemmalla puolella summan jokainen termi on suuruudeltaan $x^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}$, ja oikealla puolella jokainen termi on $x^{\beta_1+\ldots+\beta_n}$. Siispä oletettu epäyhtälö on tässä erikoistapauksessa

$$n!\,x^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} \geqslant n!\,x^{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n}.$$

Kun $x \longrightarrow \infty$, on luonnollisesti oltava

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \geqslant \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n,$$

jotta tämä epäyhtälö pätisi. Samoin, kun $x \longrightarrow 0+$, on oltava

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \leqslant \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n.$$

Yhdessä näistä seuraa, että on oltava

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n.$$

Hyvä, olkoon seuraavaksi $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$, ja tarkastelkaamme hieman monimutkaisempaa erikoistapausta, jossa

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_k = x$$

ja

$$x_{k+1} = x_{k+2} = \ldots = x_n = 1,$$

jolloin epäyhtälön molemmilla puolilla jokainen termi on muuttujan x potenssi. Vasemmalla puolella korkein esiintyvä potenssi on $x^{\alpha_1+\ldots+\alpha_k}$ ja oikealla puolella

$x^{\beta_1+\ldots+\beta_k}$. Täten päädymme siihen, että jotta epäyhtälö voisi päteä, kun $x \longrightarrow \infty$, on oltava

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k \geqslant \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_k.$$

Kaiken kaikkiaan olemme nyt päätyneet sellaisiin vaatimuksiin, että

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n,$$

ja

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\geqslant \beta_1, \\ \alpha_1 + \alpha_2 &\geqslant \beta_1 + \beta_2, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &\geqslant \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \\ &\vdots \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} &\geqslant \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{n-1}. \end{aligned}$$

Näiden kaikkien vaatimusten vallitessa merkitsemme $\alpha \succcurlyeq \beta$, ja sanomme, että jono α majorisoi jonoa β. Jos lisäksi $\alpha \neq \beta$, eli $\alpha_\ell \neq \beta_\ell$ ainakin yhdellä $\ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$, niin merkitsemme $\alpha \succ \beta$. On hyvin tärkeää pitää mielessä, että yllä luetellut ehdot majorisoinnille $\alpha \succcurlyeq \beta$ ovat mielekkäitä näin kirjoitettuina vain silloin, kun kummassakin jonoista α ja β luvut ovat vähenevässä järjestyksessä.

Esimerkki 1. *Päteekö kaikille positiivisille reaaliluvuille a, b ja c epäyhtälö*

$$\begin{aligned} &a^{1/2}\, b^{1/2} + b^{1/2}\, c^{1/2} + c^{1/2}\, a^{1/2} \\ &\quad \geqslant a^{3/5}\, b^{1/5}\, c^{1/5} + a^{1/5}\, b^{3/5}\, c^{1/5} + a^{1/5}\, b^{1/5}\, c^{3/5}? \end{aligned}$$

Entä päteekö epäyhtälö jos $\geqslant$-merkin vaihtaa $\leqslant$-merkiksi?

Ratkaisu. Vasen puoli on

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{sym}} a^{1/2}\, b^{1/2} \quad \text{ja oikea} \quad \frac{1}{2}\sum_{\text{sym}} a^{3/5}\, b^{1/5}\, c^{1/5}.$$

Kumpikaan ehdotettu epäyhtälö ei päde, sillä

$$\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right\rangle \not\succcurlyeq \left\langle \frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right\rangle \text{ ja } \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right\rangle \not\preccurlyeq \left\langle \frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right\rangle,$$

edellinen siksi, että $1/2 \not\geqslant 3/5$ ja jälkimmäinen siksi, että

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \not\geqslant 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2},$$

muistaen, että molemmissa eksponenttien jonoissa luvut ovat vähenevässä järjestyksessä. Luonnollisesti voimme osoittaa epäyhtälöt mahdottomiksi konkreettisestikin. Nimittäin, jos epäyhtälö pätisi $\geqslant$-merkillä, niin valittaessa $a = x$ ja $b = c = 1$ mielivaltaisella positiivisella reaaliluvulla x, olisi oltava

$$2\, x^{1/2} + 1 \geqslant x^{3/5} + 2\, x^{1/5},$$

mutta selvästi oikea puoli kasvaisi nopeammin, kun $x \longrightarrow \infty$, eli tämä on mahdotonta. Esimerkiksi, kun $x = 1024$, on

$$2\, x^{1/2} + 1 = 65 \not\geqslant 72 = x^{3/5} + 2\, x^{1/5}.$$

Samoin, jos epäyhtälö pätisi $\leqslant$-merkillä, olisi valittaessa $a = b = x$ ja $c = 1$ oltava

$$x + 2\, x^{1/2} \leqslant 2\, x^{4/5} + x^{2/5},$$

mistä jälleen seuraa ristiriita, kun $x \longrightarrow \infty$. Esimerkiksi, kun $x = 1024$, on

$$x + 2\, x^{1/2} = 1088 \not\leqslant 528 = 2\, x^{4/5} + x^{2/5}. \qquad \square$$

Muirheadin epäyhtälö

Yllä tarkastelimme välttämättömiä ehtoja sille, että

$$\sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \geqslant \sum_{\text{sym}} x_1^{\beta_1}\, x_2^{\beta_2} \cdots x_n^{\beta_n}$$

kaikilla epänegatiivisilla reaaliluvuilla x_1, x_2, $\ldots$, x_n, ja totesimme, että on pädettävä $\alpha \succcurlyeq \beta$ sen jälkeen kun jonojen α ja β luvut on uudelleenjärjestetty vähenevään järjestykseen. Muirheadin epäyhtälön sisältö on nyt siinä, että paitsi, että $\alpha \succcurlyeq \beta$ on välttämätön kokoelma ehtoja alkuperäisen epäyhtälön paikkansapitävyydelle, se on myös riittävä kokoelma ehtoja!

Lause 2 (Muirheadin epäyhtälö)**.** *Olkoon n positiivinen kokonaisluku, ja olkoot α ja β epänegatiivisten reaalilukujen jonoja, joissa on kummassakin n lukua vähenevässä järjestyksessä, ja joille $\alpha \succcurlyeq \beta$. Tällöin*

$$\sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \geqslant \sum_{\text{sym}} x_1^{\beta_1}\, x_2^{\beta_2} \cdots x_n^{\beta_n}$$

kaikille epänegatiivisille reaaliluvuille x_1, x_2, $\ldots$, x_n.

Lisäksi positiivisilla reaaliluvuilla x_1, x_2, $\ldots$, x_n epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus vain ja ainoastaan silloin, kun $\alpha = \beta$ tai $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Tämän todistus on varsin monimutkainen ja senpä vuoksi ensin tutustummekin joukkoon esimerkkejä epäyhtälön käytöstä palaten todistukseen vasta myöhemmin artikkelissa.

Esimerkkejä Muirheadin epäyhtälön käytöstä

Esimerkki 3. *Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että*

$$a^4 + b^4 + c^4 \geqslant abc\,(a + b + c)\,.$$

Ratkaisu. Ensinnäkin pätee $\langle 4,0,0\rangle \succ \langle 2,1,1\rangle$, sillä

$$4 \geqslant 0 \geqslant 0, \qquad 2 \geqslant 1 \geqslant 1,$$

sekä

$$4+0+0=4=2+1+1, \qquad 4 \geqslant 2,$$

ja

$$4+0=4 \geqslant 3=2+1.$$

Täten Muirheadin epäyhtälön nojalla

$$\sum_{\text{sym}} a^4 \geqslant \sum_{\text{sym}} a^2\, bc,$$

eli

$$2\left(a^4+b^4+c^4\right) \geqslant 2\left(a^2\, bc + a\, b^2\, c + ab\, c^2\right),$$

mistä pienellä sievennyksellä seuraa toivottu

$$a^4+b^4+c^4 \geqslant abc\,(a+b+c)\,. \qquad \square$$

Esimerkki 4. *Olkoon n positiivinen kokonaisluku, ja olkoot a_1, a_2, …, a_n epänegatiivisia reaalilukuja. Osoita, että*

$$a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n \geqslant n\, a_1\, a_2 \cdots a_n.$$

Jos $n \in \mathbb{Z}_+$ ja jos x_1, x_2, …, x_n ovat epänegatiivisia reaalilukuja, niin sijoittamalla esimerkin epäyhtälöön

$$a_1 = x_1^{1/n}, \quad a_2 = x_2^{1/n}, \quad \ldots, \quad a_n = x_n^{1/n},$$

saamme välittömästi tutun epäyhtälön

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1\, x_2 \cdots x_n}.$$

Esimerkin 4 epäyhtälö on täten itse asiassa aritmeettis-geometrinen epäyhtälö, joka siis seuraa mukavasti Muirheadin epäyhtälöstä.

Esimerkin 4 epäyhtälön todistus. Todetaan ensin, että $\langle n,0,\ldots,0\rangle \succcurlyeq \langle 1,1,\ldots,1\rangle$, missä siis kummallakin puolella esiintyy n lukua. Luonnollisesti

$$n \geqslant 0 \geqslant 0 \geqslant \ldots \geqslant 0 \qquad \text{ja} \qquad 1 \geqslant 1 \geqslant 1 \geqslant \ldots \geqslant 1,$$

ja

$$n+0+0+\ldots+0 = n = 1+1+1+\ldots+1,$$

sekä lisäksi

$$\begin{gathered} n \geqslant 1, \\ n+0 = n \geqslant 2 = 1+1, \\ n+0+0 = n \geqslant 3 = 1+1+1, \\ \vdots \\ n+\underbrace{0+0+\ldots+0}_{(n-1)\times 0} = n \geqslant n = \underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n\times 1}. \end{gathered}$$

Nyt Muirheadin epäyhtälön nojalla

$$\sum_{\text{sym}} a_1^n \geqslant \sum_{\text{sym}} a_1\, a_2 \cdots a_n,$$

eli

$$(n-1)!\,(a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n) \geqslant n!\, a_1\, a_2 \cdots a_n,$$

mistä väite seuraakin jakamalla puolittain kertomalla $(n-1)!$. $\square$

Esimerkki 5. *Olkoon n positiivinen kokonaisluku, ja olkoot a_1, a_2, …, a_n positiivisia reaalilukuja. Jokaiselle $\nu \in \{1,2,\ldots,n\}$ määritellään*

$$P_\nu = \frac{1}{\binom{n}{\nu}} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_\nu \leqslant n} \sqrt[\nu]{a_{i_1}\, a_{i_2} \cdots a_{i_\nu}},$$

missä siis otetaan summa kaikkien kokonaislukujonojen $\langle i_1, i_2, \ldots, i_\nu\rangle$ yli, joille $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_\nu \leqslant n$. Osoita, että

$$P_1 \geqslant P_2 \geqslant P_3 \geqslant \ldots \geqslant P_n.$$

Ratkaisu. Asian ydin on siinä, että

$$\begin{aligned} \langle 1,0,0,\ldots,0\rangle &\succ \left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,\ldots 0\right\rangle \\ &\succ \left\langle \frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},0,0,\ldots,0\right\rangle \\ &\succ \ldots \\ &\succ \left\langle \frac{1}{n-1},\frac{1}{n-1},\ldots,\frac{1}{n-1},0\right\rangle \\ &\succ \left\langle \frac{1}{n},\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}\right\rangle. \end{aligned}$$

Ei ole vaikea vakuuttua siitä, että jokaisessa näistä n reaaliluvun jonoista esiintyy vain epänegatiivisia reaalilukuja vähenevässä järjestyksessä, ja siitä, että jokaisessa jonossa lukujen summa on täsmälleen 1. Tarkistaaksemme osasummiin liittyvät majorisoinnin vaatimat ehdot, olkoon $\nu \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ ja tarkastellaan eksponenttijonoja

$$\langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\rangle = \Bigg\langle \underbrace{\frac{1}{\nu},\frac{1}{\nu},\ldots,\frac{1}{\nu}}_{\nu\times\frac{1}{\nu}}, \underbrace{0,0,\ldots,0}_{(n-\nu)\times 0}\Bigg\rangle$$

ja

$$\begin{aligned} &\langle \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\rangle \\ &\qquad = \Bigg\langle \underbrace{\frac{1}{\nu+1},\frac{1}{\nu+1},\ldots,\frac{1}{\nu+1}}_{(\nu+1)\times\frac{1}{\nu+1}}, \underbrace{0,0,\ldots,0}_{(n-\nu-1)\times 0}\Bigg\rangle. \end{aligned}$$

Olkoon nyt $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$. Meidän pitäisi osoittaa, että

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \geqslant \sum_{i=1}^k \beta_i.$$

Kun $k \leqslant \nu$, tämä pätee, koska silloin

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \frac{k}{\nu} \geqslant \frac{k}{\nu+1} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i.$$

Kun $k \geqslant \nu + 1$, tämä pätee sen vuoksi, että silloin

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i = \sum_{i=1}^{k} \beta_i.$$

Siten voimme käyttää Muirheadin epäyhtälöä, ja näemme, että

$$\sum_{\text{sym}} a_1^{1/\nu} a_2^{1/\nu} \cdots a_\nu^{1/\nu} \geqslant \sum_{\text{sym}} a_1^{1/(\nu+1)} a_2^{1/(\nu+1)} \cdots a_{\nu+1}^{1/(\nu+1)},$$

eli

$$\begin{aligned} &\nu! \cdot (n-\nu)! \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_\nu \leqslant n} \sqrt[\nu]{a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_\nu}} \\ &\geqslant (\nu+1)! \, (n-\nu-1)! \\ &\quad \cdot \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_{\nu+1} \leqslant n} \sqrt[\nu+1]{a_{j_1} a_{j_2} \cdots a_{j_{\nu+1}}}, \end{aligned}$$

mistä väite seuraa jakamalla puolittain kertomalla $n!$. □

Esimerkki 6. *Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja, joille $abc = 1$. Osoita, että*

$$\frac{a+b}{1+c} + \frac{b+c}{1+a} + \frac{c+a}{1+b} \geqslant 3.$$

Ratkaisu. Aloittakaamme kertomalla puolittain tulolla $(1+a)(1+b)(1+c)$, jolloin todistettava epäyhtälö muuttuu muotoon

$$\begin{aligned} &(a+b)(1+a)(1+b) + (b+c)(1+b)(1+c) \\ &\qquad + (c+a)(1+c)(1+a) \\ &\qquad\qquad \geqslant 3(1+a)(1+b)(1+c). \end{aligned}$$

Kertomalla kaiken auki ja tekemällä ilmeiset sievennykset tämä muuttuu muotoon

$$\begin{aligned} &2\left(a^2+b^2+c^2\right) \\ &\quad + \left(a^2 b + a^2 c + a b^2 + b^2 c + a c^2 + b c^2\right) \\ &\qquad \geqslant 3 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + 3abc. \end{aligned}$$

Kertomalla jokaisessa termissä sopivalla tulon $abc = 1$ potenssilla niin, että kaikkien termien asteiksi tulee 3, voimme kirjoittaa tämän vielä suoraviivaisemmassa muodossa

$$\begin{aligned} &\sum_{\text{sym}} a^{7/3} b^{1/3} c^{1/3} + \sum_{\text{sym}} a^2 b \\ &\quad \geqslant \frac{1}{2} \sum_{\text{sym}} a^{5/3} b^{2/3} c^{2/3} + \frac{1}{2} \sum_{\text{sym}} a^{4/3} b^{4/3} c^{1/3} \\ &\qquad + \sum_{\text{sym}} abc. \end{aligned}$$

Nyt, jos asiaintila sattuu olemaan sellainen, että

$$\langle 2,1,0 \rangle \succ \left\langle \frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle, \quad \text{ja} \quad \langle 2,1,0 \rangle \succ \left\langle \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle,$$

sekä

$$\left\langle \frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle \succ \langle 1,1,1 \rangle,$$

niin saamme Muirheadin epäyhtälöstä arviot

$$\sum_{\text{sym}} a^2 b \geqslant \frac{1}{2} \sum_{\text{sym}} a^{5/3} b^{2/3} c^{2/3} + \frac{1}{2} \sum_{\text{sym}} a^{4/3} b^{4/3} c^{1/3}$$

ja

$$\sum_{\text{sym}} a^{7/3} b^{1/3} c^{1/3} \geqslant \sum_{\text{sym}} abc,$$

joiden summa olisi toivottu epäyhtälö. Mutta asiaintila on toivotunlainen, sillä onhan

$$2 \geqslant 1 \geqslant 0, \quad \frac{5}{3} \geqslant \frac{2}{3} \geqslant \frac{2}{3},$$

$$\frac{4}{3} \geqslant \frac{4}{3} \geqslant \frac{1}{3}, \quad \frac{7}{3} \geqslant \frac{1}{3} \geqslant \frac{1}{3}, \quad \text{ja} \quad 1 \geqslant 1 \geqslant 1,$$

sekä

$$\begin{aligned} 2+1+0 &= \frac{5}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{7}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1+1+1 = 3, \end{aligned}$$

sekä vielä

$$2 \geqslant \frac{5}{3}, \quad 2+1 = 3 \geqslant \frac{7}{3} = \frac{5}{3} + \frac{2}{3},$$

ja

$$2 \geqslant \frac{4}{3}, \quad 2+1 = 3 \geqslant \frac{8}{3} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3},$$

ja vielä

$$\frac{7}{3} \geqslant 1, \quad \text{ja} \quad \frac{7}{3} + \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \geqslant 2 = 1 + 1.$$ □

Esimerkki 7. *Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja, joille $abc = 1$. Osoita, että*

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geqslant \frac{3}{4}.$$

Ratkaisu. Kertomalla epäyhtälö puolittain ilmeisellä tulolla $4(1+a)(1+b)(1+c)$ se saa muodon

$$\begin{aligned} &4a^3(1+a) + 4b^3(1+b) + 4c^3(1+c) \\ &\qquad \geqslant 3(1+a)(1+b)(1+c), \end{aligned}$$

mikä kertomalla kaiken auki muuttuu muotoon

$$\begin{aligned} &4\left(a^4+b^4+c^4\right) + 4\left(a^3+b^3+c^3\right) \\ &\qquad \geqslant 3 + 3(a+b+c) + 3(ab+bc+ca) + 3abc, \end{aligned}$$

missä kertomalla termejä sopivilla tulon $abc = 1$ potensseilla niin, että kaikki termit ovat samaa astetta 4, voimme kirjoittaa tämän muodossa

$$\begin{aligned} &4\left(a^4+b^4+c^4\right) \\ &+4\left(a^{10/3}\,b^{1/3}\,c^{1/3}+a^{1/3}\,b^{10/3}\,c^{1/3}+a^{1/3}\,b^{1/3}\,c^{10/3}\right) \\ &\qquad \geqslant 3\left(a^2\,bc+a\,b^2\,c+ab\,c^2\right)+6\,a^{4/3}\,b^{4/3}\,c^{4/3} \\ &+3\left(a^{5/3}\,b^{5/3}\,c^{2/3}+a^{5/3}\,b^{2/3}\,c^{5/3}+a^{2/3}\,b^{5/3}\,c^{5/3}\right), \end{aligned}$$

tai vielä yksinkertaisemmin muodossa

$$\begin{aligned} &2\sum_{\text{sym}} a^4+2\sum_{\text{sym}} a^{10/3}\,b^{1/3}\,c^{1/3} \\ &\geqslant \frac{3}{2}\sum_{\text{sym}} a^2\,bc+\sum_{\text{sym}} a^{4/3}\,b^{4/3}\,c^{4/3}+\frac{3}{2}\sum_{\text{sym}} a^{5/3}\,b^{5/3}\,c^{2/3}. \end{aligned}$$

Tämä puolestaan seuraa Muirheadin epäyhtälöstä, jos vain sattuu olemaan

$$\left\langle \frac{10}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right\rangle \succ \left\langle \frac{5}{3},\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right\rangle \succ \left\langle \frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right\rangle$$

ja

$$\langle 4,0,0\rangle \succ \langle 2,1,1\rangle \succ \left\langle \frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right\rangle,$$

koska silloin voimme arvioida

$$\begin{aligned} &2\sum_{\text{sym}} a^{10/3}\,b^{1/3}\,c^{1/3} \\ &\qquad \geqslant \frac{3}{2}\sum_{\text{sym}} a^{5/3}\,b^{5/3}\,c^{2/3}+\frac{1}{2}\sum_{\text{sym}} a^{4/3}\,b^{4/3}\,c^{4/3}, \end{aligned}$$

ja

$$2\sum_{\text{sym}} a^4 \geqslant \frac{3}{2}\sum_{\text{sym}} a^2\,bc+\frac{1}{2}\sum_{\text{sym}} a^{4/3}\,b^{4/3}\,c^{4/3}.$$

Mutta yllä mainitut pätevät, sillä onhan

$$\frac{10}{3}\geqslant\frac{1}{3}\geqslant\frac{1}{3},\quad \frac{5}{3}\geqslant\frac{5}{3}\geqslant\frac{2}{3},$$

$$\frac{4}{3}\geqslant\frac{4}{3}\geqslant\frac{4}{3},\quad 4\geqslant 0\geqslant 0,\quad \text{ja}\quad 2\geqslant 1\geqslant 1,$$

ja

$$\begin{aligned} \frac{10}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{5}{3}+\frac{5}{3}+\frac{2}{3}&=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3} \\ &=4+0+0=2+1+1=4, \end{aligned}$$

ja vielä

$$\frac{10}{3}\geqslant\frac{5}{3}\geqslant\frac{4}{3},$$

ja

$$\frac{10}{3}+\frac{1}{3}=\frac{11}{3}\geqslant\frac{10}{3}=\frac{5}{3}+\frac{5}{3}=\frac{10}{3}\geqslant\frac{8}{3}=\frac{4}{3}+\frac{4}{3},$$

samoin kuin

$$4\geqslant 2=\frac{6}{3}\geqslant\frac{4}{3},$$

sekä

$$4+0=4\geqslant 3=2+1=\frac{9}{3}\geqslant\frac{8}{3}=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}. \qquad \square$$

Esimerkki 8. *Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja, joille $abc = 1$. Todista, että*

$$\frac{1}{a^3\,(b+c)}+\frac{1}{b^3\,(c+a)}+\frac{1}{c^3\,(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Ratkaisu. Kertomalla puolittain tulolla

$$2\,a^3\,b^3\,c^3\,(a+b)\,(b+c)\,(c+a)$$

saamme todistettavalle epäyhtälölle ekvivalentin muodon

$$\begin{aligned} &2\,a^3\,b^3\,(b+c)\,(c+a)+2\,b^3\,c^3\,(c+a)\,(a+b) \\ &\qquad +2\,c^3\,a^3\,(a+b)\,(b+c) \\ &\qquad\qquad \geqslant 3\,a^3\,b^3\,c^3\,(a+b)\,(b+c)\,(c+a). \end{aligned}$$

Kertomalla tulot auki ja ryhmittelemällä termit uudelleen todistettava epäyhtälö saa muodon

$$\begin{aligned} &2\left(a^4\,b^4+b^4\,c^4+c^4\,a^4\right) \\ &\quad +2\left(a^3\,b^3\,c^2+a^3\,b^2\,c^3+a^2\,b^3\,c^3\right) \\ &\quad +2\left(a^4\,b^3\,c+a^3\,b^4\,c+a^4\,b\,c^3\right. \\ &\qquad \left.+a^3\,b\,c^4+a\,b^4\,c^3+a\,b^3\,c^4\right) \\ &\geqslant 3\,a^3\,b^3\,c^3\left(a^2\,b+a^2\,c+a\,b^2+b^2\,c+a\,c^2+b\,c^2\right) \\ &\quad +6\,a^4\,b^4\,c^4. \end{aligned}$$

Ottaen huomioon, että $abc = 1$, voimme oikealla puolella jakaa huoletta tulolla $a^{4/3}\,b^{4/3}\,c^{4/3}$ niin, että molemmat puolet ovat homogeenisia ja astetta 8, ja kirjoittaa todistettavan epäyhtälön symmetristen summien avulla muodossa

$$\begin{aligned} &\sum_{\text{sym}} a^4\,b^4+\sum_{\text{sym}} a^3\,b^3\,c^2+2\sum_{\text{sym}} a^4\,b^3\,c \\ &\qquad \geqslant 3\sum_{\text{sym}} a^{11/3}\,b^{8/3}\,c^{5/3}+\sum_{\text{sym}} a^{8/3}\,b^{8/3}\,c^{8/3}. \end{aligned}$$

Tämä seuraa suoraan Muirheadin epäyhtälöstä, jos pätee

$$\langle 4,4,0\rangle \succ \left\langle \frac{11}{3},\frac{8}{3},\frac{5}{3}\right\rangle,\ \langle 4,3,1\rangle \succ \left\langle \frac{11}{3},\frac{8}{3},\frac{5}{3}\right\rangle,$$

sekä

$$\langle 3,3,2\rangle \succ \left\langle \frac{8}{3},\frac{8}{3},\frac{8}{3}\right\rangle.$$

Mutta nämä pitävät kuin pitävätkin paikkansa, sillä onhan tietenkin

$$4\geqslant 4\geqslant 0,\quad \frac{11}{3}\geqslant\frac{8}{3}\geqslant\frac{5}{3},\quad 4\geqslant 3\geqslant 1,$$

$$3\geqslant 3\geqslant 2,\quad \text{ja}\quad \frac{8}{3}\geqslant\frac{8}{3}\geqslant\frac{8}{3},$$

sekä

$$\begin{aligned}4+4+0 &= \frac{11}{3}+\frac{8}{3}+\frac{5}{3} = 4+3+1\\ &= 3+3+2 = \frac{8}{3}+\frac{8}{3}+\frac{8}{3} = 8,\end{aligned}$$

sekä vielä

$$4 = \frac{12}{3} \geqslant \frac{11}{3}, \qquad 4+4 = 8 = \frac{24}{3} \geqslant \frac{19}{3} = \frac{11}{3}+\frac{8}{3},$$

ja

$$4 = \frac{12}{3} \geqslant \frac{11}{3}, \qquad 4+3 = 7 = \frac{21}{3} \geqslant \frac{19}{3} = \frac{11}{3}+\frac{8}{3},$$

sekä vielä

$$3 = \frac{9}{3} \geqslant \frac{8}{3}, \quad \text{ja vielä} \quad 3+3 = \frac{18}{3} \geqslant \frac{16}{3} = \frac{8}{3}+\frac{8}{3}. \ \square$$

Muirheadin epäyhtälön rajoituksista

Muirheadin epäyhtälö ratkaisee mukavasti ongelman yhdenlaisesta termistä $x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ symmetrisoimalla saatujen summien mahdollisista epäyhtälöistä. Kuitenkin verrattaessa symmetrisiä lausekkeita, joissa esiintyy useammanlaisia termejä, ei Muirheadin epäyhtälö enää tavoita kaikkia epäyhtälöitä. Esimerkiksi Schurin epäyhtälö eksponentille 3 sanoo, että epänegatiivisille reaaliluvuille a, b ja c pätee

$$\begin{aligned}&a^3+b^3+c^3+3abc\\ &\qquad \geqslant a^2\,b+a^2\,c+a\,b^2+b^2\,c+a\,c^2+b\,c^2.\end{aligned}$$

Koska tässä esiintyville eksponenttijonoille pätee

$$\langle 3,0,0\rangle \succ \langle 2,1,0\rangle \succ \langle 1,1,1\rangle\,,$$

pätee Muirheadin epäyhtälön nojalla epäyhtälöt

$$\begin{aligned}&a^3+b^3+c^3 \geqslant\\ &\qquad \frac{1}{2}\left(a^2\,b+a^2\,c+a\,b^2+b^2\,c+a\,c^2+b\,c^2\right),\end{aligned}$$

ja

$$3abc \leqslant \frac{1}{2}\left(a^2\,b+a^2\,c+a\,b^2+b^2\,c+a\,c^2+b\,c^2\right),$$

missä jälkimmäisessä epäyhtälössä epäyhtälömerkin järjestys on eri kuin Schurin epäyhtälössä, ja siis Schurin epäyhtälö ei ole välitön Muirheadin epäyhtälön seuraus. Itse asiassa Schurinkin epäyhtälö ehdottomasti kannattaa pitää käsien ulottuvilla Muirheadin epäyhtälöä käyttäessään.

Muirheadin epäyhtälön todistus

On tullut aika todistaa Muirheadin epäyhtälö. Todistuksen ajatuksena on muokata siinä esiintyvää eksponenttijonoa α muokkaamalla kahta eksponenttia kerrallaan niin, että vastaavan symmetrisen summan arvo ei voi kasvaa, ja niin että eksponentit yksi tai kaksi kerrallaan muuttuvat eksponenteiksi β. Todistamme ensin Lemman 9, joka toteuttaa tämän kahden eksponentin muokkauksen. Tämä lemma on selvästi mutkikkain osa todistusta. Kun se on todistettu, Muirheadin epäyhtälö seuraa suoraan käyttämällä lemmaa toistuvasti, kunnes jono α on muuttunut jonoksi β.

Ennen lemmaa ja sen todistusta esittelemme vielä yhden merkinnän: Kun n on positiivinen kokonaisluku ja $\alpha = \langle \alpha_1,\ldots,\alpha_n\rangle$ ja $\beta = \langle \beta_1,\ldots,\beta_n\rangle$ ovat kaksi jonoa, jotka kummatkin koostuvat n reaaliluvusta, niin merkitsemme niiden erisuurten vastaavien lukujen lukumäärää $r(\alpha,\beta)$. Tarkemmin, $r(\alpha,\beta)$ on niiden indeksien $\ell \in \{1,2,\ldots,n\}$ lukumäärä, joille $\alpha_\ell \neq \beta_\ell$.

Lemma 9. *Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja olkoot $\alpha = \langle \alpha_1,\ldots,\alpha_n\rangle$ ja $\beta = \langle \beta_1,\ldots,\beta_n\rangle$ epänegatiivisten reaalilukujen jonoja, joissa kummassakin on n lukua vähenevässä järjestyksessä, ja joille $\alpha \succcurlyeq \beta$ ja $\alpha \neq \beta$. Tällöin on olemassa n epänegatiivisen reaaliluvun vähenevä jono $\gamma = \langle \gamma_1,\ldots,\gamma_n\rangle$ niin, että pätee $\gamma \succcurlyeq \beta$, että $r(\beta,\gamma) < r(\beta,\alpha)$, ja että*

$$\sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1}\,x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n} \geqslant \sum_{\text{sym}} x_1^{\gamma_1}\,x_2^{\gamma_2}\cdots x_n^{\gamma_n}$$

kaikille epänegatiivisille reaaliluvuille $x_1,\ \ldots,\ x_n$. Lisäksi positiivisille reaaliluvuille $x_1,\ \ldots,\ x_n$ tässä vallitsee yhtäsuuruus jos ja vain jos $x_1 = \ldots = x_n$.

Tässä $\alpha \neq \beta$ tarkoitti siis sitä, että $\alpha_\ell \neq \beta_\ell$ ainakin yhdelle $\ell \in \{1,2,\ldots,n\}$. Ehto $r(\beta,\gamma) < r(\beta,\alpha)$ tarkoittaa sitä, että eksponenttien jonoilla β ja γ on enemmän yhteisiä eksponentteja samoissa kohdissa jonoja kuin eksponenttien jonoilla β ja α.

Lemman 9 todistus. Jonon γ konstruktio on selvästi mutkikkain asia, mitä teemme tässä artikkelissa. Pohjimmiltaan kyse on kuitenkin luonnollisesta asiasta: valitsemalla huolellisesti ja sopivasti kaksi eri lukua jonosta α voimme liu'uttaa niitä samaa tahtia toisiaan kohti, kunnes ainakin toinen niistä on yhtä suuri kuin vastaava luku jonossa β. Tämä liu'utettu jono on sitten γ, ja loppuosa todistuksesta kuluu sen tarkistamiseen, että sillä todella on kaikki toivotut ominaisuudet. Selvästi jonossa γ tulee olemaan yksi tai kaksi yhteistä eksponenttia jonon β kanssa enemmän kuin jonolla α oli.

No niin, aloittakaamme. Koska $\alpha \succcurlyeq \beta$, on

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n = \beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n,$$

jolloin myös

$$(\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) = 0.$$

Tarkastellaan näiden erotusten jonoa

$$\alpha_1 - \beta_1, \quad \alpha_2 - \beta_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n - \beta_n.$$

Koska $\alpha \neq \beta$, ainakin yksi näistä erotuksista on nollasta poikkeava. Koska kaikkien erotusten summa on nolla, on jonossa esiinnyttävä sekä positiivisia että negatiivisia erotuksia.

Lisäksi vasemmanpuoleisin nollasta poikkeava erotus jonossa on positiivinen: Nimittäin, jos $v \in \{1, 2, \ldots, n\}$ on se indeksi, jolle $\alpha_v - \beta_v$ on vasemmanpuoleisin nollasta poikkeava erotus jonossa, niin

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \ldots, \quad \alpha_{v-1} = \beta_{v-1},$$

ja toisaalta, koska oli $\alpha \succcurlyeq \beta$, on

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_v \geqslant \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_v,$$

mistä välittömästi seuraakin, että $\alpha_v \geqslant \beta_v$. Koska $\alpha_v \neq \beta_v$, on siis $\alpha_v - \beta_v > 0$.

Olkoon seuraavaksi $\ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se indeksi, jolle erotus $\alpha_\ell - \beta_\ell$ on vasemmanpuoleisin negatiivinen luku jonossa. Toisin sanoen, olkoon $\ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se luku, jolle

$$\alpha_1 \geqslant \beta_1, \quad \alpha_2 \geqslant \beta_2, \quad \ldots, \quad \alpha_{\ell-1} \geqslant \beta_{\ell-1}, \quad \alpha_\ell < \beta_\ell.$$

Koska vasemmanpuoleisin nollasta poikkeava erotus oli positiivinen, on oltava $v < \ell$, ja erityisesti $\ell \geqslant 2$.

Voimme nyt valita indeksin $k \in \{1, 2, \ldots, \ell - 1\}$ niin, että erotus $\alpha_k - \beta_k$ on oikeanpuoleisin positiivinen erotus osajonossa

$$\alpha_1 - \beta_1, \quad \alpha_2 - \beta_2, \quad \ldots, \quad \alpha_{\ell-1} - \beta_{\ell-1}.$$

Nyt meillä on siis indeksit $k, \ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$, joille $1 \leqslant k < \ell \leqslant n$, ja

$$\alpha_k > \beta_k, \quad \alpha_{k+1} = \beta_{k+1}, \quad \alpha_{k+2} = \beta_{k+2}, \quad \ldots, \quad \alpha_{\ell-1} = \beta_{\ell-1}, \quad \alpha_\ell < \beta_\ell.$$

Nyt ajatuksemme on kutistaa lukua α_k ja suurentaa lukua α_ℓ, pitäen summa $\alpha_k + \alpha_\ell$ vakiona, kunnes α_k on muuttunut luvuksi β_k, tai α_ℓ luvuksi β_ℓ. Molemmat voivat toteutua samanaikaisesti.

Tehdäksemme tämän täsmällisesti asetamme

$$\rho = \frac{\alpha_k + \alpha_\ell}{2} \qquad \text{ja} \qquad \tau = \frac{\alpha_k - \alpha_\ell}{2},$$

jolloin siis

$$\alpha_k = \rho + \tau, \qquad \text{ja} \qquad \alpha_\ell = \rho - \tau.$$

Liu'utuksen määrä tulee olemaan $\tau - \sigma$, missä

$$\sigma = \max\left\{|\beta_k - \rho|, |\beta_\ell - \rho|\right\}.$$

Koska

$$\alpha_k > \beta_k \geqslant \beta_\ell > \alpha_\ell,$$

on $\tau > 0$, ja koska $\alpha_\ell \geqslant 0$, on $\tau \leqslant \rho$. Varmasti $\sigma \geqslant 0$, sillä sen määritelmässä esiintyvät itseisarvot ovat tietenkin aina epänegatiivisia. On

$$-\tau = \alpha_\ell - \rho < \beta_\ell - \rho \leqslant \beta_k - \rho < \alpha_k - \rho = \tau,$$

joten myös

$$\sigma = \max\left\{|\beta_k - \rho|, |\beta_\ell - \rho|\right\} < \tau.$$

Koska

$$-\sigma \leqslant \beta_\ell - \rho \leqslant \beta_k - \rho \leqslant \sigma,$$

ja koska ainakin toisen erotuksista $\beta_\ell - \rho$ ja $\beta_k - \rho$ on oltava $+\sigma$ tai $-\sigma$, on itse asiassa oltava

$$-\sigma = \beta_\ell - \rho \quad \text{tai} \quad \beta_k - \rho = \sigma.$$

Joka tapauksessa siis ainakin toinen yhtäsuuruuksista

$$\beta_\ell = \rho - \sigma \qquad \text{ja} \qquad \beta_k = \rho + \sigma$$

pätee. Lisäksi aina

$$\rho - \sigma \leqslant \beta_\ell \leqslant \beta_k \leqslant \rho + \sigma.$$

Määrittelemme nyt toivotun jonon $\gamma = \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_n \rangle$ asettamalla

$$\begin{cases} \gamma_1 = \alpha_1, \quad \gamma_2 = \alpha_2, \quad \ldots \quad \gamma_{k-1} = \alpha_{k-1}, \\ \gamma_k = \rho + \sigma, \\ \gamma_{k+1} = \alpha_{k+1}, \quad \gamma_{k+2} = \alpha_{k+2}, \quad \ldots, \quad \gamma_{\ell-1} = \alpha_{\ell-1}, \\ \gamma_\ell = \rho - \sigma, \\ \gamma_{\ell+1} = \alpha_{\ell+1}, \quad \gamma_{\ell+2} = \alpha_{\ell+2}, \quad \ldots \quad \gamma_n = \alpha_n. \end{cases}$$

Pätee $\gamma_\ell = \beta_\ell$ tai $\gamma_k = \beta_k$, jolloin

$$r(\beta, \gamma) = r(\beta, \alpha) - 1,$$

jos vain yksi niistä pätee, ja

$$r(\beta, \gamma) = r(\beta, \alpha) - 2,$$

jos molemmat pätevät. Joka tapauksessa siis varmasti

$$r(\beta, \gamma) < r(\beta, \alpha).$$

Koska $\sigma < \tau \leqslant \rho$, on $\gamma_\ell \geqslant 0$, ja on varsin selvää, että nyt

$$\gamma_1 \geqslant 0, \quad \gamma_2 \geqslant 0, \quad \ldots, \quad \gamma_n \geqslant 0.$$

Osoitamme seuraavaksi, että $\gamma \succcurlyeq \beta$. Ensinnäkin,

$$\gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \ldots \geqslant \gamma_{k-1},$$

koska
$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_{k-1}.$$
Lisäksi, $\gamma_{k-1} \geqslant \gamma_k$, sillä
$$\gamma_{k-1} = \alpha_{k-1} \geqslant \alpha_k = \rho + \tau > \rho + \sigma = \gamma_k,$$
jos siis sattuu olemaan $k \geqslant 2$. Jos $\ell = k + 1$, niin luonnollisesti
$$\gamma_k = \rho + \sigma \geqslant \rho - \sigma = \gamma_\ell = \gamma_{k+1}.$$
Jos taas $\ell > k + 1$, niin
$$\gamma_k = \rho + \sigma \geqslant \beta_k \geqslant \beta_{k+1} = \alpha_{k+1} = \gamma_{k+1},$$
ja
$$\gamma_{k+1} \geqslant \gamma_{k+2} \geqslant \ldots \geqslant \gamma_{\ell-1},$$
sillä
$$\alpha_{k+1} \geqslant \alpha_{k+2} \geqslant \ldots \geqslant \alpha_{\ell-1},$$
ja vielä
$$\gamma_{\ell-1} = \alpha_{\ell-1} = \beta_{\ell-1} \geqslant \beta_\ell \geqslant \rho - \sigma = \gamma_\ell.$$

Lopuksi, jos $\ell < n$, niin
$$\gamma_\ell = \rho - \sigma > \rho - \tau = \alpha_\ell \geqslant \alpha_{\ell+1} = \gamma_{\ell+1},$$
ja
$$\gamma_{\ell+1} \geqslant \gamma_{\ell+2} \geqslant \ldots \geqslant \gamma_n,$$
sillä
$$\alpha_{\ell+1} \geqslant \alpha_{\ell+2} \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n.$$
Siispä kaiken kaikkiaan
$$\gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \ldots \geqslant \gamma_n.$$

Lisäksi, muistaen, että
$$\gamma_k + \gamma_\ell = \rho + \sigma + \rho - \sigma = 2\rho = \rho + \tau + \rho - \tau = \alpha_k + \alpha_\ell,$$
näemme, että
$$\begin{aligned}
&\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n \\
&\quad = (\gamma_1 + \ldots + \gamma_{k-1}) + \gamma_k + (\gamma_{k+1} + \ldots + \gamma_{\ell-1}) \\
&\qquad + \gamma_\ell + (\gamma_{\ell+1} + \ldots + \gamma_n) \\
&\quad = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_{k-1}) + \alpha_k + (\alpha_{k+1} + \ldots + \alpha_{\ell-1}) \\
&\qquad + \alpha_\ell + (\alpha_{\ell+1} + \ldots + \alpha_n) \\
&\quad = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n.
\end{aligned}$$

Todistamme seuraavaksi, että
$$\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_\nu \geqslant \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu$$
jokaisella $\nu \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Jos $\nu < k$, niin
$$\gamma_1 + \ldots + \gamma_\nu = \alpha_1 + \ldots + \alpha_\nu \geqslant \beta_1 + \ldots + \beta_\nu.$$

Jos $\nu = k$, niin
$$\begin{aligned}
\gamma_1 + \ldots + \gamma_\nu &= (\gamma_1 + \ldots + \gamma_{k-1}) + \gamma_k \\
&\geqslant (\beta_1 + \ldots + \beta_{k-1}) + \beta_k = \beta_1 + \ldots + \beta_\nu.
\end{aligned}$$

Jos $\nu \in \{k+1, k+2, \ldots, \ell-1\}$, niin, muistaen, että oli
$$\gamma_{k+1} = \alpha_{k+1} = \beta_{k+1}, \quad \ldots, \quad \gamma_{\ell-1} = \alpha_{\ell-1} = \beta_{\ell-1},$$
on
$$\begin{aligned}
\gamma_1 + \ldots + \gamma_\nu &= (\gamma_1 + \ldots + \gamma_k) + (\gamma_{k+1} + \ldots + \gamma_\nu) \\
&\geqslant (\beta_1 + \ldots + \beta_k) + (\beta_{k+1} + \ldots + \beta_\nu) \\
&= \beta_1 + \ldots + \beta_\nu.
\end{aligned}$$

Lopuksi, jos $\nu \geqslant \ell$, niin muistaen, että $\gamma_k + \gamma_\ell = \alpha_k + \alpha_\ell$, on
$$\begin{aligned}
&\gamma_1 + \ldots + \gamma_\nu \\
&\quad = (\gamma_1 + \ldots + \gamma_{k-1}) + \gamma_k + (\gamma_{k+1} + \ldots + \gamma_{\ell-1}) \\
&\qquad + \gamma_\ell + (\gamma_{\ell+1} + \ldots + \gamma_\nu) \\
&\quad = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_{k-1}) + \alpha_k + (\alpha_{k+1} + \ldots + \alpha_{\ell-1}) \\
&\qquad + \alpha_\ell + (\alpha_{\ell+1} + \ldots + \alpha_\nu) \\
&\quad = \alpha_1 + \ldots + \alpha_\nu \geqslant \beta_1 + \ldots + \beta_\nu.
\end{aligned}$$

Ja kas näin olemme todistaneet, että $\gamma \succcurlyeq \beta$.

Todistettavanamme on enää lemman epäyhtälö ja sen yhtäsuuruusehto. Todistetaan epäyhtälö ensin. Se seuraa tarkastelemalla erotusta
$$\mathscr{E} = 2\sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} - 2\sum_{\text{sym}} x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \cdots x_n^{\gamma_n},$$
missä siis x_1, x_2, $\ldots$, x_n ovat mielivaltaisia epänegatiivisia reaalilukuja. Haluaisimme siis osoittaa, että $\mathscr{E} \geqslant 0$. Tämän voi tehdä muokkaamalla erotus muotoon, jossa epänegatiivisuus on ilmeistä. Nimittäin, ottamalla yhteisiä tekijöitä ilmeisellä tavalla, $\mathscr{E}$ on
$$\begin{aligned}
&= \sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1} \cdots x_{k-1}^{\alpha_{k-1}} x_k^{\alpha_k} x_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \cdots x_{\ell-1}^{\alpha_{\ell-1}} x_\ell^{\alpha_\ell} x_{\ell+1}^{\alpha_{\ell+1}} \cdots x_n^{\alpha_n} \\
&+ \sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1} \cdots x_{k-1}^{\alpha_{k-1}} x_k^{\alpha_\ell} x_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \cdots x_{\ell-1}^{\alpha_{\ell-1}} x_\ell^{\alpha_k} x_{\ell+1}^{\alpha_{\ell+1}} \cdots x_n^{\alpha_n} \\
&- \sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1} \cdots x_{k-1}^{\alpha_{k-1}} x_k^{\gamma_k} x_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \cdots x_{\ell-1}^{\alpha_{\ell-1}} x_\ell^{\gamma_\ell} x_{\ell+1}^{\alpha_{\ell+1}} \cdots x_n^{\alpha_n} \\
&- \sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1} \cdots x_{k-1}^{\alpha_{k-1}} x_k^{\gamma_\ell} x_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \cdots x_{\ell-1}^{\alpha_{\ell-1}} x_\ell^{\gamma_k} x_{\ell+1}^{\alpha_{\ell+1}} \cdots x_n^{\alpha_n} \\
&= \sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1} \cdots \widehat{x_k^{\alpha_k}} \cdots \widehat{x_\ell^{\alpha_\ell}} \cdots x_n^{\alpha_n} \\
&\qquad\qquad \cdot \left(x_k^{\alpha_k} x_\ell^{\alpha_\ell} + x_k^{\alpha_\ell} x_\ell^{\alpha_k} - x_k^{\gamma_k} x_\ell^{\gamma_\ell} - x_k^{\gamma_\ell} x_\ell^{\gamma_k}\right),
\end{aligned}$$
missä sirkumfleksi $\widehat{\cdot}$ tekijöiden $x_k^{\alpha_k}$ ja $x_\ell^{\alpha_\ell}$ päällä tarkoittaa, että ne unohdetaan tulosta $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Nyt

voimme jatkaa jakamalla summattavien termien viimeisen tekijän yksinkertaisemmiksi tekijöiksi:

$$\begin{aligned}\mathscr{E} &= \sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1} \cdots \widehat{x_k^{\alpha_k}} \cdots \widehat{x_\ell^{\alpha_\ell}} \cdots x_n^{\alpha_n} \\ &\quad \cdot \left(x_k^{\rho+\tau} x_\ell^{\rho-\tau} + x_k^{\rho-\tau} x_\ell^{\rho+\tau} - x_k^{\rho+\sigma} x_\ell^{\rho-\sigma} - x_k^{\rho-\sigma} x_\ell^{\rho+\sigma}\right) \\ &= \sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1} \cdots \widehat{x_k^{\alpha_k}} \cdots \widehat{x_\ell^{\alpha_\ell}} \cdots x_n^{\alpha_n} \\ &\quad \cdot x_k^{\rho-\tau} x_\ell^{\rho-\tau} \left(x_k^{\tau+\sigma} - x_\ell^{\tau+\sigma}\right) \left(x_k^{\tau-\sigma} - x_\ell^{\tau-\sigma}\right).\end{aligned}$$

Tässä summassa jokaisen termin jokainen tekijä, mahdollisesti kahta viimeistä tekijää $x_k^{\tau\pm\sigma} - x_\ell^{\tau\pm\sigma}$ lukuun ottamatta, on epänegatiivinen. Jos $x_k \geqslant x_\ell$, niin kaksi viimeistäkin tekijää ovat epänegatiivisia, ja vastaava termi siis myös epänegatiivinen. Jos taas $x_k < x_\ell$, niin kaksi viimeistä tekijää ovat molemmat negatiivisia, ja niiden tulo siis positiivinen. Joka tapauksessa summassa $\sum_{\text{sym}}$ jokainen termi on epänegatiivinen, ja siis $\mathscr{E} \geqslant 0$, kuten pitikin.

Lopuksi, meidän riittää enää todistaa yhtäsuuruusehto. Olkoot sitä varten $x_1, \ldots, x_n$ positiivisia reaalilukuja, joille

$$\sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} = \sum_{\text{sym}} x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \cdots x_n^{\gamma_n}.$$

Tällöin yllä määritelty lauseke $\mathscr{E}$ on nolla, ja jo tehtyjen laskujen perusteella itse asiassa pätee

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1} \cdots \widehat{x_k^{\alpha_k}} \cdots \widehat{x_\ell^{\alpha_\ell}} \cdots x_n^{\alpha_n} \\ &\quad \cdot x_k^{\rho-\tau} x_\ell^{\rho-\tau} \left(x_k^{\tau+\sigma} - x_\ell^{\tau+\sigma}\right) \left(x_k^{\tau-\sigma} - x_\ell^{\tau-\sigma}\right).\end{aligned}$$

Lisäksi tiedämme jo, että jokainen termi tässä summassa on epänegatiivinen. Koska termien summa on nolla, on siis jokaisen termin oltava nolla. Koska kaikki muuttujat $x_1, \ldots, x_n$ olivat positiivisia, tarkoittaa tämä sitä, että jokaisessa termissä tulo

$$\left(x_k^{\tau+\sigma} - x_\ell^{\tau+\sigma}\right) \left(x_k^{\tau-\sigma} - x_\ell^{\tau-\sigma}\right)$$

on nolla, jolloin siis on oltava

$$x_k^{\tau+\sigma} - x_\ell^{\tau+\sigma} = 0 \quad \text{tai} \quad x_k^{\tau-\sigma} - x_\ell^{\tau-\sigma} = 0.$$

Molemmista ehdoista seuraa $x_k = x_\ell$. Koska summassa käydään läpi kaikki lukujen $x_1, \ldots, x_n$ uudelleenjärjestelyt, tarkoittaa tämä sitä, että $x_\kappa = x_\lambda$ kaikille indeksipareille $\kappa, \lambda \in \{1, 2, \ldots, n\}$, joille $\kappa \neq \lambda$, ja tietenkin silloin $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Lopuksi, koska on helppo tarkistaa, että näiden yhtäsuuruuksien vallitessa epäyhtälössä varmasti pätee yhtäsuuruus, olemme valmiit ja lemma on viimein todistettu. □

Muirheadin epäyhtälön todistus. Jos pätee $\alpha = \beta$, niin epäyhtälön molemmat puolet ovat yhtä suuret, ja asia on selvä. Olettakaamme siis, että $\alpha \neq \beta$. Lemma 9 antaa silloin n epänegatiivisen reaaliluvun vähenevän jonon $\gamma_1 = \langle \gamma_{1,1}, \gamma_{1,2}, \ldots, \gamma_{1,n} \rangle$, jolle $\gamma_1 \succcurlyeq \beta$, ja $r(\beta, \gamma_1) < r(\beta, \alpha)$, ja vielä

$$\sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \geqslant \sum_{\text{sym}} x_1^{\gamma_{1,1}} x_2^{\gamma_{1,2}} \cdots x_n^{\gamma_{1,n}}$$

kaikille epänegatiivisille reaaliluvuille $x_1, \ldots, x_n$, ja missä yhtäsuuruus pätee positiivisilla reaaliluvuilla $x_1, \ldots, x_n$ täsmälleen silloin, kun $x_1 = \ldots = x_n$.

Nyt, jos $\gamma_1 = \beta$, olemme valmiit. Oletetaan siis, että $\gamma_1 \neq \beta$. Tällöin löytyy samassa hengessä n epänegatiivisen reaaliluvun vähenevä jono $\gamma_2 = \langle \gamma_{2,1}, \ldots, \gamma_{2,n} \rangle$ niin, että $\gamma_2 \succcurlyeq \beta$, $r(\beta, \gamma_2) < r(\beta, \gamma_1)$, ja

$$\sum_{\text{sym}} x_1^{\gamma_{1,1}} x_2^{\gamma_{1,2}} \cdots x_n^{\gamma_{1,n}} \geqslant \sum_{\text{sym}} x_1^{\gamma_{2,1}} x_2^{\gamma_{2,2}} \cdots x_n^{\gamma_{2,n}}$$

kaikille epänegatiivisille reaaliluvuille $x_1, \ldots, x_n$, ja missä yhtäsuuruus jälleen vallitsee positiivisilla reaaliluvuilla $x_1, \ldots, x_n$ vain ja ainoastaan silloin, kun $x_1 = \ldots = x_n$.

Jälleen, jos $\gamma_2 = \beta$, olemme valmiit. Jos taas $\gamma_2 \neq \beta$, niin jatkamme samassa hengessä käyttäen lemmaa 9 uudelleen ja uudelleen. Koska jokaisessa askeleessa saadaan uusi eksponenttijono, jolla on enemmän yhteisiä eksponentteja samoissa kohdissa jonon β kanssa kuin aiemmilla, ei prosessi voi jatkua ikuisesti, ja lopulta saamme lemmasta 9 ulos itse eksponenttijonon β. Näin saamme jonon n epänegatiivisen reaaliluvun väheneviä jonoja

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \langle \gamma_{1,1}, \gamma_{1,2}, \ldots, \gamma_{1,n} \rangle, \\ \gamma_2 &= \langle \gamma_{2,1}, \gamma_{2,2}, \ldots, \gamma_{2,n} \rangle, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{N-1} &= \langle \gamma_{N-1,1}, \gamma_{N-1,2}, \ldots, \gamma_{N-1,n} \rangle, \\ \gamma_N &= \langle \gamma_{N,1}, \gamma_{N,2}, \ldots, \gamma_{N,n} \rangle,\end{aligned}$$

missä N on positiivinen kokonaisluku, niin, että

$$\alpha \succ \gamma_1 \succ \gamma_2 \succ \ldots \succ \gamma_{N-1} \succ \gamma_N = \beta,$$

ja

$$\begin{aligned}\sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} &\geqslant \sum_{\text{sym}} x_1^{\gamma_{1,1}} x_2^{\gamma_{1,2}} \cdots x_n^{\gamma_{1,n}} \\ &\geqslant \sum_{\text{sym}} x_1^{\gamma_{2,1}} x_2^{\gamma_{2,2}} \cdots x_n^{\gamma_{2,n}} \\ &\geqslant \ldots \\ &\geqslant \sum_{\text{sym}} x_1^{\gamma_{N-1,1}} x_2^{\gamma_{N-1,2}} \cdots x_n^{\gamma_{N-1,n}} \\ &\geqslant \sum_{\text{sym}} x_1^{\gamma_{N,1}} x_2^{\gamma_{N,2}} \cdots x_n^{\gamma_{N,n}} \\ &= \sum_{\text{sym}} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_n^{\beta_n}.\end{aligned}$$

Lisäksi, jos luvut $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ovat kaikki positiivisia, niin lemma 9 takaa, että jokaisessa näistä epäyhtälöistä vallitsee yhtäsuuruus vain ja ainoastaan silloin, kun $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. □

Haasteita lukijalle

Ongelma 1. *Olkoot a, b ja c epänegatiivisia reaalilukuja. Osoita, että*

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc.$$

Ongelma 2. *Olkoot a, b ja c epänegatiivisia reaalilukuja. Osoita, että*

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \geqslant 3abc\,(a+b+c)\,.$$

Ongelma 3. *Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja, joille $abc = 1$. Todista, että*

$$a^3+b^3+c^3 \geqslant a^2+b^2+c^2.$$

Ongelma 4. *Olkoon n positiivinen kokonaisluku, jolle $n \geqslant 2$, ja olkoot a_1, a_2, $\ldots$, a_n epänegatiivisia reaalilukuja. Osoita, että*

$$\frac{2}{n\,(n-1)} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \sqrt{a_i\,a_j} \geqslant \sqrt[n]{a_1\,a_2\cdots a_n}.$$

Ongelma 5. *Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Todista Nesbittin epäyhtälö*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Ongelma 6. *Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Todista, että*

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right) \geqslant 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

Ongelma 7. *Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Todista, että*

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \leqslant \frac{1}{abc}.$$

Lähteistä ja kirjallisuudesta

Yllä annettu Muirheadin epäyhtälön todistus seuraa oleellisesti ottaen klassikkoteoksen [7] esitystä. Mainittakoon, että [7] tarkastelee mielenkiintoisella tavalla aritmeettis-geometrista epäyhtälöä Muirheadin epäyhtälön todistuksen valossa.

Esimerkki 1 on oleellisesti ottaen kirjan [7] esimerkki 78 ja esimerkki 5 sen lause 79. Esimerkit 3 ja 8 ovat tehtävät 12.8 ja 12.11 kirjassa [2]. Esimerkki 6 on teoksen [1] esimerkki 6.14, ja esimerkki 7 sen harjoitustehtävä 6d.6.

Ongelmat 1, 2 ja 4 ovat tehtävät 12.2(a), 12.3 ja 12.2(c) kirjassa [10]. Ongelmat 2 ja 5 ovat esimerkit 6.12 ja 6.13 teoksessa [1], ja ongelma 6 on saman teoksen tehtävä 6d.4. Lopuksi, ongelma 7 on harjoitustehtävä 12.9 kirjassa [2].

Luonnollisesti Muirheadin epäyhtälön kanssa voi käyttää muitakin klassisia epäyhtälöitä, kuten vaikkapa aritmeettis-geometrista epäyhtälöä tai Schurin epäyhtälöä. Klassisia epäyhtälöitä on käsitelty monien muiden teosten ohella kirjoissa [1, 2, 7, 8, 10], Solmun sivuilla artikkeleissa [3, 4, 5, 6], ja Internetissä vaikkapa matematiikan olympiavalmennuksen materiaalisivuilla [9, 11].

Viitteet

[1] Bradley, C. J.: *Introduction to Inequalities*, Handbooks, Number Two, United Kingdom Mathematics Trust, 2010.

[2] Cvetkovski, Z.: *Inequalities: Theorems, Techniques and Selected Problems*, Springer, 2012.

[3] Ernvall-Hytönen, A.-M.: *Aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo*, Solmu, 1/2016, 27–30.

[4] Halmetoja, M: *Epäyhtälöistä, osa 1*, Solmu, 2/2010, 11–14.

[5] Halmetoja, M.: *Epäyhtälöistä, osa 2*, Solmu, 3/2010, 18–22.

[6] Halmetoja, M.: *Karamatan epäyhtälö*, Solmu, 3/2013, 24–28.

[7] Hardy, G., J. E. Littlewood, ja G. Pólya: *Inequalities*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, 1952.

[8] Hung, P. K.: *Secrects in Inequalities: volume 1 — basic inequalities*, GIL Publishing House, 2007.

[9] Lappalainen, J., ja A.-M. Ernvall-Hytönen: *Epäyhtälöoppia matematiikkaolympialaisten tehtäviin*, `http://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/eykirja.pdf`.

[10] Steele, J. M.: *The Cauchy–Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*, Mathematical Association of America Problem Books Series, Cambridge University Press, 2004.

[11] Vaderlind, P.: *Epäyhtälöiden kieltämätön viehätys: lyhyt opastettu kierros algebrallisten epäyhtälöiden viidakkoon*, `http://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/vaderlind.pdf`.