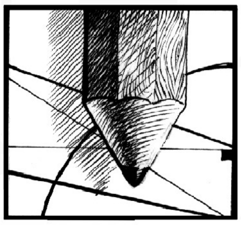


Lisäys rinkulan pisteisiin

Hannu Korhonen

Anne-Maria Ernvall-Hytönen kirjoitti rinkulan pisteistä Solmussa 3/2017.[1] Aiheena oli niiden kokonaislukupisteiden lukumäärä, joiden etäisyys d origosta on $r < d \leq r + 1$, missä $r \in \mathbb{N}$. Tehtävä on läheistä sukua Gaussin ympyräprobleemalle (ks. esimerkiksi `http://mathworld.wolfram.com/GausssCircleProblem.html`) ja ratkaistavissa tämän tunnetun ratkaisun avulla. Kaiken saa puristetuksi yhdeksi Geogebra-tiedostoksi `https://www.geogebra.org/m/huhyjm2e`, kuva 1.

Rinkulan pisteiden määriä voidaan laskea esimerkiksi verkossa sivulla `https://oeis.org/A000328` olevista Gaussin ympyräprobleeman ratkaisujen arvoista. Ernvall-Hytönen on taulukoinut artikkeliinsa rinkulan pinta-alan ja pisteiden määrän r:n arvoilla 0-10. Siitä näkyy, että rinkulan pinta-ala antaa kohtuullisen arvion rinkulaan sisältyvien kokonaislukupisteiden määrälle, vaikka hän ei sitä suoraan sanokaan. Ensimmäisten 45 rinkulan kohdalla pinta-alaan perustuvan kokonaislukupisteiden määrän likiarvon suhteellinen virhe vaihtelee OEIS:n listan perusteella laskien välillä 0-13 prosenttia, keskimäärin noin kuusi prosenttia.

Geogebra laskee ensimmäiset sata lukumäärää suhteellisen vaivattomasti. Peräkkäisten arvojen määrä vaihtelee huomattavasti, sillä esimerkiksi r:n arvoilla 98, 99 ja 100 Geogebra antaa lukumäärät 608, 660 ja 600. Pinta-alan antama lukumäärän arvio poikkeaa näistä 2, -5 ja -4 prosenttia.

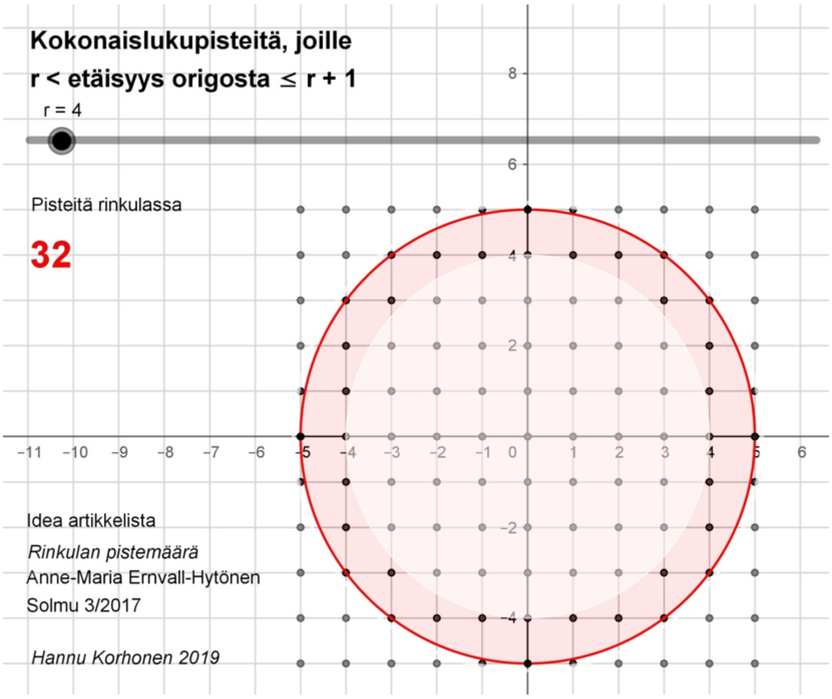
Intuitiivisesti ajatellen tuntuu luonnolliselta, että kokonaislukupisteitä olisi keskimäärin yksi yksikköneliön kokoista rinkulan osaa kohti, sillä taso voidaan täyttää yksikköneliöillä, joiden keskipisteenä on kokonaislukupiste. Geogebralla voidaan tutkia tätä suurillakin r:n arvoilla. Jaetaan esimerkiksi r:n arvolla 1000 syntyvä rinkula origosta lähtevillä puolisuorilla likimäärin yksikköneliön kokoisiin osiin, siis tässä tapauksessa 6283 puolisuoralla. y-akselin läheisyydessä kutakin osaa kohti on selvästi yksi kokonaislukupiste. Rinkulan osat ovat aluksi niin lähellä koordinaatistoruudukon yksikköneliöitä, että ero ei näy kuvassa. Ympyräviivan kaartuminen alkaa näkyä vasta, kun x-koordinaatti lähestyy kymmentä, puolisuorien osien eroaminen koordinaatistoruudukon pystyviivoista ei vielä sittenkään, `https://www.geogebra.org/m/pzbrbhdb`, kuva 2.

Näin säännöllistä kokonaislukupisteiden sijoittuminen ei suinkaan ole muualla. Esimerkiksi suoran $y = x$ läheisyydessä voi olla neliöitä, jossa ei ole yhtään kokonaislukupistettä, esimerkkinä vihreä ruutu seuraavassa kuvassa, `https://www.geogebra.org/m/vgdrk9am`, kuva 3. Tällainen tarkastelu ei tuota tietenkään mitään uutta varsinaiseen ongelmaan eikä Ernvall-Hytösen tekstiinkään nähden, mutta ehkä auttaa näkemään niitä mahdollisuuksia, joita ilmaisohjelmatkin voivat antaa vanhastaan vain laskemiseen perustuneiden ratkaisujen havainnollistamiseen.

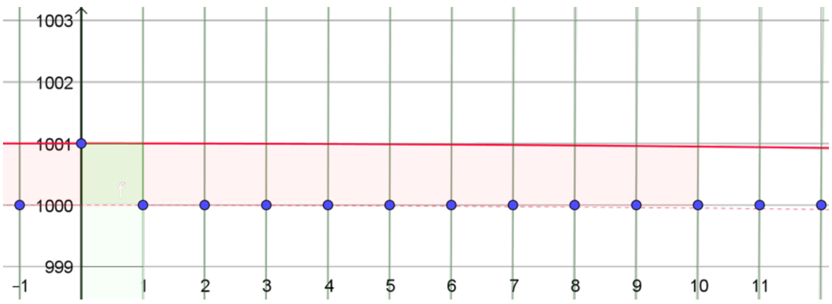
Yksinomaan jo sen hahmottaminen, miltä tilanne näyttää ympyrän $r = 1000$ ja suoran $y = x$ leikkauspisteen

[1] `https://matematiikkalehtisolmu.fi/2017/3/pistelaskenta.pdf`

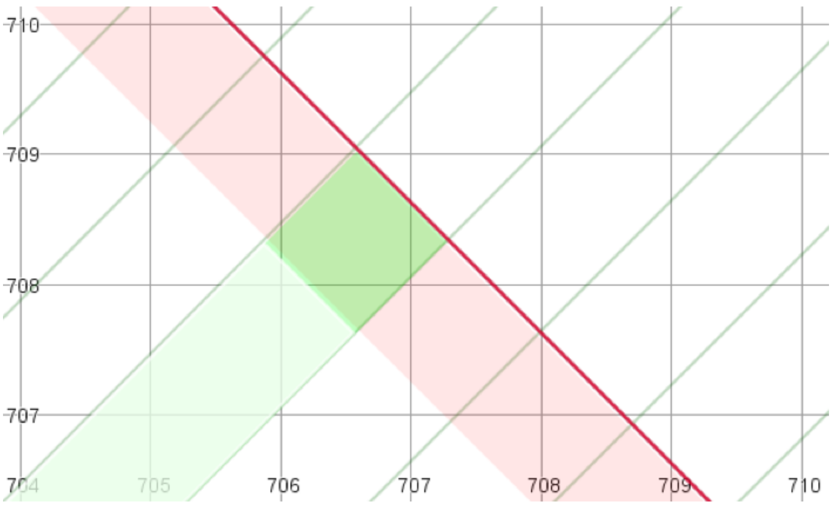
lähiympäristössä, saattaa olla vaivan arvoista. Ja sen tietäminen, että kuvan piirtäminen on suhteellisen vaivatonta dynaamisilla matematiikkaohjelmilla, on olennainen osa niitä kokemuksia, joihin nykyaikainen käsitys matematiikasta ja sen oppimisen mahdollisuuksista perustuu.



Kuva 1.



Kuva 2.



Kuva 3.