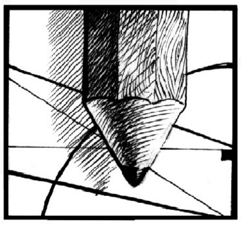

Entä jos olisi äärettömän suuria luonnollisia lukuja?

Tuomas Korppi

Johdanto

Kuten lukija varmaan tietää, luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ on ääretön. Jonoa $1, 2, 3, \ldots$ voidaan nimittäin jatkaa äärettömiin. Oltiinpa päästy miten pitkälle tahansa, sanokaamme lukuun n saakka, aina voidaan muodostaa seuraava luku $n + 1$. Kuitenkin kaikki luonnolliset luvut ovat äärellisiä, kuten 5, 10 ja 345678908765445678987654567899876545678987.

Internetin keskustelupalstoilla pyörii silloin tällöin yksityisajattelijoita, jotka väittävät, että luonnollisten lukujen joukon äärettömyydestä seuraa, että välttämättä on olemassa äärettömän suuria luonnollisia lukuja.

Koulutetulle matemaatikolle on selvää, että äärettömän suurten luonnollisten lukujen olemassaolo ei ainakaan ole välttämättömyys. Matematiikkaa on tehty satoja vuosia olettaen vain äärellisen suuria luonnollisia lukuja, eikä luonnollisten lukujen vakiintuneesta teoriasta ole yrityksistä huolimatta löydetty sisäisiä ristiriitaisuuksia.

Voitaisiinko sitten tehdä ”vaihtoehtomatematiikkaa”, jossa luonnollisten lukujen joukko sisältäisi äärettömän suuria luonnollisia lukuja? Tässä kirjoitelmassa tutkimme, millaista tuo vaihtoehtomatematiikka olisi.

Luku N

Oletetaan, että on olemassa ääretön luonnollinen luku N. Siitä, että sanomme, että tällainen luku on olemassa, ei voida vielä päätellä, millaisia ominaisuuksia sillä on. Kuitenkin luonnollisille luvuille on ominaista, että niillä voidaan laskea. Niinpä oletamme, että sama pätee N:lle.

Jokaiselle luonnolliselle luvulle voidaan muodostaa seuraava luonnollinen luku, joten on olemassa vielä N:ää suurempi luonnollinen luku $N+1$. Siis N ei ollut suurin luonnollinen luku. Vielä on olemassa luku $N+2$, $N+3$ jne. Luonnollisia lukuja voidaan kertoa keskenään, joten on olemassa myös luvut $2N, 3N$ jne, jopa $N \times N$. Nollasta eroavasta luonnollisesta luvusta voidaan myös vähentää pienempi luonnollinen luku, joten on olemassa luvut $N - 1, N - 2, N - 3, \ldots,$ jotka luonnollisesti ovat myös äärettömiä.

Oletimme N:stä ainoastaan, että se on äärettömän suuri luonnollinen luku, ja löysimme suuremman äärettömän luonnollisen luvun $N + 1$ ja pienemmän äärettömän luonnollisen luvun $N - 1$. Niinpä teemme sen johtopäätöksen, että äärettömien luonnollisten lukujen joukossa ei ole pienintä tai suurinta alkiota.

Luku $1/N$

Luonnollisen luvun käänteisluku on reaaliluku, ei luonnollinen luku. Niinpä N:n olemassaolosta seuraa, että reaalilukujen joukko sisältää luvun $1/N$. Se on suurempi kuin nolla, koska luonnollisten lukujen käänteisluvut ovat nollaa suurempia. Kuitenkin, jos n on äärellinen luonnollinen luku, $1/N < 1/n$. Siis esimerkiksi $1/N < 1/484567890987654567898765456789098765456789987$.

Luku $1/N$ on siis äärettömän pieni positiivinen luku eli infinitesimaalinen positiivinen luku.

Lisäksi jokaiselle reaaliluvulle x on olemassa luku $x+1/N$, jolle $(x+1/N)-x=1/N$ on infinitesimaalisen pieni, eli luvut x ja $x+1/N$ ovat infinitesimaalisen lähellä toisiaan.

Vastaavasti kuin N ei ollut suurin luonnollinen luku, ei $1/N$ ole pienin infinitesimaalisen pieni positiivinen luku. Luku $1/(N+1)$ on nimittäin vielä pienempi. Samoin $1/(N+2), 1/(N+3), \ldots$, eikä infinitesimaalisen pienten positiivisten lukujen joukossa ole pienintä alkiota.

Desimaalikehitelmät

Vakiintuneessa matematiikassa on tunnettua, että ei ole olemassa pienintä positiivista reaalilukua. Jos x on pieni positiivinen reaaliluku, voidaan nimittäin muodostaa vielä pienempi positiivinen reaaliluku $x/2$. Monet yksityisajattelijat, erityisesti pohtiessaan Zenonin paradokseja, eivät hyväksy tätä tosiasiaa. He väittävät, että on olemassa pienin positiivinen reaaliluku $0{,}000\ldots1$. Eli luku, jossa on äärettömän monta nollaa ja niiden perässä ykkönen. Tämä ei kuitenkaan ole minkään reaaliluvun desimaalikehitelmä.

Miltäs tilanne näyttää, jos oletamme äärettömän suuren luonnollisen luvun N? Tällöin reaalilukujen desimaalikehitelmissä on N:s desimaali, ja voidaan muodostaa luku $0{,}000\ldots\ldots00010000\ldots$, missä on nollat kaikilla muilla paikoilla ja ykkönen N:nnellä paikalla. Voidaan kuitenkin muodostaa vielä pienempi luku, jossa on nollat muilla paikoilla ja ykkönen $N+1$:nnellä paikalla. Sitten voidaan muodostaa vielä pienempi positiivinen reaaliluku jne. Ajatuksesta, että on olemassa pienin positiivinen reaaliluku x ei tietääkseni synnykään mitään järkevää. Ainakaan jakolaskua ei sellaiselle voisi olla määritelty, tai muuten $x/2$ sotkee homman.

Vakiintuneessa matematiikassa on myös tunnettua, että $0{,}9999\cdots=1$. Tätäkään monet yksityisajattelijat eivät hyväksy, vaan väittävät, että näiden erotus on infinitesimaalisen pieni, nollasta eroava reaaliluku. Jos kuitenkin muodostamme luvun $0{,}999\ldots$ meidän teoriassamme, siinä on ysit myös kaikilla äärettömän suurten luonnollisten lukujen N kuvaamilla paikoilla, ja tulos $0{,}9999\cdots=1$ pätee edelleen. Niinpä $1-0{,}999\ldots$ ei myöskään meidän teoriassamme kelpaa pienimmäksi positiiviseksi reaaliluvuksi.

Jatkuvat funktiot

Tässä luvussa infinitesimaalisen pientä positiivista reaalilukua merkitään symbolilla ϵ. Siis $0<\epsilon<1/n$, missä n käy läpi äärelliset luonnolliset luvut.

Tutkitaan funktiota $f(x)=x^2$. Se on jatkuva kaikilla reaaliluvuilla. Erityisesti se on jatkuva pisteessä 3. Kun lasketaan $f(3+\epsilon)$, saadaan $(3+\epsilon)^2=9+6\epsilon+\epsilon^2$, missä 6ϵ ja ϵ^2 ovat infinitesimaalisen pieniä, ja 9 on $f(3)$. f siis vie luvun $3+\epsilon$ infinitesimaalisen lähelle lukua $f(3)$. Tässä vaiheessa teemmekin seuraavan arvauksen: Jatkuva funktio vie infinitesimaalisen lähellä toisiaan olevat pisteet infinitesimaalisen lähelle toisiaan. Tämä arvaus on myös aika luonnollinen siitä ajatuksesta, että jatkuvan funktion kuvaaja on yhtenäinen käyrä.

Tutkitaan sitten funktiota $f(x)=0$, kun $x\le 0$, ja $f(x)=1$, kun $x>0$. Funktiolla on siis epäjatkuvuuskohta pisteessä 0. Nyt $f(0)=0$, mutta $f(\epsilon)=1$. Nyt siis löytyy kaksi infinitesimaalisen lähellä toisiaan olevaa pistettä, jotka eivät kuvaudu infinitesimaalisen lähelle toisiaan. Teemmekin seuraavan arvauksen: Jos funktio on epäjatkuva, on infinitesimaalisen lähellä toisiaan olevat pisteet, jotka eivät kuvaudu infinitesimaalisen lähelle toisiaan. Tämäkin arvaus on aika luonnollinen siitä ajatuksesta, että epäjatkuvan funktion kuvaaja ”hyppää” jossain kohti.

Tutkitaan sitten funktiota $f(x)=Nx$. Nyt $f(0)=0$, mutta $f(1/N)=N(1/N)=1$. Nyt siis löytyy kaksi infinitesimaalisen lähellä toisiaan olevaa pistettä, jotka eivät kuvaudu infinitesimaalisen lähelle toisiaan. Funktio f on kuitenkin jatkuva.

Tämä f on kuitenkin tietyssä mielessä epätavallinen: Sen määrittelyssä jouduttiin viittaamaan äärettömään lukuun N. Niinpä tämä funktio ei saa meitä luopumaan ensimmäisestä arvauksestamme vaan ennemmin muuttamaan sitä seuraavasti: ”Tavallinen” jatkuva funktio vie infinitesimaalisen lähellä toisiaan olevat pisteet infinitesimaalisen lähelle toisiaan.

Näiden arvausten todistaminen on sen verran vaikeaa, ettemme tässä siihen mene. Arvauksissa on kuitenkin paljon totuutta, ja kun kohta saamme tarpeeksi uutta käsitekoneistoa, muotoilemme tuloksen, joka on näiden arvausten eksakti ja pätevä versio.

Mitä matemaatikot ajattelevat tästä pyhäinhäväistyksestä?

Vakiintuneessa matematiikassa ei hyväksytä äärettömän suuria luonnollisia lukuja tai infinitesimaalisen pieniä positiivisia reaalilukuja. Olemmeko siis perustamassa uutta, kapinallista matematiikan koulukuntaa, joka hyväksyy eri tulokset kuin muut matemaatikot? Emme. Matematiikassa on nimittäin vakiintuneet, selkeät menetelmät, joilla uusia matemaattisia olioita voidaan rakentaa, tai kuten matemaatikot sanovat, konstruoida. Osoittautuu, että vakiintuneen matemaattisten olioiden maailman sisälle voidaan vakiintuneilla menetelmillä konstruoida pieni ”hiekkalaatikkomaailma”, jossa jokainen ääretön joukko sisältää myös äärettömiä alkioita, ja siellä asiat toimivat, kuten edellisissä kappaleissa on esitetty.

Hiekkalaatikkomaailmassa on joukolle $\mathbb{N}$ vastine ${}^*\mathbb{N}$, joka sisältää sekä äärellisen että äärettömän kokoiset ”luonnolliset luvut” ja joukolle $\mathbb{R}$ vastine ${}^*\mathbb{R}$, joka sisältää tavallisten reaalilukujen vastineiden lisäksi infinitesimaalisen pieniä positiivisia lukuja. Jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ on vastine ${}^*n \in {}^*\mathbb{N}$, esimerkiksi luvulle 3 on olemassa vastine ”hiekkalaatikkokolmonen”, ^{*3}. Jokaiselle $r \in \mathbb{R}$ on vastine ${}^*r \in {}^*\mathbb{R}$. Lisäksi jokaiselle $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on vastine ${}^*f\colon {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$. Siis esimerkiksi funktiolle $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = x^2$ on vastine ${}^*f\colon {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}; {}^*f(x) = x^{{}^*2}$.

Näin valtavirtamatemaatikotkin hyväksyvät ”äärettömän suuria luonnollisia lukuja” ja ”infinitesimaalisen pieniä reaalilukuja” koskevat tulokset, ei joukkojen $\mathbb{N}$ ja $\mathbb{R}$ alkioita koskevina tuloksina, vaan joukkojen ${}^*\mathbb{N}$ ja ${}^*\mathbb{R}$ alkioita koskevina tuloksina.

Palataan jatkuviin funktioihin

Nyt tulos, josta vihjaistiin pari lukua takaperin kuuluu seuraavasti:

Lause 1. *Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $x \in \mathbb{R}$. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

- *f on jatkuva pisteessä x.*
- *Kaikilla $y \in {}^*\mathbb{R}$, joille y on infinitesimaalisen lähellä lukua ${}^*x$, pätee, että ${}^*f(y)$ on infinitesimaalisen lähellä lukua ${}^*f({}^*x)$.*

Huomaamme lauseesta, että se pätee vain funktioille, jotka ovat muotoa ${}^*f$, missä $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pari lukua sitten esitetty funktio $g\colon {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}; g(x) = Nx$ on olemassa hiekkalaatikkomaailman sisällä, mutta se ei ole muotoa $g = {}^*f$ yhdellekään funktiolle $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

On myös tärkeää, että se piste x, jossa jatkuvuutta tarkastellaan, on joukon $\mathbb{R}$ alkio, ei joukon ${}^*\mathbb{R}$ äärettömän suuri luku. Lukija voi ihan piruuttaan kokeilla, mitä tapahtuu, jos funktiona on $f(x) = x^2$, ja arvoja ${}^*f(N)$ ja ${}^*f(N + 1/N)$ vertaillaan.

Lopuksi

Tässä kirjoitelmassa esitetyn hiekkalaatikkomaailman sisällä operoimista kutsutaan *epästandardiksi analyysiksi*, ja idean isä on Abraham Robinson. Epästandardi analyysi on siis ihan pätevää matematiikkaa, joten sen arvon ratkaisee kysymys: Onko siitä hyötyä? Tästä ollaan montaa mieltä. Jotkut kokevat epästandardin analyysin hyödylliseksi, mutta monien mielestä se vain mutkistaa asioita eikä mahdollista mitään oikeasti mullistavaa.