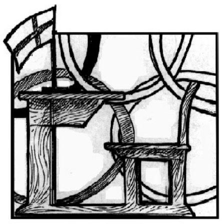


EGMO 2020 – haastavia tehtäviä kotoa käsin

Idaliina Kuusisto, Ulrika Kaara, Veera Nurmela, Anni Tapionlinna

Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset järjestettiin vuonna 2020 tilanteesta johtuen etäkilpailuina. Kilpailuihin kuitenkin osallistui 204 tyttöä 53 eri maasta! Tänä vuonna tehtävät olivat kenties edellisten vuosien tehtäviin verrattuna vaikeampia.

Kilpailut olivat hieno kokemus myös kotoa käsin osallistuttuna. Perinteisesti kilpailuissa oli avajaiset, yhteisiä aktiviteetteja ja loppuseremonia. Pääsimme esimerkiksi kokemaan ekskursiona virtuaalisesti Keukenhofin tulppaanipellot.

Kun EGMO:n kaltainen tapahtuma järjestetään etänä, on haasteena tutustuminen muiden maiden kilpailijoihin. Muihin matematiikasta kiinnostuneisiin tutustuminen on tärkeä osa kilpailua. Kilpailun järjestäjät tekivät kuitenkin hyvää työtä etäaktiviteettien järjestämisessä. Monet kilpailijat kirjoittivat mielenkiinnonkohteistaan ja vaihtoivat yhteystietoja sille tarkoitetulla alustalla keskustellakseen kaukaistenkin kanssakilpailijoiden kanssa. Suomen joukkue oli yhteydessä esimerkiksi Latviaan ja Costa Ricaan.

Kaikki tehtävät olivat haastavia, mutta ne olivat hyvää mietittävää. Tehtävät olivat viime vuosien tehtäviin verrattuina hieman vaikeampia, mikä näkyi kilpailijoiden pisteissä. Kisat tehtiin kotoa käsin ja tämä herätti erilaisia ajatuksia. Kilpailutilanne tuntui hyvin tavalliselta, kun tehtäviä teki kotona. Toisaalta kotona kilpailuihin valmistautuessa täytyi olla itse tarkempi, että oikeanlaisen ”kisatunnelman” sai päälle.

Suomi oli osallistuneista Pohjoismaista paras ja 42. kaikkiaan 53 joukkueen joukossa. Lisäksi Suomi oli 30. osallistuneista 39 Euroopan maasta. Suhteutettuna osallistuneiden maiden kokonaismäärään nämä olivat parhaat tulokset vuoden 2014 jälkeen.

Tehtäviä

Tehtävä 1

Positiiviset kokonaisluvut a_0, a_1, a_2, …, a_{3030} täyttävät ehdon $2 \cdot a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n$ kaikilla $n = 0$, 1, 2, …, 3028. Todista, että ainakin yksi luvuista a_0, a_1, a_2, …, a_{3030} on jaollinen luvulla 2^{2020}.

Esimerkkiratkaisu

Todistetaan induktiolla seuraava väite: Jos kokonaisluvut $a_0, a_1, \ldots, a_{3n}$ täyttävät ehdon $2 \cdot a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n$, niin a_n on jaollinen luvulla 2^{2n}.

Alkuaskel: Yhtälöstä $2a_3 = a_2 + 4a_1$ seuraa, että a_2 on parillinen. Niinpä yhtälöstä $2a_2 = a_1 + 4$ seuraa, että a_1 on jaollinen neljällä $(4 = 2^2 \cdot 1)$.

Induktioaskel: Oletetaan, että väite pätee luvulle $n = k - 1$. Tutkitaan tehtävän ehdot täyttäviä lukuja a_0, a_1, …, a_{3k}. Kun sovelletaan induktio-oletusta sekvensseihin $(a_0, a_1, \ldots, a_{3k-3})$, $(a_1, a_2, \ldots, a_{3k-2})$,

$(a_2, a_3, \ldots, a_{3k-1})$ ja $(a_3, a_4, \ldots, a_{3k})$, huomataan, että a_{k-1}, a_k, a_{k+1} ja a_{k+2} ovat kaikki jaollisia luvulla 2^{2k-2}. Nyt samalla tavalla kuin alkuaskeleessa, yhtälö $2 \cdot \frac{a_{k+2}}{2^{2k-2}} = \frac{a_{k+1}}{2^{2k-2}} + 4 \cdot \frac{a_k}{2^{2k-2}}$ johtaa siihen, että $\frac{a_{k+1}}{2^{2k-2}}$ on jaollinen kahdella ja siksi yhtälö $2 \cdot \frac{a_{k+1}}{2^{2k-2}} = \frac{a_k}{2^{2k-2}} + 4 \cdot \frac{a_{k-1}}{2^{2k-2}}$ johtaa siihen, että $\frac{a_k}{2^{2k-2}}$ on jaollinen neljällä. Siten a_k on jaollinen luvulla 2^{2k} ja induktioväite on todistettu. Tällöin a_{1010} on jaollinen luvulla $2^{2 \cdot 1010} = 2^{2020}$, joten tehtävä on ratkaistu.

Tehtävä 4

Sanotaan, että lukujen $1, 2, \ldots, m$ permutaatio on tuore, jos ei ole olemassa positiivista kokonaislukua $k < m$, jolle permutaation k ensimmäistä jäsentä ovat $1, 2, \ldots, k$ jossakin järjestyksessä. Olkoon f_m kokonaislukujen $1, 2, \ldots, m$ tuoreiden permutaatioiden lukumäärä. Todista, että $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$ kaikilla $n \geq 3$.

Esimerkiksi, jos $m = 4$, niin permutaatio $(3, 1, 4, 2)$ on tuore, kun taas permutaatio $(2, 3, 1, 4)$ ei ole.

Esimerkkivastaus

Olettaen, että $n > 3$, konstruoidaan f_{n-1} erilaista tuoretta permutaatiota. Tutkitaan tuoreita permutaatioita luvuista $1, 3, 4, \ldots, n$, siis luku 2 on poistettu. Permutaatiot ovat muotoa $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ missä $x_1 \neq 1$ ja $\{x_1, \ldots, x_k\} \neq \{1, 3, \ldots, k+1\}$. Tällaisia permutaatioita on täsmälleen f_{n-1}. Kun permutaatioon lisätään luku 2 ennen mitä tahansa lukua tai viimeiseksi, saadaan seuraavat permutaatiot:

$$(2, x_1, \ldots, x_{n-1}), \ldots, (x_1, \ldots, x_{i-1}, 2, x_i), \ldots, (x_1, \ldots, x_{n-1}, 2).$$

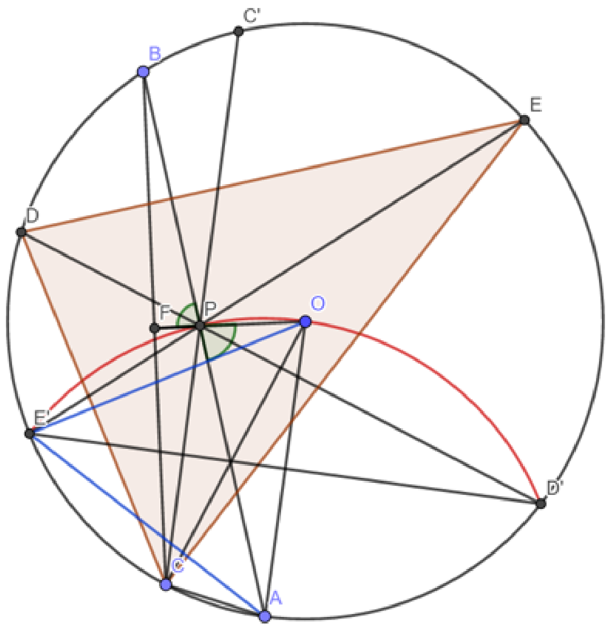
Todistetaan, että kaikki nämä permutaatiot ovat tuoreita: Tehdään vastaoletus ja oletetaan jonkin permutaatioista olevan epätuore. Siis jollekin $1 \leq k \leq n-1$ ensimmäiset k jäsentä ovat $1, \ldots, k$. Jos $k = 1$, ensimmäinen jäsen on 1. Ensimmäinen jäsen on kuitenkin joko 2 tai $x_1 \neq 1$, joten se ei ole mahdollista. Jos $k \geq 2$, ensimmäiset k jäsentä ovat 2 ja $x_1, \ldots, x_{k-1}$, jolloin $\{x_1, \ldots, x_{k-1}\} = \{1, 3, \ldots, k\}$, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ on tuore. Niinpä permutaatiot ovat tuoreita. Koska mahdollisia paikkoja luvun 2 lisäämiselle on $n - 1 + 1 = n$, saadaan $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$.

Tehtävä 5

Olkoon ABC kolmio, jolle $\angle BCA > 90°$. Kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän Γ säde on R. Janalla AB on sisäpiste P, jolle $PB = PC$ ja janan PA pituus on R. Janan PB keskinormaali leikkaa ympyrän Γ pisteissä D ja E. Todista, että P on kolmion CDE sisään piirretyn ympyrän keskipiste.

Ratkaisu

Piirretään ensiksi kuva hahmottamaan tilannetta.



Piste on kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste, jos se on kolmion kulmanpuolittajien leikkauspiste. Siis todistetaan, että piste P on kolmion CDE kulmanpuolittajien leikkauspiste.

Riittää todistaa, että P on kahdella kolmion CDE kulman kulmanpuolittajalla. Todistetaan siis, että $\angle CEP = \angle DEP$ ja $\angle PDC = \angle EPC$.

Olkoot pisteet C', D' ja E' janojen CP, DP ja EP leikkauspisteet kolmion ABC ympärysympyrän kanssa, tässä järjestyksessä.

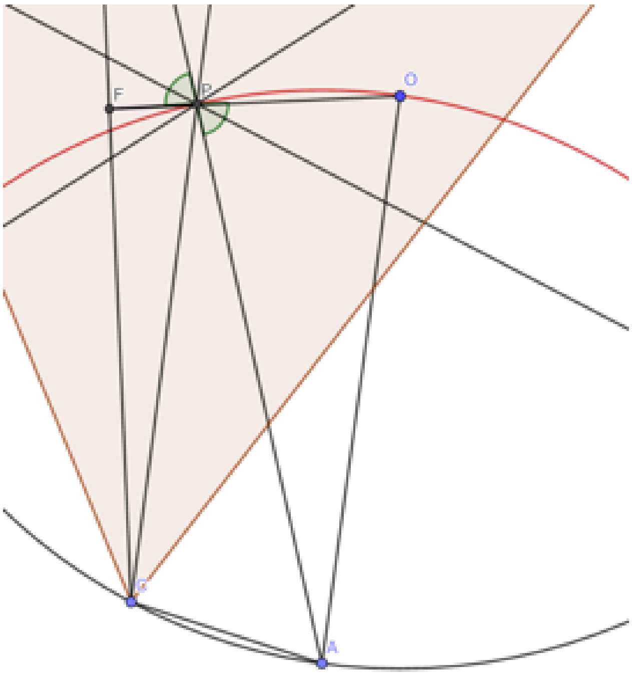
D ja E ovat janan PB keskinormaalilla. Tästä seuraten $BE = EP$ ja $PD = BD$. Kolmiot EPB ja DPB ovat siis tasakylkisiä. $ADBD'$ on jännenelikulmio. Tästä saadaan, että kolmiot APD' ja DPB ovat yhdenmuotoisia. Täten myös APD' on tasakylkinen. Siis $AD' = AP$. Vastaavasti $AE'BE$ on jännenelikulmio, mistä seuraten kolmiot APE' ja EPB ovat yhdenmuotoiset. Myös APE' on tällöin tasakylkinen. Siis $AP = AE'$. Yhdistettynä $AD' = AP = AE'$. Tiedetysti $AP = AO = R$. Siis $AD' = AP = AE' = AO = R$. Täten pisteet D', O, P ja E' ovat samalla ympyrällä, jonka keskipisteenä on A.

O ja E' ovat ympyrällä, jonka keskipiste on A. A ja E' ovat ympyrällä, jonka keskipiste on O. Saadaan

$$OE' = AO = AE'.$$

Siis kolmio $OE'A$ on tasasivuinen. Vastaavasti kolmio OAD' on tasasivuinen. $\angle OAE' = \angle AOE' = \angle D'OA = \angle D'AO = 60°$.

Piirretään tasakylkiselle kolmiolle CPB korkeusjana kulmasta P. Olkoon korkeusjanan kantapiste F. Siis $\angle PFC = 90°$. F on siis sivun BC keskipiste. Myös kolmio OBC on tasakylkinen, joten F on myös tämän kolmion korkeusjanan kantapiste. F, P ja O ovat samalla suoralla.



$PB = PC$. Siis myös $\angle BPF = \angle CPF$.

$$\angle CPF = \angle BPF = \angle APO = \angle POA$$
$$\angle OAP = 180° - 2\angle APO = 180° - 2\angle CPF$$
$$\angle CPA = 180° - \angle CPF - \angle APO = 180° - 2\angle CPF$$

Koska $\angle CPA = \angle PAO$, ovat CP ja OA yhdensuuntaiset.

Suorakulmaisesta kolmiosta BPF saadaan $\angle BPF = 90° - \angle FBP = 90° - \angle CBA$.

Kehäkulmalauseella $\angle COA = 2\angle CBA = 2(90° - \angle BPF) = 2(90° - \angle CPF) = 180° - 2\angle CPF$.

Edelliseen yhdistettynä on siis $\angle COA = \angle CPA = \angle OAP$. $CPOA$ on tästä seuraten jännenelikulmio ja puolisuunnikas, jonka sivut CP ja OA ovat yhdensuuntaiset.

Lasketaan nyt kulmat $\angle CEP$, $\angle DEP$, $\angle PDC$ ja $\angle EPC$. E', P, O ja D' ovat samalla ympyrällä. Kehäkulmalausetta käyttäen

$$\begin{aligned}
\angle CEP &= \angle CEE' = \frac{1}{2}\angle COE' \\
&= \frac{1}{2}(\angle AOE' - \angle COA) = \frac{1}{2}(60° - \angle OAP), \\
\angle DEP &= DEE' = \angle DD'E' = \angle PD'E' = \frac{1}{2}\angle PAE' \\
&= \frac{1}{2}(\angle OAE' - \angle OAP) = \frac{1}{2}(60° - \angle OAP).
\end{aligned}$$

Siis $\angle CEP = \angle DEP$. P on kulmanpuolittajalla EE'. Vastaavasti

$$\begin{aligned}
\angle CDP &= CDD' = \frac{1}{2}COD' = \frac{1}{2}(D'OA + COA) \\
&= \frac{1}{2}(60° + COA) = \frac{1}{2}(60° + OAP), \\
\angle EDP &= EDD' = EE'D' = PE'D' = \frac{1}{2}PAD' \\
&= \frac{1}{2}(\angle D'AO + \angle OAP) = \frac{1}{2}(60° + \angle OAP).
\end{aligned}$$

$\angle CDP = \angle EDP$ .Siis P on kulmanpuolittajalla DD'. Koska P on kahdella kolmion CDE kulmanpuolittajalla, on P kolmion CDE sisäympyrän keskipiste.