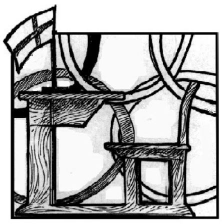


Menestystä Kansainvälisistä matematiikkaolympialaisista

Hermanni Huhtamäki, Akseli Jussinmäki, Olli Järviniemi, Roope Salmi, Nerissa Shakespeare

Vuoden 2019 Kansainväliset matematiikkaolympialaiset pidettiin Bathissa Iso-Britanniassa. Suomen joukkueen jäsenet olivat Juho Arala, Hermanni Huhtamäki, Akseli Jussinmäki, Olli Järviniemi, Roope Salmi ja Nerissa Shakespeare. Joukkueen johtajana toimi Lauri Hallila ja varajohtajana Otte Heinävaara.

Suomen joukkueen suoritus oli poikkeuksellisen hyvä. Joukkueen yhteispistemäärä oli paras yli kymmeneen vuoteen ja suhteellinen sijoitus oli yksi parhaista viime vuosikymmeneltä. Mitaleita tuli kaksi, hopeaa Olli Järviniemelle ja pronssia Roope Salmelle, ja kunniamaininnat myönnettiin Juho Aralalle ja Akseli Jussinmäelle. Hopean lisäksi Järviniemen suhteellinen sijoitus oli Suomen historian paras.

Tehtävä 1

Olkoon $\mathbb{Z}$ kokonaislukujen joukko. Määritä kaikki sellaiset funktiot $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, että kaikille kokonaisluvuille a ja b pätee

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b)).$$

Tehtävä 2

Piste A_1 sijaitsee kolmion ABC sivulla BC ja piste B_1 sijaitsee kolmion sivulla AC. Olkoon P piste janalla AA_1 ja Q piste janalla BB_1 siten, että PQ ja AB ovat yhdensuuntaisia. Olkoon P_1 sellainen piste suoralla PB_1, että B_1 sijaitsee aidosti pisteiden P ja P_1 välissä ja $\angle PP_1C = \angle BAC$. Olkoon Q_1 vastaavasti piste suoralla QA_1 siten, että A_1 sijaitsee aidosti pisteiden Q ja Q_1 välissä ja $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Osoita, että pisteet P, Q, P_1 ja Q_1 sijaitsevat samalla ympyrällä.

Tehtävä 3

Sosiaalisessa verkossa on 2019 käyttäjää. Jotkut käyttäjäpareista ovat ystäviä keskenään. Jos käyttäjä A on ystävä käyttäjän B kanssa, niin myös käyttäjä B on ystävä käyttäjän A kanssa. Seuraavanlainen tapahtuma voi tapahtua toistuvasti, yksi tapahtuma kerrallaan:

Kolme käyttäjää A, B ja C, joista A on ystävä käyttäjien B ja C kanssa, mutta B ja C eivät ole ystäviä keskenään, muuttavat ystävyysstatuksiaan siten, että B ja C ovat nyt ystäviä keskenään, mutta A ei ole ystävä käyttäjän B eikä käyttäjän C kanssa. Muut ystävyysstatukset pysyvät muuttumattomina.

Aluksi 1010 käyttäjällä on kullakin 1009 ystävää, ja 1009 käyttäjällä on kullakin 1010 ystävää. Osoita, että on olemassa sarja kuvatunlaisia tapahtumia, joiden jälkeen jokainen käyttäjä on ystävä korkeintaan yhden toisen käyttäjän kanssa.

Tehtävä 4

Etsi kaikki positiivisten kokonaislukujen parit (k, n), joille

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4)\dots(2^n - 2^{n-1}).$$

Tehtävä 5

Bathin pankki painaa kolikoita, joiden toisella puolella on H ja toisella puolella T. Harrilla on n tällaista kolikkoa järjestettynä jonoon vasemmalta oikealle. Hän suorittaa seuraavan operaation toistuvasti: Jos tasan $k > 0$ kolikossa on H näkyvällä puolella, niin hän kääntää k:nnen kolikon vasemmalta toisin päin; muussa tapauksessa, kaikissa kolikoissa on T näkyvällä puolella ja hän lopettaa operaatiot. Esimerkiksi jos $n = 3$, niin prosessi, joka alkaa muodostelmasta THT, jatkuisi $THT \to HHT \to HTT \to TTT$ ja päättyisi kolmen operaation jälkeen.

(a) Osoita, että jokaisella aloitusmuodostelmalla Harri lopettaa äärellisen määrän operaatioita jälkeen.

(b) Olkoon $L(C)$ jokaista aloitusmuodostelmaa C kohti niiden operaatioiden lukumäärä, jotka Harri suorittaa ennen kuin hän lopettaa. Esimerkiksi $L(THT) = 3$ ja $L(TTT) = 0$. Määritä luvun $L(C)$ keskiarvo, kun C käy läpi kaikki 2^n mahdollista aloitusmuodostelmaa.

Tehtävä 6

Olkoon I sellaisen teräväkulmaisen kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipiste, jossa $AB \neq AC$. Kolmion ABC sivut BC, CA ja AB sivuavat sen sisään piirrettyä ympyrää ω pisteissä D, E ja F (samassa järjestyksessä). Suora, joka kulkee pisteen D kautta ja on kohtisuorassa EF:n kanssa, leikkaa ympyrän ω jälleen pisteessä R. Suora AR leikkaa ympyrän ω jälleen pisteessä P. Kolmioiden PCE ja PBF ympäri piirretyt ympyrät leikkaavat jälleen pisteessä Q.

Osoita, että suorat DI ja PQ leikkaavat suoralla, joka kulkee pisteen A kautta ja on kohtisuorassa AI:n kanssa.

Ratkaisu 1 (Hermanni Huhtamäki)

Sijoitetaan $a = 0$, tällöin:

$$\begin{aligned} f(2a) + 2f(b) &= f(f(a+b)) \\ f(0) + 2f(b) &= f(f(b)). \end{aligned}$$

Sovelletaan tätä alkuperäisen yhtälön oikeaan puoleen, jolloin saadaan:

$$\begin{aligned} f(2a) + 2f(b) &= f(f(a+b)) \\ f(2a) + 2f(b) &= f(0) + 2f(a+b). \end{aligned}$$

Olkoon lisäksi $a = 1$:

$$\begin{aligned} f(2) + 2f(b) &= f(0) + 2f(1+b) \\ 2f(b+1) - 2f(b) &= f(2) + f(0) \\ f(b+1) - f(b) &= \frac{f(2) + f(0)}{2}. \end{aligned}$$

Koska funktion määrittelyjoukko on vain kokonaisluvut, se on edellisen yhtälön perusteella lineaarinen eli muotoa $f(n) = kn + l$, jossa k ja l ovat kokonaislukuja. Sijoitetaan tämä alkuperäiseen yhtälöön, jolloin saadaan:

$$\begin{aligned} f(2a) + 2f(b) &= f(f(a+b)) \\ k(2a) + l + 2(bk + l) &= f(k(a+b) + l) \\ 2ak + l + 2bk + 2l &= f(ak + bk + l) \\ 2ak + 2bk + 3l &= k(ak + bk + l) + l \\ 2ak + 2bk + 3l &= ak^2 + bk^2 + lk + l. \end{aligned}$$

Eli edelleen sievennettynä:

$$\begin{aligned} ak(2-k) + bk(2-k) + l(2-k) &= 0 \\ (2-k)(ak + bk + l) &= 0. \end{aligned}$$

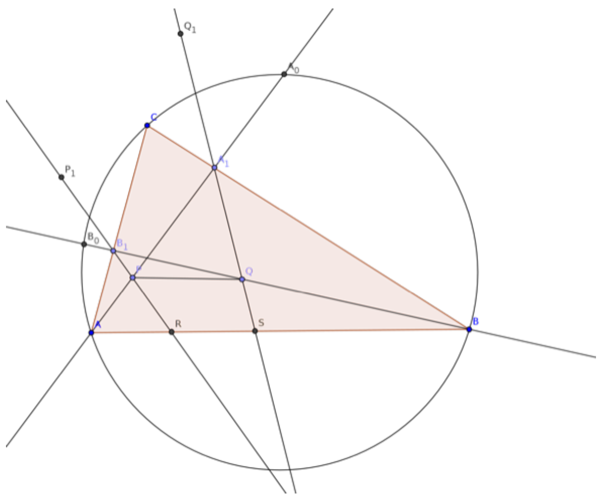
Jotta tämä toteutuisi, pitäisi olla a) $2 - k = 0$ tai b) $ak + bk + l = 0$.

a) $2 - k = 0$:sta saadaan, että $k = 2$ ja l:n arvolla ei ole merkitystä eli $f(n) = 2n + l$, jossa l on mikä tahansa kokonaisluku.

b) Jotta $ak + bk + l = 0$ toteutuisi, pitäisi olla $k = 0$, koska l ei voi muuttua, mutta a ja b voivat, joten niistä tulisi päästä eroon. Siispä ainoa ratkaisu on $k = l = 0$ eli $f(n) = 0$.

Ainoat ratkaisut ovat $f(n) = 2n + l$ ja $f(n) = 0$.

Ratkaisu 2 (Nerissa Shakespeare)



Konfiguraatiosta tullaan löytämään paljon jännenelikulmioita ja ympyröitä, joten ympärysympyrän piirtäminen saattaa valaista tilannetta. Määritellään muutama piste aluksi. Olkoot pisteet A_0 ja B_0 suorien AA_1 ja BB_1 toiset leikkauspisteet kolmion ympärysympyrän kanssa. Olkoot pisteet R ja S suorien B_1P ja A_1Q leikkauspisteet suoran AB kanssa vastaavasti.

ABA_0B_0 on selvästi jännenelikulmio, koska kaikki sen kärjet ovat kolmion ABC ympärysympyrällä. Yhdistetään tämä janan PQ annetun yhdesuuntaisuusehdon kanssa, mistä saadaan, että PQA_0B_0 on jännenelikulmio.

Tehtävänannon kulmaehtojen $\angle PP_1C = \angle BAC$ ja $\angle CQ_1Q = \angle CBA$ seurauksena SBQ_1C ja $ARCP_1$ ovat jännenelikulmioita.

Löytyneistä jännenelikulmoista motivoituneena haluamme tietenkin kokeilla pisteen potenssia. Sovelletaan pisteen potenssia pisteille A_1 ja B_1:

$$\begin{aligned} A_1C \cdot A_1B = A_1Q_1 \cdot A_1S = A_1A \cdot A_1A_0 \\ B_1C \cdot B_1A = B_1P_1 \cdot B_1R = B_1B \cdot B_1B_0. \end{aligned}$$

Ylemmästä yhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned} &\triangle A_1SA \sim \triangle A_1A_0Q_1 \\ \Rightarrow\ &\angle A_1Q_1A_0 = \angle A_1AS = \angle A_1PQ, \end{aligned}$$

eli PQA_0Q_1 on jännenelikulmio. Tehdään sama alemmalle pisteen potenssista saadulle yhtälölle:

$$\begin{aligned} &\triangle B_1P_1B_0 \sim \triangle B_2BR \\ \Rightarrow\ &\angle B_1P_1B_0 = \angle B_1BR = \angle B_1QP. \end{aligned}$$

Vastaavasti saadaan, että PQP_1B_0 on jännenelikulmio.

Lopputuloksena PQA_0Q_1 ja PQP_1B_0 ovat jännenelikulmioita. Yhdistettynä aiemmin saatuun tulokseen "PQA_0B_0 on jännenelikulmio" saadaan, että P_1 ja Q_1 ovat samalla ympyrällä kuin P ja Q, ja todistus on valmis. □

Ratkaisu 3 (Olli Järviniemi)

Seuraava ratkaisu on samanhenkinen kuin ratkaisuyritykseni kilpailun aikana, mutta todistukseen on tehty tarvittavia muutoksia ratkaisun korjaamiseksi.

Muutetaan ongelma verkkoja koskevaksi: ihmiset vastaavat solmuja ja kaaret ystävyyssuhteita. Komponentiksi kutsutaan joukkoa solmuja, joista jokainen on yhteydessä toisiinsa joidenkin, tarvittaessa useampien, kaarien kautta. Lisäksi tietysti vaaditaan, että kaikki tällä tavalla saavutettavat solmut kuuluvat kyseiseen komponenttiin, eli jokainen solmu kuuluu täsmälleen yhteen komponenttiin.

Tavoitteena on tehdä operaatioita, jonka jälkeen verkossa jokainen komponentti on enintään kahden solmun kokoinen. Huomaamme, että operaatioita voi tehdä aina vain äärellisen monta kappaletta, koska verkon kaarien määrä pienenee jokaisen operaation toimesta yhdellä.

Aloitetaan helpolla lemmalla:

Lemma 1. *Verkossa on alunperin vain yksi komponentti.*

Verkkoja, joissa on vain yksi komponentti, kutsutaan yhtenäisiksi.

Todistus. Tehdään vastaoletus: verkossa on vähintään kaksi komponenttia. Tällöin verkon pienimmässä komponentissa on enintään 1009 solmua, mutta nyt tämän komponentin solmujen asteiden tulisi olla enintään 1008. Ristiriita. □

Tehdään verkolle mielivaltaisesti joitain kuvatunlaisia operaatioita. Milloin "häviämme", eli milloin verkkoon ei voida tehdä mitään operaatioita, mutta jonkin komponentin koko on vähintään 3? Tämä tapahtuu ainakin silloin, kun kaikki komponentit ovat ns. täydellisiä verkkoja, eli komponentissa kaikki solmut ovat suorassa yhteydessä kaikkiin muihin solmuihin. Osoittautuu, että tämä on ainoa tapa hävitä:

Lemma 2. *Jos verkossa G on vähintään yksi komponentti, joka ei ole täydellinen, voidaan siihen tehdä vielä vähintään yksi operaatio.*

Todistus. Ilman yleisyyden menettämistä voidaan olettaa, että G on yhtenäinen – muuten tarkastellaan verkon G epätäydellistä komponenttia. Lisäksi voidaan olettaa, että $|G| \geq 3$.

Olkoon A jokin verkon G solmu, jonka aste on alle $|G| - 1$. Olkoon Z jokin solmu, johon A ei ole yhteydessä. Koska A ja Z kuuluvat samaan komponenttiin, on olemassa polku $A = V_0 \to V_1 \to V_2 \to \ldots \to V_k \to V_{k+1} = Z$, joiden kautta pääsee solmusta A solmuun Z. Valitaan näistä poluista lyhin mahdollinen. Pätee $k \geq 1$, koska A ja Z eivät ole yhteydessä toisiinsa. Nyt solmun V_k naapurit V_{k-1} ja V_{k+1} eivät ole yhteydessä toisiinsa, ja voidaan suorittaa operaatio solmuille (V_k, V_{k-1}, V_{k+1}). □

Miten päädytään tilanteeseen, jossa jokin komponentti on täydellinen? Kolmen kokoisiin komponentteihin voidaan päätyä syklien kautta: n solmua sisältävässä syklissä ainoa mahdollisuus on siirtyä $n-1$ solmua sisältävään sykliin, kun $n \geq 4$. Kolmen kokoisessa syklissä ei ole enää mitään tehtävää, ja peli on menetetty.

Vähintään neljän kokoiseen täydelliseen komponenttiin siirtyminen voidaan estää hyvin luonnollisella ideaalla. Tutkitaan komponenttia C, joka on $n \geq 4$ solmua sisältävä täydellinen verkko. Millainen operaatio on tehty viimeisenä, jotta on saatu muodostettua C? Ainoa mahdollisuus on verkko C', jossa on solmut $V_1, \ldots, V_{n+1}$, ja jossa V_i ja V_j on yhdistetty kaarella kaikilla $1 \leq i \neq j \leq n$ poislukien pari (V_{n-1}, V_n). Lisäksi V_{n+1} on yhdistetty solmuihin V_n ja V_{n-1}. Verkkoon C päästään suorittamalla operaatio solmuille (V_{n+1}, V_n, V_{n-1}). Tämä voidaan kuitenkin estää tekemällä operaatio solmuille (V_{n-2}, V_{n-1}, V_n). Koska $n \geq 4$, verkko pysyy yhtenäisenä, eikä enää voida päätyä n solmua sisältävään täydelliseen verkkoon.

Viimeinen kriittinen huomio on, että kolmen kokoisen komponentin muodostuminen voidaan estää säilyttämällä jokaisessa vähintään kolmen kokoisessa komponentissa paritonasteinen solmu (huomaa, että operaatiot eivät muuta solmujen asteiden parillisuutta).

Näillä ideoilla saadaan muodostettua seuraava algoritmi tehtävän ratkaisemiseksi.

1. Aloitetaan verkosta G, jossa on 1010 solmua, joiden aste on 1009, ja 1009 solmua, joiden aste on 1010.
2. Valitaan jokin verkon G yhtenäinen komponentti C, jonka koko on yli 2. Jos tällaista ei ole, lopetetaan algoritmi.
3. Tehdään komponenttiin C operaatio, joka toteuttaa seuraavat ehdot:
   - C jakautuu enintään kahdeksi komponentiksi.
   - Muodostuneet komponentit ovat joko enintään kahden kokoisia, tai ne sisältävät paritonasteisen solmun.
   - Muodostuneet komponentit eivät ole vähintään kolmen kokoisia täydellisiä komponentteja.
4. Palataan kohtaan 2.

Enää tulee todistaa, että kohdan 3 mukainen operaatio voidaan tehdä.

Tutkitaan komponenttia C. Valitaan jokin sen solmu R, jolla on pariton aste. Määritellään $S_0 = \{R\}$, S_1 olemaan niiden solmujen joukko, jotka ovat solmun R naapureita, ja rekursiivisesti S_k olemaan niiden solmujen joukko, jotka ovat jonkin joukon S_{k-1} solmun naapureita, mutta jotka eivät kuulu mihinkään joukoista $S_0, S_1, \ldots, S_{k-1}$. Jokaiselle joukon S_k solmulle V määritellään sen *vanhemmaksi* olemaan jokin sellainen solmu $P \in S_{k-1}$, jonka naapuri se on. Jokaisella solmulla $V \neq R$ on siis tasan yksi vanhempi.

Olkoon T verkko, joka saadaan yhdistämällä $A \in C$ ja $B \in C$ jos ja vain jos A on solmun B vanhempi tai toisinpäin. Verkko T on *puu*, eli siinä ei ole syklejä. (Teknisemmin termein: teemme juuresta R leveyshaun ja muodostamme tämän avulla verkon C virittävän puun T.)

Olkoon k suurin luku, jolla $S_k \neq \emptyset$. Puun T *korkeudeksi* määritellään $k+1$. Jos A on solmun B vanhempi, kutsutaan solmua B solmun A (yhdeksi) *lapseksi*. Jos solmulla A ei ole yhtään lasta, kutsutaan sitä puun *lehdeksi*. Solmua R kutsutaan puun *juureksi*.

Tutkitaan kahta tapausta:

Tapaus 1. Puun T korkeus on 2. Toisin sanoen R on naapuri kaikille verkon C solmuille. Koska C ei ole algoritmin toiminnan vuoksi täydellinen, on olemassa solmut $A, B \neq R$, jotka eivät ole yhteydessä toisiinsa, mutta jotka ovat yhteydessä solmuun R. Jakaudutaan kahteen osatapaukseen:

Tapaus 1.1. Jommankumman solmuista A ja B aste on yli 1. Tällöin voidaan suorittaa operaatio solmuille (R, A, B), jolloin puu T säilyy yhtenäisenä, ja täten myös C säilyy yhtenäisenä.

Tapaus 1.2. Molempien solmuista A ja B aste on 1. Tällöin voidaan suorittaa operaatio solmuille (R, A, B), ja komponentti C jakautuu kahteen komponenttiin, joista toisen koko on 2. Solmun R sisältävässä suuremmassa komponentissa on paritonasteinen solmu R. Jos tämä ei johda siihen, että solmun R sisältävä komponentti on vähintään kolmen kokoinen täydellinen verkko, olemme valmiit. Muussa tapauksessa voidaan valita jokin solmun R lapsi D, jonka aste on vähintään 2, ja operaatio voidaan tehdä solmuille (R, A, D). Nyt tilanne on kuin tapauksessa 1.1.

Tapaus 2. Puun T korkeus on vähintään 3.

Olkoot solmun R lapset $V_1, V_2, \ldots, V_c$.

Tapaus 2.1. $c = 1$. Olkoot $W_1, W_2, \ldots, W_m$ solmun V_1 lapset. Mikään solmuista W_i ei ole yhteydessä juureen R, joten voidaan tehdä operaatio (V_1, R, W_i). Jos verkko pysyy yhtenäisenä, hyvä. Jos ei, niin muodostuneet kaksi komponenttia C_1 ja C_2 ovat seuraavanlaiset: C_1 sisältää solmun W_i, solmun W_i lapset, solmun W_i lapsenlapset ja niin edelleen, sekä solmun R. Komponentti C_2 sisältää loput komponentin C solmuista.

Koska komponentissa C on yksi paritonasteinen solmu (nimittäin R), tulee siellä olla toinenkin, koska tunnetusti verkon paritonasteisten solmujen määrä on parillinen. Jos $m \geq 2$, voimme edellä valita indeksin i niin, että C_2 sisältää paritonasteisen solmun. Jos $m = 1$, niin komponentti C_2 tulee sisältämään vain solmun V_1. Tämä kelpaa myös.

Vielä pitää varmistaa, ettei valintojen seurauksena synny vähintään kolmen kokoisia täydellisiä verkkoja. Mikäli verkko säilyy yhtenäisenä tai siitä poistuu vain solmu V_1, niin väite seuraa huomaamalla, ettei R ole yhteydessä lapsenlapsiinsa. Jos taas erotamme komponenttiin C_2 kaikki paitsi yhden solmun V_1 lapsista W_i ja komponentti C_2 muodostaa täydellisen verkon, ovat solmun V_1 kaikki muut lapset $W_1, \ldots, W_{i-1}, W_{i+1}, \ldots, W_m$ yhteydessä toisiinsa. Muutammekin alkuperäistä suunnitelmaa ja teemme operaation solmuille (R, W_i, W_j), missä $j \neq i$. Ei ole vaikeaa nähdä, että verkko pysyy yhtenäisenä eikä muutu täydelliseksi verkoksi.

Tapaus 2.2. $c \geq 2$.

Koska puun T korkeus on vähintään kolme, on olemassa lapsi V_i, jolla on vähintään yksi lapsi. Tutkitaan kahta tapausta.

Tapaus 2.2.1. V_i ja V_j ovat naapureita jollain $j \neq i$. Olkoon L jokin solmun V_i lapsi. Voidaan tehdä operaatio solmuille (V_i, R, L), ja puu T säilyy yhtenäisenä. Syntynyt verkko ei tietenkään ole täydellinen.

Tapaus 2.2.2. V_i ja V_j eivät ole naapureita millään $j \neq i$.

Kaikilla $1 \leq j \leq c$, $j \neq i$ voidaan suorittaa operaatio (R, V_i, V_j). Kuten tapauksessa 2.1, verkko voi pysyä yhtenäisenä, mikä on hyvä, tai siihen syntyy kaksi komponenttia C_1 ja C_2: C_1 sisältää solmut V_i ja V_j, niiden lapset, niiden lapsenlapset ja niin edelleen. C_2 sisältää loput solmuista. Ja kuten tapauksessa 2.1., voidaan j valita niin, että C_1 sisältää jonkin paritonasteisen solmun, ja saamme mitä haluamme. Voimme myös vastaavasti estää täydellisen verkon syntymisen.

Tapauskäsittely osoittaa, että aina voidaan tehdä sopiva valinta algoritmin askeleessa 3. Olemme siis valmiit.

Kommentti. Kilpailun aikana minulla oli pitkälti samanlainen idea kuin esitetyssä ratkaisussa: koetetaan vältellä täydellisiä verkkoja ja syklejä, tutkitaan leveyshaun avulla luotua virittävää puuta, ja koetetaan säilyttää verkko yhtenäisenä tai lohkaista siitä vain pieni pala pois tutkimalla eri tapauksia. Leveyshaku + virittävä puu -idea tuli mieleeni kisakoodauksen puolelta.

Kuten ratkaisussa esitettiin, vähintään neljän kokoinen täydellinen verkko voidaan välttää naiivisti peruuttamalla viimeinen operaatio ja tekemällä jotain muuta. Kilpailussa ajattelin, että vastaava idea toimisi myös sykleille. Näin ei kuitenkaan ole. Tutkitaan viiden kokoista verkkoa, joka koostuu kahdesta kolmiosta: solmu A on yhteydessä solmuihin B, C, D ja E, ja lisäksi solmuparit (B, C) ja (D, E) on yhdistetty kaarilla. Tällöin kaikki operaatiot johtavat viiden kokoiseen sykliin.

Huomataankin, että jos komponentissa on vain parillisasteisia solmuja, ja siinä on vähintään kolme solmua, niin olemme jo hävinneet: voittamiseen vaadittaisiin, että jokainen solmu saataisiin erotettua muista. Miltä näyttäisi viimeinen operaatio? Se vähentää kaarien määrää yhdellä, eli kaarien määrän tulisi alunperin olla yksi, mutta tällöin mitään siirtoa ei ole mahdollista tehdä. Siispä paritonasteiset solmut ovat oleellisessa osassa ratkaisua, mutta en huomannut tätä kilpailun aikana.

Ratkaisu 4 (Akseli Jussinmäki)

Vastaus: Ainoat sopivat parit ovat $(1, 1)$ ja $(3, 2)$.

Ratkaisu: Ideana on tutkia, kuinka monta kertaa yhtälön eri puolet ovat jaollisia kahdella, ja osoittaa, että kun k valitaan niin, että molemmat puolet ovat yhtä monesti jaollisia kahdella, on vasen puoli aina oikeaa suurempi riittävän suurilla muuttujien arvoilla. Muokkaamalla tehtävänannon yhtälön oikeaa puolta saadaan

$$\begin{aligned}&(2^n-1)(2^n-2)(2^n-4)\dots(2^n-2^{n-1})\\ &=(2^n-1)\cdot 2\cdot(2^{n-1}-1)\cdot 2^2\cdot(2^{n-2}-1)\cdot\ldots\cdot 2^{n-1}\cdot(2^1-1)\\ &=2^{\frac{n(n-1)}{2}}(2^n-1)(2^{n-1}-1)\cdot\ldots\cdot(2^1-1).\end{aligned}$$

Näin saadaan helposti selville, kuinka monesti alkuperäisen yhtälön oikea puoli on jaollinen kahdella. On helppoa huomata, tai voi tietää jo valmiiksi, että luvun k kertoma on aina jaollinen kahdella alle k kertaa. Kilpailussa tämä olisi pitänyt todistaa, joten todistetaan se tässä.

Olkoon $v_2(a)$ suurin kakkosen potenssi, joka jakaa luvun a.

Lemma 1: $v_2(k!) < k$ kaikilla k.

Todistus: On tunnettua, että

$$v_2(k!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{k}{2^i} \right\rfloor.$$

Kaava tunnetaan Legendren kaavana. Siinä $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ kertoo, kuinka monta lukua yhdestä k:hon on jaollinen kahdella, $\left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor$ kertoo, kuinka monta lukua yhdestä k:hon on jaollisia neljällä, ja niin edelleen. Kun $2^i > k$, niin $\left\lfloor \frac{k}{2^i} \right\rfloor = 0$, eli voidaan ottaa ääretön summa. Sitä voidaan arvioida ylöspäin poistamalla lattiafunktiot:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{k}{2^i} \right\rfloor < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k}{2^i} = k \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = k.$$

Täten saatiin $v_2(k!) < k$, eli lemma 1 on todistettu.

Nyt tiedämme melko tarkasti, kuinka monesti annetun yhtälön puolet ovat jaollisia kahdella. Yritin tämän jälkeen vertailla puolien v_2-arvoja ja kokoja, mutta yritykset kaatuivat virheisiin ja päädyin vertailemaan myös eri puolien v_3-arvoja. Tämän lähestymistavan sain toimimaan, ja sain tehtävästä 6/7 pistettä, missä yksi piste lähti siitä, että en todistanut lemmaa 1. Toinen lähestymistapa on kuitenkin oikein tehtynä paljon helpompi ja nopeampi, joten esitän tässä, miten tehtävän saa ratkaistua sitä käyttämällä.

Jotta annettu yhtälö pätee, täytyy molempien puolien olla jaollisia kahdella yhtä monta kertaa. Koska oikea puoli on jaollinen kahdella $\dfrac{n(n-1)}{2}$ kertaa, tulee lemman 1 nojalla olla $k > \dfrac{n(n-1)}{2}$. Osoitetaan, että yhtälön vasen puoli on oikeaa suurempi, kun $n \geq 6$. Arvioidaan yhtälön oikeaa puolta ylöspäin:

$$(2^n-1)(2^n-2)(2^n-4)\dots(2^n-2^{n-1}) < 2^n \cdot 2^n \cdots 2^n = (2^n)^n = 2^{n^2}.$$

Käydään tapaus $n = 6$ erikseen. Haluamme, että

$$\Big(\frac{n(n-1)}{2}\Big)! > 2^{n^2},$$

eli että $15! > 2^{36}$. Tylsällä suoralla laskulla saadaan $15! = 1\,307\,674\,368\,000 > 10^{12}$. Lukua 2^{36} voidaan nyt arvioida mukavasti:

$$2^{36} = (2^3)^{12} = 8^{12} < 10^{12}.$$

Tapaus $n = 6$ on näin käyty. Käydään sitten läpi tapaus $n \geq 7$. Hyödyntämällä edellistä kohtaa saadaan

$$\Big(\frac{n(n-1)}{2}\Big)! = 15! \cdot 16 \cdot 17 \cdots \frac{n(n-1)}{2} > 2^{36} \cdot 16^{\frac{n(n-1)}{2}-15} = 2^{2n(n-1)-24}.$$

Tämä on suurempi kuin 2^{n^2}, kun

$$2n(n-1) - 24 > n^2,$$

eli

$$n^2 - 2n - 24 > 0,$$

mikä pätee, kun $n \geq 7$. Siis

$$k! > \Big(\frac{n(n-1)}{2}\Big)! > 2^{n^2} > (2^n-1)(2^n-2)(2^n-4)\dots(2^n-2^{n-1}),$$

kun $n \geq 7$. Enää tarvitsee käydä läpi tapaukset $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Merkitään annetun yhtälön oikean puolen arvoa O_n:
$n = 1$: $O_1 = 1 = 1!$, mikä antaa yhden vastauksen.
$n = 2$: $O_2 = 6 = 3!$, mikä antaa toisen vastauksen.
$n = 3$: $5! = 120 < O_3 = 168 < 720 = 6!$.
$n = 4$: $7! = 5040 < O_4 = 20160 < 40320 = 8!$.
$n = 5$: $10! = 3628800 < O_5 = 9999360 < 39916800 = 11!$.

Kaikki tapaukset on nyt käyty läpi, ja yhtälön toteuttavat parit (k, n) ovat $(1, 1)$ ja $(3, 2)$.

Tehtävä 5 kisaajan silmin (Roope Salmi)

Jännitystä ilmassa, kuten kuuluukin. Urheiluhallin värikäs katsomo ja jäljellä olevasta ajasta muistuttava kellonäyttö pääsevät välillä häritsemään keskittymistä. Uskon saaneeni päivän "helpoimpaan" tehtävään, eli tehtävään 4 joitain hyviä ideoita, mutta en vaan saa yksityiskohtia toimimaan. Päätän siirtyä seuraavaan tehtävään. Pöytä on pieni, joten joudun järjestelemään papereita tovin. Jokaiselle tehtävälle toivotaan suttumerkinnätkin erikseen merkityillä papereilla, koska niiden perusteella voidaan joskus antaa pisteitä.

Silmäillessäni kaikkia tehtäviä alussa, tehtävä 5 herätti innostusta, koska se muistutti kovasti tietotekniikan tehtävää. Siis sellaista, jonka voisin jopa osata ratkaista. Aloitin tietotekniikan kilpailujen parissa ja olen harjoitellut niitä varten paljon. Antti Laaksonen kirjoittikin kyseisestä tehtävästä tietotekniikan näkökulmasta (Solmu 3/2019), mutta esitän tässä oman ratkaisuni. Itsevarmuutta lisää aiempi onnistuminen lukion valtakunnallisen matematiikkakilpailun viimeisessä tehtävässä, joka oli myös tietotekniikan tehtävän tyylinen. Kukaan muu ei saanut tehtävästä silloin täysiä pisteitä.

IMO-brändätyn juomapullon kloorinhajuinen hanavesi alkaa olla haaleaa. Ensimmäisen koepäivän jälkeen oivalsin, että juomapullo olisi kannattanut tuoda kisahalliin vajaana, jotta siihen olisi sitten voinut pyytää lisää, ehkä vähän miellyttävämpää juomavettä valvojilta, "the invigilators". Tämä pääsi kuitenkin tänään unohtumaan.

Tehtävässä on kaksi osaa, joten luultavasti helpomman (a)-kohdan ratkaisu on iloksi myös (b)-kohdan kanssa. Päätän olla pohtimatta jälkimmäistä kohtaa ennen kuin osaan ratkaista ensimmäisen kohdan, huolimatta siitä, että (b)-kohdan ratkaisu johtaisi suoraan myös (a)-kohdan ratkaisuun.

Kokemus antaa jo monta havaintoa: Kolikkoriviä voi ajatella binäärimerkkijonona. (Tämä tekee tehtävästä erityisen kotoisan tuntuisen tietotekniikan kannalta.) Prosessin päättyminen aina tarkoittaisi, että kolikkorivit muodostaisivat puurakenteen, jossa kaaret vastaavat yhden operaation tekemistä.

Tärkein ensihavainto on kuitenkin se, että prosessi muistuttaa usein itseään pienemmässä tapauksessa. Esimerkiksi jos viimeisessä kohdassa oleva kolikko on T, käyttäytyy prosessi käytännössä täysin samalla tavalla, kuin jos kolikkoja olisikin $n-1$ ja viimeinen kolikko unohdettaisiin (tapaus 1). Tämä siksi, että T-kolikko lopussa ei lisää summaan k mitään, eikä se koskaan voi kääntyä H-kolikoksi, koska jotta olisi $k = n$, kaikkien kolikoiden täytyisi olla H-puoli ylöspäin. Tämä vihjailee hyödyntämään induktiota kolikoiden määrän suhteen.

Toinen mielenkiintoinen induktiivinen havainto löytyy tapauksesta, jossa jonon ensimmäinen kolikko on H (tapaus 2). Tämä ensimmäinen kolikko voi kääntyä vasta, kun $k = 1$, eli kaikki muut kolikot näyttävät

T-puolta. Huomataan, että loppu kolikkojonosta käyttäytyy itse asiassa jälleen samalla tavalla kuin tapaus $n-1$, koska alun H lisää aina summaan k yhden, ja lopun kolikkojonon indeksit alkavat yhtä myöhemmin, luvusta 2. Nojaten induktio-oletukseen loppu kolikkojono on lopulta pelkkää T:tä, jolloin ensimmäinenkin kolikko kääntyy T:ksi, ja prosessi päättyy.

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & 3 & \ldots & n \\
\hline
H & ? & ? & \ldots & ? \\
 & & \multicolumn{3}{l}{\downarrow \text{(induktio-oletus)}} \\
\underline{H} & T & T & \ldots & T \\
T & T & T & \ldots & T
\end{array}$$

Eväänä oli suklaakeksejä ja Alpen-patukoita, jotka ostimme ennen ensimmäistä koepäivää kampuksen marketista joukkueen kanssa. Osoittautui, että suklaakeksit eivät olleet niin hyviä kuin luulin. Muuta ei kuitenkaan ole, joten mutustelen niitä. Onneksi kilpailuun ei tultu herkuttelemaan.

Yritän yleistää ideaa. Oikeastaan jonon alussa voi olla mikä tahansa määrä m H-kolikoita, ja loppu jonosta käyttäytyy samaan tapaan kuin $n-m$ pituinen kolikkojono. Päädyn kuitenkin siihen tulokseen, että tämä tai muut vastaavat temppuilut eivät auta, vaan on järkevämpää keskittyä suoraviivaiseen induktioon, jossa riittää redusoida tapaus yksittäisten kolikoiden verran pienempään tapaukseen.

Tässä kohtaa auttaa eristää mahdolliset tapaukset toisistaan. Olemme jo käsitelleet tapaukset, joissa jono on muotoa "$\ldots T$" tai "$H\ldots$", joten jäljelle jää tapaus, jossa jono on muotoa "$T\ldots H$" (tapaus 3). Samanlaista ideaa soveltaen, jonon ensimmäinen kolikko ei voi kääntyä ennen kuin kaikki keskellä olevat kolikot ovat T-puoli ylöspäin. Viimeinen kolikko ei myöskään voi kääntyä ennen ensimmäistä. Siispä tässä tapauksessa jonon keskellä tapahtuu ensin prosessi koolla $n-2$, alkaen indeksistä 2, koska alueen ulkopuolella on yksi H. Tämän jälkeen ensimmäinen kolikko kääntyy. Entä sen jälkeen? Tiedämme nyt kaikkien kolikoiden asennot, joten prosessi voi edetä vain yhdellä tavalla. On helppoa nähdä, että kolikot kääntyvät vuorotellen alusta loppuun, kunnes kaikki kolikot ovat H-puoli ylöspäin. Sen jälkeen kolikot kääntyvät vielä kerran vuoroillaan lopusta alkuun, ja prosessi päättyy. Esimerkki prosessin kulusta neljän pituisella jonolla:

$$\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
T & ? & ? & H \\
 & & \multicolumn{2}{l}{\downarrow \text{(induktio-oletus)}} \\
\underline{T} & T & T & H \\
H & \underline{T} & T & H \\
H & H & \underline{T} & H \\
H & H & H & \underline{H} \\
H & H & \underline{H} & T \\
H & \underline{H} & T & T \\
\underline{H} & T & T & T \\
T & T & T & T
\end{array}$$

On pientä aihetta juhlaan: (a)-kohta vaikuttaisi olevan ratkaistu. En mene asioiden edelle, vaan kirjoitan ratkaisun vastauspaperiin ennen (b)-osaan siirtymistä. Jälkikäteen katsottuna tämä oli ajanhukkaa, ottaen huomioon kuinka samanlainen koko tehtävän ratkaisu olisi. Puhtaaksi kirjoittaessa joutuu kuitenkin käymään kaikki yksityiskohdat tarkasti läpi, joten parempi pelata varman päälle.

(b)-kohdasta tulee heti mieleen kilpaohjelmoinnista tuttu "dynaaminen ohjelmointi". Tässä yhteydessä hyötyä on siitä, että on kokemusta rekursioyhtälöiden muodostamisesta ja käsittelystä.

Määritellään funktio f, jolla

$$f(n) = \sum_{|C|=n} L(C),$$

eli kaikkien pituutta n olevien kolikkojonojen operaatioiden yhteismäärä.

Lopullinen vastaus, eli keskiarvo tulee olemaan $\frac{f(n)}{2^n}$, mutta arvelen, että suora summa on helpompi muodostaa.

(a)-kohdan induktio antaa hyvin luonnollisen lähtökohdan rekursioyhtälön rakentamiselle. Päätellään nyt operaatioiden määrä jokaiselle tapaukselle erikseen:

Tapaus 1: "$\ldots T$". Tässä tapauksessa jokaisella jonolla prosessi käyttäytyy samoin kuin jos pituus olisi $n-1$. Operaatioita kertyy siis yhteensä $f(n-1)$.

Tapaus 2 eli "$H\ldots$" oli vielä helppo käsitellä (a)-kohdassa, mutta nyt kahdesti laskemisen välttämiseksi on määrättävä erikseen, että jonon viimeinen kolikko on H. Epätoivossa ehdin jo epäillä, että en ole lähelläkään toimivaa ratkaisua tehtävään. Vähän pidemmän hetken pähkäilyn jälkeen tajuan, että pituutta $n-1$ olevista jonoista ne, jotka päättyvät H-kolikkoon, saadaan poistamalla ne, jotka edustavat tapausta 1.

Tapausta 1 edustavien jonojen operaatioiden yhteismäärä on pituudella $n-1$ täsmälleen $f(n-2)$. Operaatiota tehdään siis $f(n-1)-f(n-2)$ kertaa kolikkojonon loppupäälle, jonka jälkeen jää vielä ensimmäisen kohdan H. Eri alkuperäisiä yhdistelmiä C, jotka vastaavat tätä tapausta on 2^{n-2}, sillä ensimmäinen ja viimeinen kolikko on kiinnitetty. Jokaiselle näistä yhdistelmistä tehdään yksi operaatio, joka kääntää ensimmäisen kolikon. Yhteensä saadaan $f(n-1)-f(n-2)+2^{n-2}$.

Tapaus 3: "$T\ldots H$". Tässä käsitellään ensin keskellä oleva pituuden $n-2$ alue, jonka jälkeen kaikki alun $n-1$ T-kolikkoa käännetään. Lopuksi jokainen kolikko käännetään lopusta alkuun T:ksi. Tämä tekee $n-1+n = 2n-1$ operaatiota. Eri yhdistelmiä on jälleen 2^{n-2}, joten operaatioita on yhteensä $f(n-2)+2^{n-2}(2n-1)$.

Nämä kolme tapausta ovat kaikki erillisiä, ja ne kattavat kaikki mahdolliset kolikkoyhdistelmät. Siispä näiden summa on operaatioiden yhteismäärä pituudella n. Rekursiokaava sievenee muotoon

$$f(n) = 2f(n-1) + 2^{n-1}n.$$

Se, että $f(n-2)$-termi sievenee kokonaan pois, on mukava yllätys.

Pohjatapauksena $f(1) = 1$, sillä $L(T) = 0$ ja $L(H) = 1$. Kaavan todistus toimii myös tapauksessa $n = 2$, jos hyväksytään tyhjän jonon vaatimien operaatioiden määräksi $f(0) = 0$.

Kilpailun aikana taisin avata rekursiokaavan tässä muodossa, mutta on helpompi vaihtaa keskiarvoon tässä kohtaa. Olkoon

$$g(n) = \frac{f(n)}{2^n}$$
$$2^n g(n) = f(n).$$

Korvataan tämä rekursioyhtälöön:

$$2^n g(n) = 2 \cdot 2^{n-1} g(n-1) + 2^{n-1} n$$
$$g(n) = g(n-1) + \frac{n}{2}.$$

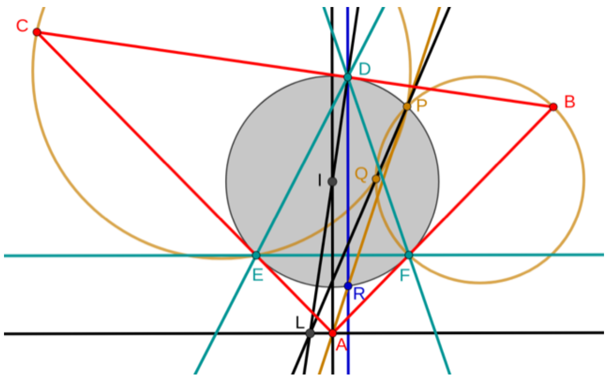
Tästä nähdäänkin, koska $g(1) = \frac{f(1)}{2} = \frac{1}{2}$, että $g(n)$ on aritmeettinen summa:

$$g(n) = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \cdots + \frac{n}{2}.$$

Vastaus on siis $\frac{n^2+n}{4}$.

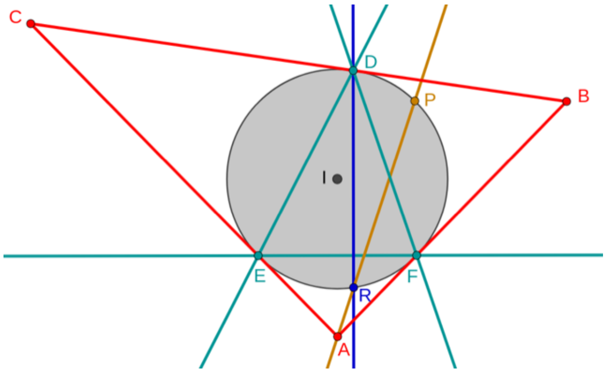
Saatuani vastauksen selville ympyröin lausekkeen suttupaperista, ihan varmuuden vuoksi. Ratkaisun puhtaaksi kirjoittamisessa menisi vielä oma aikansa. Olin kuitenkin tyytyväinen ratkaisuun, enemmän kuin ensimmäisen kilpailupäivän tehtävän 1 ratkaisuun, johon käytin turhan paljon aikaa. Eväiden syönnin ja urheiluhallin pihalle tuoduissa WC-vuokraperäkärryissä käynnin jälkeen siirryn takaisin tehtävään 4 optimistisin mielin.

Ratkaisu 6 (Hermanni Huhtamäki)



Koko kuva.

Ratkaisun yleisenä suunnitelmana on osoittaa, että pisteeseen A suoralle AI piirretyn normaalin ja suoran DI leikkauspiste (olkoon L) on samalla suoralla P:n ja Q:n kanssa. Tätä varten määritetään kolmioiden BFP ja CEP ulkoympyröiden keskipisteet ja osoitetaan, että keskipisteiden välinen suora on kohtisuorassa suoraa PL vasten.



Konstruktion vaihe 1: sisäänpiirretty ympyrä sekä pisteet R ja P.

Ratkaistaan tehtävä käyttäen kompleksilukuja. Olkoon kolmion ABC sisäympyrä kompleksitason keskelle piirretty yksikköympyrä. Tällöin I sijaitsee origossa (ts. $I = 0 + 0i$) ja pisteet D, E ja F ympyrän kehällä. Olkoot nyt $D = x$, $E = y$ ja $F = z$. Valitaan lisäksi pisteiden E ja F paikat ympyrällä siten, että niiden kautta piirretty suora kulkee reaaliakselin suuntaisesti. Tämä voidaan tehdä kiertämällä kuviota I:n ympäri (ks. vaiheen 1 kuva).

Lasketaan seuraavaksi pisteen R esitys kompleksiluvuin. Pisteiden E ja F tulo yz on -1, koska ne sijaitsevat yksikköympyrän pisteen $-i$ suhteen symmetrisesti (niiden vaihekulmien summa on $540° \equiv 180°$ ja pituuksien tulo $1 \cdot 1 = 1$). Siispä $-yz$ on 1. Koska tehtävänannon mukaan suora DR on kohtisuorassa suoran EF suhteen ja molemmat pisteet sijaitsevat yksikköympyrällä, on $R \cdot D = 1$ (vaihekulmat yhtä suuret, mutta vastakkaismerkkiset ja pituudet ykkösiä), jolloin $R = \frac{1}{D} = \frac{1}{x}$. Kun edelliset tiedot yhdistetään, saadaan $R = \frac{-yz}{x}$.

A:n kompleksilukuesitys saadaan E:n ja F:n avulla. Olkoon K janan EF keskipiste, joka on $\frac{y+z}{2}$. Yhdenmuotoisten kolmioiden IEK ja IEA avulla saadaan, että $|IK| \cdot |IA| = 1$. Koska sekä A:n että K:n vaihekulma on $-90°$, $A \cdot \overline{K} = 1$. Siispä $A = \frac{1}{\overline{K}} = \overline{\left(\frac{2}{y+z}\right)} = \frac{2}{\overline{y}+\overline{z}}$. Ja koska y ja z ovat yksikköympyrällä, $\overline{y} = \frac{1}{y}$ ja $\overline{z} = \frac{1}{z}$. Nyt

$$A = \frac{2}{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = \frac{2}{\frac{y+z}{yz}} = \frac{2yz}{y+z} \text{ ja } \overline{A} = \frac{2}{y+z}.$$

Tällöin A:n ja R:n avulla saadaan niiden kanssa samalla suoralla oleva P.

On tunnettua, että mitkä tahansa kolme kompleksilukua a, b ja c ovat samalla suoralla jos ja vain jos

$$\frac{c-a}{c-b} = \overline{\left(\frac{c-a}{c-b}\right)}. \tag{1}$$

(Ks. esimerkiksi Evan Chenin kirja Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads, lemma 6.6, s. 100.)

Pitäisi löytää sellainen suoralla AR oleva piste P, joka on yksikköympyrällä (eli jolla $\overline{P} = \frac{1}{P}$). Sovelletaan kaavaa 1 pisteille A, P ja R, jolloin saadaan, että

$$\frac{A-P}{A-R} = \overline{\left(\frac{A-P}{A-R}\right)} = \frac{\overline{A}-\frac{1}{P}}{\overline{A}-\frac{1}{R}}.$$

Sievennetään yhtälö puolittain. Aloitetaan vasemmalla puolella. Nyt

$$\begin{aligned}\frac{A-P}{A-R} &= \frac{A-P}{A-R} + \left(1 - \frac{A-R}{A-R}\right)\\ &= 1 + \frac{A-P-(A-R)}{A-R}\\ &= 1 + \frac{R-P}{A-R}.\end{aligned}$$

Tehdään vastaavalla tavalla oikealle puolelle. Tulokseksi tulee

$$\frac{\overline{A}-\frac{1}{P}}{\overline{A}-\frac{1}{R}} = 1 + \frac{\overline{A}-\frac{1}{P}-(\overline{A}-\frac{1}{R})}{\overline{A}-\frac{1}{R}} = 1 + \frac{\frac{1}{R}-\frac{1}{P}}{\overline{A}-\frac{1}{R}}.$$

Yhdistetään saadut tulokset ja vähennetään ykköset puolittain, jolloin saadaan

$$\frac{R-P}{A-R} = \frac{\frac{1}{R}-\frac{1}{P}}{\overline{A}-\frac{1}{R}}.$$

Kerrotaan ristiin nimittäjillä:

$$(R-P)(\overline{A}-\frac{1}{R}) = (A-R)(\frac{1}{R}-\frac{1}{P}).$$

Kerrotaan vielä RP:llä:

$$\begin{aligned}P(R-P)(\overline{A}R-1) &= (A-R)(P-R)\\ P(-1)(P-R)(\overline{A}R-1) &= (A-R)(P-R).\end{aligned}$$

Supistetaan $P-R$ pois:

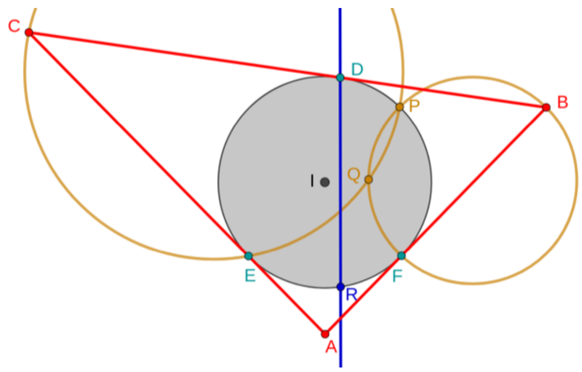
$$\begin{aligned}-P(\overline{A}R-1) &= (A-R)\\ P(1-\overline{A}R) &= A-R.\end{aligned}$$

Nyt P:n arvoksi tulee

$$P = \frac{A-R}{1-\overline{A}R}.$$

Sijoitetaan A:n, $\overline{A}$:n ja R:n paikalle niille lasketut arvot ja sievennetään.

$$\begin{aligned}P &= \frac{\frac{2yz}{y+z} - \frac{-yz}{x}}{1 - \frac{-yz}{x}\cdot\frac{2}{y+z}} = \frac{\frac{2xyz}{x(y+z)} + \frac{yz(y+z)}{x(y+z)}}{\frac{x(y+z)}{x(y+z)} - \frac{-2yz}{x(y+z)}}\\ &= \frac{2xyz + yz(y+z)}{x(y+z)+2yz} = \frac{yz(2x+y+z)}{2yz+x(y+z)}.\end{aligned}$$



Vaihe 2: Ympyrät PCE ja PBF ja niiden leikkaukset.

Olkoon piste O_B kolmion BFP ulkoympyrän keskipiste. On tunnettua, että keskipiste saadaan lasketuksi kaavalla

$$O_B = \begin{vmatrix} P & P\overline{P} & 1\\ F & F\overline{F} & 1\\ B & B\overline{B} & 1\end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} P & \overline{P} & 1\\ F & \overline{F} & 1\\ B & \overline{B} & 1\end{vmatrix} \tag{2}$$

(ks. esimerkiksi Evan Chenin kirja Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads, lemma 6.24, s. 108), jossa P:n, F:n ja B:n paikalla voisi tietenkin olla minkä tahansa kolmion kärkipisteet, jonka ulkoympyrän keskipistettä lasketaan. Koska P ja F ovat yksikköympyrällä, $P\cdot\overline{P} = P\cdot\frac{1}{P} = 1$ ja $F\cdot\overline{F} = 1$. Lisäksi B:n arvoksi voidaan laskea $B = \frac{2xz}{x+z}$ (vertaa A:n arvon laskemiseen). Sijoitetaan pisteiden arvot kaavaan 2:

$$O_B = \begin{vmatrix} P & 1 & 1\\ z & 1 & 1\\ \frac{2xz}{x+z} & \frac{4xz}{(x+z)^2} & 1\end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} P & P^{-1} & 1\\ z & z^{-1} & 1\\ \frac{2xz}{x+z} & \frac{2}{x+z} & 1\end{vmatrix}.$$

Lasketaan ensiksi osoittajan arvo. Aloitetaan kertomalla alin rivi $(x+z)^2$:lla:

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix} P & 1 & 1\\ z & 1 & 1\\ \frac{2xz}{x+z} & \frac{4xz}{(x+z)^2} & 1\end{vmatrix}\\ &= \frac{1}{(x+z)^2}\begin{vmatrix} P & 1 & 1\\ z & 1 & 1\\ 2xz(x+z) & 4xz & (x+z)^2\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Lasketaan determinantti. Aloitetaan positiivisista viistoriveistä ylävasemmalta alaoikealle ja sitten jatketaan negatiivisiin:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(x+z)^2} \cdot \big(P(x+z)^2 + 2xz(x+z) + 4xz^2 \\
&\quad - P(4xz) - z(x+z)^2 - 2xz(x+z)\big) \\
&= \frac{1}{(x+z)^2} \cdot \left(P(x+z)^2 + 4xz^2 - P(4xz) - z(x+z)^2\right) \\
&= \frac{1}{(x+z)^2} \cdot \left((P-z)(x+z)^2 + (z-P)(4xz)\right) \\
&= \frac{1}{(x+z)^2} \cdot \left((P-z)(x^2+2xz+z^2) - (P-z)(4xz)\right) \\
&= \frac{1}{(x+z)^2} \cdot \left((P-z)(x^2-2xz+z^2)\right) \\
&= \frac{(P-z)(x-z)^2}{(x+z)^2}.
\end{aligned}
$$

Siirrytään nimittäjän arvon laskemiseen. Kerrotaan alin rivi $x+z$:lla:

$$
\begin{vmatrix} P & P^{-1} & 1 \\ z & z^{-1} & 1 \\ \frac{2xz}{x+z} & \frac{2}{x+z} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{x+z} \begin{vmatrix} P & P^{-1} & 1 \\ z & z^{-1} & 1 \\ 2xz & 2 & x+z \end{vmatrix}.
$$

Lasketaan determinantti vinoriveittäin ja otetaan tekijöiksi P, $\frac{1}{P}$ ja 2:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{x+z} \cdot \Bigg(\frac{P(x+z)}{z} + \frac{2zx}{P} + 2z \\
&\qquad - 2P - \frac{z(x+z)}{P} - \frac{2xz}{z} \Bigg) \\
&= \frac{1}{x+z} \cdot \Bigg(P\left(\frac{x+z}{z} - 2\right) + \frac{1}{P} \\
&\qquad (2xz - z(x+z)) + 2(z-x) \Bigg) \\
&= \frac{1}{x+z} \cdot \left(P\frac{x-z}{z} + \frac{1}{P}(xz - z^2) - 2(x-z) \right) \\
&= \frac{1}{x+z} \cdot \left(\frac{P}{z}(x-z) + \frac{z}{P}(x-z) - 2(x-z) \right) \\
&= \frac{x-z}{x+z} \cdot \left(\frac{P}{z} + \frac{z}{P} - 2 \right) \\
&= \frac{x-z}{x+z} \cdot \left(\frac{P^2}{Pz} + \frac{z^2}{Pz} - \frac{2Pz}{Pz} \right) \\
&= \frac{x-z}{x+z} \cdot \frac{(P-z)^2}{Pz}.
\end{aligned}
$$

Yhdistetään saadut osoittajan ja nimittäjän arvot ja supistetaan $(x-z)$, $(x+z)$ ja $(P-z)$:

$$
\begin{aligned}
O_B &= \frac{(P-z)(x-z)^2}{(x+z)^2} \Big/ \left(\frac{x-z}{x+z} \cdot \frac{(P-z)^2}{Pz} \right) \\
&= \frac{x-z}{x+z} \Big/ \frac{P-z}{Pz} = \frac{x-z}{x+z} \cdot \frac{Pz}{P-z} \\
&= \frac{x-z}{x+z} \cdot \frac{z}{1-\frac{z}{P}} = \frac{x-z}{x+z} \cdot \frac{1}{\frac{1}{z} - \frac{1}{P}}.
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan P:n paikalle sille aiemmin laskettu arvo:

$$
\begin{aligned}
O_B &= \frac{x-z}{x+z} \cdot \frac{1}{\frac{1}{z} - \frac{2yz + x(y+z)}{yz(2x+y+z)}} \\
&= \frac{x-z}{x+z} \cdot \frac{1}{\frac{y(2x+y+z)}{yz(2x+y+z)} - \frac{2yz+x(y+z)}{yz(2x+y+z)}} \\
&= \frac{x-z}{x+z} \cdot \frac{yz(2x+y+z)}{y(2x+y+z) - (2yz+xy+xz)} \\
&= \frac{x-z}{x+z} \cdot \frac{yz(2x+y+z)}{2xy + y^2 + zy - 2yz - xy - xz)} \\
&= \frac{x-z}{x+z} \cdot \frac{yz(2x+y+z)}{xy + y^2 - yz - xz}.
\end{aligned}
$$

Tämä sievenee vielä hiukan muotoon

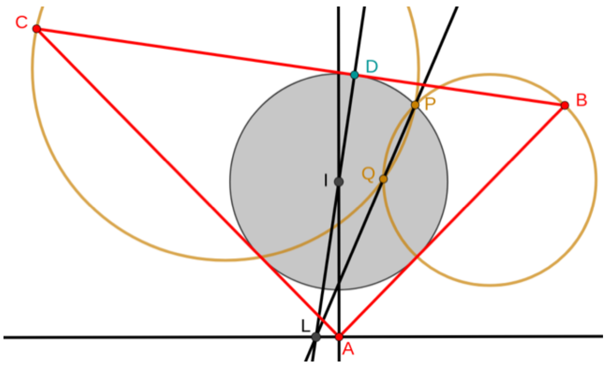
$$
O_B = \frac{x-z}{x+z} \cdot \frac{yz(2x+y+z)}{(y-z)(x+y)}.
$$

Vastaavasti saadaan kolmion CEQ ulkoympyrän keskipisteeksi

$$
O_C = \frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{yz(2x+y+z)}{(z-y)(x+z)}.
$$

Kun nämä vähennetään toisistaan, saadaan

$$
\begin{aligned}
&O_B - O_C \\
&= \frac{(x-z)yz(2x+y+z)}{(x+z)(y-z)(x+y)} - \frac{(x-y)yz(2x+y+z)}{(x+y)(z-y)(x+z)} \\
&= \frac{(x-z)yz(2x+y+z) + (x-y)yz(2x+y+z)}{(x+z)(y-z)(x+y)} \\
&= \frac{yz(2x+y+z)\left((x-z)+(x-y)\right)}{(x+y)(x+z)(y-z)} \\
&= \frac{yz(2x+y+z)(2x-y-z)}{(x+y)(x+z)(y-z)}.
\end{aligned}
$$



Vaihe 3: Lopullinen kuva.

Lasketaan vielä L, joka määritellään suoran AI pisteen A kautta kulkevan normaalin ja suoran DI leikkauspisteenä. Koska L kuuluu suoralle ID, L:n vaihekulma on puoli kierrosta suurempi kuin D:n vaihekulma, jolloin $\frac{L}{x}$ on reaalinen. Tästä seuraa, että $\overline{L} = \frac{L}{x^2}$, koska sekä vaihekulmaksi että pituudeksi tulee oikea (L kierretään ensimmäisellä x:llä jakamisella reaaliakselille ja toisella alkuperäisen vaihekulman verran reaaliakselin toiselle puolelle. Pituuskin pysyy oikeana, koska x sijaitsee yksikköympyrällä ja ykkösellä jakaminen ei siihen vaikuta).

Lisäksi tiedämme, että $L-A$ kuuluu reaaliakselille. Tämä on selvää, sillä IA on imaginaariakselin suuntainen, jolloin A:n kautta piirretty L:n kautta kulkeva normaali on reaaliakselin suuntainen, mistä seuraa, että L:n ja A:n imaginaariosat ovat yhtä suuret. Tiedämme myös, että $y+z$ kuuluu imaginaariakselille, koska y ja z sijaitsevat symmetrisesti imaginaariakselin suhteen. Siispä

$$\frac{L-A}{y+z} = \frac{L-\frac{2yz}{y+z}}{y+z} \in i\mathbb{R}.$$

Kun puhtaasti imaginaarinen luku summataan sen liittoluvun kanssa, imaginaariosasta tulee nolla ja reaaliosa säilyy nollana. Sovelletaan tätä tietoa edelliseen tulokseen:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{L-A}{y+z} + \overline{\left(\frac{L-A}{y+z}\right)} = \frac{L-A}{y+z} + \frac{\overline{L}-\overline{A}}{\overline{y}+\overline{z}} \\
&= \frac{L-\frac{2yz}{y+z}}{y+z} + \frac{\frac{L}{x^2}-\frac{2}{y+z}}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \\
&= \frac{\frac{L(y+z)-2yz}{y+z}}{y+z} + \frac{\frac{L(y+z)-2x^2}{x^2(y+z)}}{\frac{z+y}{yz}} \\
&= \frac{L(y+z)-2yz}{(y+z)^2} + \frac{(L(y+z)-2x^2)yz}{x^2(y+z)(z+y)} \\
&= \frac{(L(y+z)-2yz)x^2 + (L(y+z)-2x^2)yz}{x^2(y+z)^2}.
\end{aligned}$$

Poimitaan erilleen L:n sisältävät termit (huom. L:n puolelta supistetaan $y+z$ ja toiselta puolelta x^2):

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{L(y+z)x^2 - 2yzx^2 + L(y+z)yz - 2x^2yz}{x^2(y+z)^2} \\
&= \frac{Lx^2+Lyz}{x^2(y+z)} + \frac{-2yz-2yz}{(y+z)^2} \\
\Leftrightarrow & \frac{Lx^2+Lyz}{x^2(y+z)} = \frac{4yz}{(y+z)^2}.
\end{aligned}$$

Jaetaan L:n kerroin pois:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{4yz}{(y+z)^2} \Big/ \frac{x^2+yz}{x^2(y+z)} \\
&= \frac{(4yz)x^2(y+z)}{(y+z)^2(x^2+yz)} \\
&= \frac{4yzx^2}{(y+z)(x^2+yz)}.
\end{aligned}$$

Siten $P-L$

$$\begin{aligned}
&= \frac{yz(2x+y+z)}{2yz+x(y+z)} - \frac{4x^2yz}{(x^2+yz)(y+z)} \\
&= \frac{yz(2x+y+z)}{2yz+xy+xz} - \frac{4x^2yz}{(x^2+yz)(y+z)}.
\end{aligned}$$

Yhdistetään jakolaskut, jolloin alakerraksi tulee

$$(y+z)(x^2+yz)(2yz+xy+xz)$$

ja yläkerraksi

$$yz \cdot \Big((2x+y+z)(x^2+yz)(y+z) - 4x^2(2yz+xy+xz)\Big).$$

Sievennetään vielä yläkerran loppuosaa (se pl. yz) sellaiseen kertolaskumuotoon, että myöhemmin jakolaskua tehtäessä olisi mahdollista supistaa osa siitä pois. Seuraavissa välivaiheissa tullaan käyttämään hahmottamista mahdollisesti helpottavia, matemaattisesti merkityksettömiä, sulkuja.

$$\begin{aligned}
&(2x+y+z)(x^2+yz)(y+z) - 4x^2(2yz+xy+xz) \\
=&(2x+y+z)(x^2y+x^2z+y^2z+z^2y) \\
&-8x^2yz-4x^3y-4x^3z \\
=&2x^3y+2x^3z+2y^2xz+2z^2xy+x^2y^2 \\
&+x^2yz+y^3z+y^2z^2+x^2yz+x^2z^2 \\
&+y^2z^2+z^3y-8x^2yz-4x^3y-4x^3z \\
=&-(2x^3y+2x^3z+6x^2yz-2y^2xz-2z^2xy \\
&-x^2y^2-x^2z^2-2y^2z^2-y^3z-z^3y) \\
=&-((2x^3y-x^2y^2-x^2yz)+(2x^3z-x^2yz-x^2z^2) \\
&+2x^2yz+6x^2yz-2y^2xz-2z^2xy-2z^2xy \\
&-y^2z^2-y^3z+(2z^2xy-y^2z^2-z^3y)) \\
=&-((2x^3y-x^2y^2-x^2yz)+(2x^3z-x^2yz-x^2z^2) \\
&+(8x^2yz-4y^2xz-4z^2xy)+(2y^2xz-y^3z-y^2z^2) \\
&+(2z^2xy-y^2z^2-z^3y)) \\
=&-((2x-y-z)(x^2y+x^2z+4xyz+y^2z+z^2y)).
\end{aligned}$$

Kun tämä yhdistetään alakertaan, saadaan $P-L=$

$$-yz \cdot \frac{(2x-y-z)(x^2y+x^2z+y^2z+z^2y+4xyz)}{(y+z)(x^2+yz)(2yz+xy+xz)}.$$

Tiedetään, että kaksi suoraa ovat kohtisuorassa toisiaan vasten, jos ja vain jos niiden erotuksien jakolasku antaa reaalisen tuloksen eli

$$\frac{O_B-O_C}{P-L} + \overline{\left(\frac{O_B-O_C}{P-L}\right)} = 0. \qquad (3)$$

(Ks. esimerkiksi Evan Chenin kirja Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads, lemma 6.5, s. 100.)

Lasketaan ensiksi vasemmanpuoleinen jakolasku; sijoitetaan erotusten paikalle niille lasketut arvot, jolloin ylhäälle tulee $O_B-O_C=$

$$\frac{yz(2x+y+z)(2x-y-z)}{(x+y)(x+z)(y-z)}$$

ja alhaalle jää $P-L=$

$$-yz \cdot \frac{(2x-y-z)(x^2y+x^2z+y^2z+z^2y+4xyz)}{(y+z)(x^2+yz)(2yz+xy+xz)}.$$

Sievennetään yz ja $2x-y-z$ sekä merkataan osat jakolaskuun (huom! pilkottu kahteen osaan, jotta mahtuisi palstalle):

$$\frac{O_B-O_C}{P-L} = -\frac{(2x+y+z)}{(x+y)(x+z)(y-z)} \cdot \frac{(y+z)(x^2+yz)(2yz+xy+xz)}{(x^2y+x^2z+y^2z+z^2y+4xyz)}.$$

Lasketaan edellisen liittoluku muistaen, että x, y ja z ovat yksikköympyrällä, jolloin niiden liittoluvut ovat samat kuin niiden käänteisluvut:

$$\overline{\left(\frac{O_B-O_C}{P-L}\right)} = \frac{\overline{(O_B-O_C)}}{\overline{(P-L)}},$$

joten voidaan laskea aluksi ylä- ja sitten alakerran liittoluku. Yläkerraksi tulee

$$\begin{aligned}
&\overline{-(2x+y+z)(y+z)(x^2+yz)(2yz+xy+xz)} \\
&= -\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \\
&\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{yz}\right)\left(\frac{2}{yz}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}\right) \\
&= -\left(\frac{2yz+xz+xy}{xyz}\right)\left(\frac{z+y}{yz}\right) \\
&\left(\frac{yz+x^2}{x^2yz}\right)\left(\frac{2x^2yz+z^2xy+y^2xz}{x^2y^2z^2}\right) \\
&= -\Big((2yz+xz+xy)(z+y)(yz+x^2) \\
&(2x^2yz+z^2xy+y^2xz)\Big)/(x^5y^5z^5) \\
&= -\Big((2yz+xz+xy)(z+y)(yz+x^2) \\
&(2x+z+y)\Big)/(x^4y^4z^4)
\end{aligned}$$

ja alakerraksi

$$\begin{aligned}
&\overline{(x+y)(x+z)(y-z)} \\
&\overline{(x^2y+x^2z+y^2z+z^2y+4xyz)} \\
&= \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right) \\
&\left(\frac{1}{x^2y}+\frac{1}{x^2z}+\frac{1}{y^2z}+\frac{1}{z^2y}+\frac{4}{xyz}\right) \\
&= \left(\frac{y+x}{xy}\right)\left(\frac{z+x}{xz}\right)\left(\frac{z-y}{yz}\right) \\
&\left(\frac{x^2z+x^2y}{x^4yz}+\frac{z^2y+y^2z}{y^3z^3}+\frac{4}{xyz}\right) \\
&= \frac{(y+x)(z+x)(z-y)}{x^2y^2z^2}\left(\frac{(x^2z+x^2y)(y^3z^3)xyz}{x^5y^5z^5}+\right. \\
&\left.\frac{(x^4yz)(z^2y+y^2z)xyz}{x^5y^5z^5}+\frac{4(x^4yz)(y^3z^3)}{x^5y^5z^5}\right) \\
&= \frac{(y+x)(z+x)(z-y)}{x^2y^2z^2}\left(\frac{(z+y)(yz)}{x^2y^2z^2}+\right. \\
&\left.\frac{(x^2)(z+y)}{x^2y^2z^2}+\frac{4xyz}{x^2y^2z^2}\right).
\end{aligned}$$

Sievennetään sekä ylä- että alakerrasta $x^4y^4z^4$, jolloin ylös jää

$$-(2yz+xz+xy)(z+y)(yz+x^2)(2x+z+y)$$

ja alas

$$(y+x)(z+x)(z-y)\Big((z+y)yz+x^2(z+y)+4xyz\Big).$$

Nyt suoritetaan yhteenlasku. Oletetaan, että suorat ovat kohtisuorasti toisiaan vasten, jolloin pitäisi lauseen 3 mukaan olla

$$\frac{O_B-O_C}{P-L} + \overline{\left(\frac{O_B-O_C}{P-L}\right)} = 0$$

eli

$$\begin{aligned}
&-\frac{(2x+y+z)(y+z)(x^2+yz)}{(x+y)(x+z)(y-z)} \cdot \frac{(2yz+xy+xz)}{(x^2y+x^2z+y^2z+z^2y+4xyz)} \\
&= -\Bigg(-\frac{(2yz+xz+xy)}{(y+x)(z+x)(z-y)} \cdot \frac{(z+y)(yz+x^2)(2x+z+y)}{((z+y)yz+x^2(z+y)+4xyz)}\Bigg).
\end{aligned}$$

Kerrotaan $-(y+x)(z+x)$:llä ja jaetaan $(z+y)$:llä:

$$\begin{aligned}
&\frac{(2x+y+z)(x^2+yz)(2yz+xy+xz)}{(y-z)(x^2y+x^2z+y^2z+z^2y+4xyz)} \\
&= -\frac{(2yz+xz+xy)(yz+x^2)(2x+z+y)}{-(y-z)((z+y)yz+x^2(z+y)+4xyz)}.
\end{aligned}$$

Jaetaan vielä $(2yz+xz+xy)(yz+x^2)(2x+z+y)$:llä ja kerrotaan $(y-z)$:lla:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(x^2y+x^2z+y^2z+z^2y+4xyz)} \\
&= \frac{1}{(z+y)yz+x^2(z+y)+4xyz} \\
&\frac{1}{x^2y+x^2z+y^2z+z^2y+4xyz} \\
&= \frac{1}{z^2y+y^2z+x^2z+x^2y+4xyz}.
\end{aligned}$$

Koska tämä pitää paikkansa, suora PL on kohtisuorassa suoraa O_BO_C vasten, kuten haluttiin. Siispä PL on yhdensuuntainen PQ:n kanssa, mistä seuraa, että P, Q ja L ovat samalla suoralla, mikä todistaa tehtävänannossa esitetyn väitteen oikeaksi.