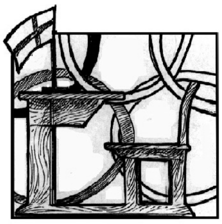

Vuoden 2020 virtuaaliset matematiikkaolympialaiset

Lauri Hallila

Kilpailun järjestelyt

Vuoden 2020 Kansainväliset matematiikkaolympialaiset oli alunperin tarkoitus järjestää Pietarissa heinäkuussa. Koronan vuoksi kilpailuja siirrettiin syksylle siinä toivossa, että koronatilanne helpottaisi siihen mennessä. Kuten tässä vaiheessa on helppo arvata, näin ei tapahtunut. Keväällä virtuaalisesti järjestetty EGMO (European Girls' Mathematical Olympiad) antoi kuitenkin aihetta uskoa, että myös Kansainväliset matematiikkaolympialaiset voitaisiin järjestää kussakin maassa erikseen, ja näin kilpailut päätettiin järjestää etänä.

Lupauduin Suomen joukkueenjohtajaksi ja ottamaan päävastuun kilpailun järjestelyistä Suomessa. Olli Järviniemi lupautui varajohtajakseni. Kilpailun järjestelyt vaativat majoituksen ja kilpailutilojen järjestämisen lisäksi webkameroiden asentamista ja Zoomin käyttöä, jotta kilpailun järjestäjät pystyisivät valvomaan kilpailua kussakin maassa etänä Pietarista. Lisäksi jokaiseen maahan järjestettiin ulkopuolinen tarkkailija valvomaan, että kaikki sujuu hyvässä järjestyksessä. Suomen valvojaksi valittiin Kaie Kubjas. Kaksi ensimmäistä valintaamme tekniseksi tueksi sairastuivat flunssaan juuri ennen kilpailuja, mutta Antti Laaksonen lupautui hommaan varsin lyhyellä varoitusajalla. Suomen kilpailijoiksi olimme valinneet seuraavat kuusi oppilasta: Juho Arala, Daniel Arone, Asla Heiskanen, Hermanni Huhtamäki, Roope Salmi ja Sampo Siitonen.

Ennen kilpailuja tuli useita pieniä järjestelytehtäviä lyhyellä varoitusajalla. Näistä haastavin oli valmistella lyhyt esittelyvideo avajaisseremoniaan. Pyysin kilpailijoita ja varajohtajaani lähettämään muutaman sekunnin videon itsestään kahden päivän sisällä. Osalta kilpailijoista, joilta en saanut videota, otin profiilikuvan ja pääsin ensimmäistä kertaa elämässäni harjoittelemaan videon editointia. Olisin kaivannut joihinkin asioihin vähän enemmän varoitusaikaa, mutta järjestelijöillä Pietarissa oli varmasti kädet täynnä töitä ja ongelmat olivat pieniä esimerkiksi verrattuna vuoden 2018 Pan-afrikkalaisiin matematiikkaolympialaisiin (PAMO), jolloin saavuttuani Nairobiin koordinaattoriksi sain kuulla, että kilpailut on peruttu odottamattomien ongelmien takia; kilpailut onnistuttiin kuitenkin järjestämään, mutta se on oma tarinansa.

Koska osa oppilaistamme oli jo valmistunut lukiosta keväällä ja heillä oli muita velvollisuuksia, pyrimme pitämään kilpailuun varatut päivät minimissä. Jotkut oppilaistamme joutuivatkin tekemään erityisjärjestelyjä päästäkseen osallistumaan kilpailuihin. Yleensä osallistumme ennen kilpailua yhteispohjoismaiseen valmennusleiriin Tanskassa. Tänä vuonna valmennusleiri peruttiin, mutta suurin osa oppilaistamme onnistui osallistumaan juuri ennen matematiikkaolympialaisia virtuaalisesti perinteiseen Viikinkien taisteluun, jossa oppilaat ratkovat tehtäviä, jotka ovat matematiikkaolympialaisten tasoa.

Kilpailupäivät olivat maanantaina 21.9. ja tiistaina 22.9. Järjestimme virallisen valvojan Kaien kanssa kaiken valmiiksi kilpailua varten, ja tekninen tukemme Antti tuli laittamaan Zoomin ja web-kamerat valmiiksi.

Kilpailijoille oli järjestetty eväitä kilpailun ajaksi. Järjestelyt onnistuivat hyvin, vaikka ratkaisujen skannaamiseen menikin odotettua pitempi aika. Kilpailun jälkeen oli varattu tavallista enemmän päiviä koordinointiin, koska se tehtiin etänä. Kilpailuja varten oli tehty matematiikkaolympialaisten sivuille uusia toimintoja, joiden kautta esim. kommunikointi koordinaattoreiden kanssa hoidettiin. Pääosin pisteiden koordinointi hoidettiin viesteillä, mutta tarvittaessa järjestettiin videopuheluja. Osa toiminnoista, joita kilpailujen järjestämiseksi tehtiin, tulee mahdollisesti jäämään käyttöön tulevina vuosina.

Kilpailun tulokset

Kilpailujen ensimmäisen päivän jälkeen pistetilanne ei näyttänyt kovin hyvältä. Ensimmäiseen tehtävään oli muutama varteenotettava ratkaisuyritys, mutta pitkällisten tutkimusten jälkeen varajohtajani Olli tuli siihen tulokseen, että niistä vain yksi oikeasti toimii. Tehtävään kaksi tuli yksi oikea ratkaisu, ja tehtävästä kolme ei saatu yhtään pistettä. Kilpailun toinen päivä sujui kuitenkin huomattavasti paremmin, ja tehtävästä neljä tuli neljä täyttä ratkaisua ja yksi lähes täysi ratkaisu. Lisäksi tehtävän viisi ratkaisi kolme oppilasta. Yhteensä Suomi sai 81 pistettä ja pääsi sijalle 60. Asla Heiskanen sai hopeamitalin 29 pisteellä, Juho Arala pronssimitalin 16 pisteellä ja Hermanni Huhtamäki, Roope Salmi ja Sampo Siitonen kunniamaininnat. Varajohtajani Ollin, joka sai kilpailijana vuonna 2019 prosentuaalisesti parhaan tuloksen ikinä Suomen osalta ja hopeamitalin, piti tarkistaa, saiko Asla häntä paremman tuloksen. Asla sai prosentuaalisesti laskettuna Suomen osalta kolmanneksi parhaan tuloksen tähän mennessä. Suomella on kyllä yksi kultamitalikin, mutta kyseinen tulos jää prosentuaalisesti laskettuna Ollin ja Aslan perään.

Lisäksi haluan mainita, että yksi oppilaistani, joita opetin latvialaisen ystäväni Filips Jelisejevsin kanssa Ghanassa kesällä 2018, Roni Edwin, sai pronssimitalin tämän vuoden matematiikkaolympialaisissa 19 pisteellä. Ghana on osallistunut matematiikkaolympialaisiin vasta vuodesta 2014 lähtien ja tämä oli ensimmäinen vuosi, kun ghanalainen oppilas sai näistä kilpailuista mitalin. Lisäksi Ronin tulos oli paras tulos Saharan eteläpuolisessa Afrikassa. On hienoa nähdä kilpailujen osalta melko uuden maan kehittyvän taidoissaan.

Vuoden 2021 matematiikkaolympialaiset piti aluksi järjestää Yhdysvalloissa, mutta he joutuivat koronan vuoksi perumaan kilpailun isäntinä toimimisen. Venäjä lupasi järjestää myös ensi vuoden kilpailut, vaikka tällä hetkellä ei vielä ole tietoa, järjestetäänkö kilpailut Pietarissa paikan päällä, virtuaalisesti vai jonkinlaisena hybridiratkaisuna.

Kilpatehtävät

Kilpailun virtuaalisen luonteen vuoksi tehtävänvalintakomitea valitsi tehtävät normaalin joukkueenjohtajista koostuvan tuomariston sijasta. Tulosten perusteella voisi sanoa, että komitea onnistui hyvin tehtävässään, sillä tehtävien vaikeustaso on ollut sopiva. Kilpailussa on kumpanakin päivänä kolme tehtävää, joita on aikaa ratkoa neljä ja puoli tuntia.

Tehtävä 1. Tarkastellaan konveksia nelikulmiota $ABCD$. Piste P on nelikulmion $ABCD$ sisällä. Seuraavat suhteet pätevät:

$$\begin{aligned}\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA &= 1 : 2 : 3 \\ &= \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.\end{aligned}$$

Osoita, että seuraavat kolme suoraa kohtaavat samassa pisteessä: Kulmien $\angle ADP$ ja $\angle PCB$ sisäiset puolittajat ja janan AB keskinormaali.

Tehtävä 2. Reaaliluvut a, b, c, d toteuttavat ehdot $a \geq b \geq c \geq d > 0$ ja $a + b + c + d = 1$. Osoita, että

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1.$$

Tehtävä 3. Meillä on $4n$ kiveä, joiden painot ovat $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Jokainen kivi on väritetty yhdellä n väristä ja kunkin värisiä kiviä on neljä kappaletta. Osoita, että voimme järjestää kivet kahteen kasaan siten, että kumpikin seuraavista kahdesta ehdosta toteutuu:

- Kumpikin kasa painaa yhtä paljon.
- Kummassakin kasassa on kaksi kiveä kutakin väriä.

Tehtävä 4. On annettu kokonaisluku $n > 1$. Vuoren rinteellä on n^2 asemaa, joista kaikki ovat eri korkeuksilla. Kumpikin kahdesta köysiratayhtiöstä, A ja B, operoi k:ta gondolia; jokainen gondoli mahdollistaa siirtymisen yhdeltä asemalta korkeammalla olevalle asemalle (ilman välipysähdyksiä). Yhtiön A k:lla gondolilla on k eri aloituspistettä ja k eri päätepistettä, ja gondoli, joka aloittaa korkeammalta, myös päätyy korkeammalle. Yhtiön B gondoleille pätee sama ehto. Sanomme, että kaksi asemaa ovat yhdistettyjä yhtiön toimesta, jos henkilö voi aloittaa alemmalta asemalta ja päätyä ylemmälle käyttämällä yhtä tai useampaa yhtiön gondolia (muita siirtoja asemien välillä ei ole sallittu).

Määritä pienin mahdollinen positiivinen kokonaisluku k, jolle voidaan taata, että on olemassa kaksi asemaa, jotka ovat yhdistettyjä kummankin yhtiön toimesta.

Tehtävä 5. Pakassa on $n > 1$ korttia. Jokaiseen korttiin on kirjoitettu positiivinen kokonaisluku. Pakalla on sellainen ominaisuus, että kunkin korttiparin aritmeettinen keskiarvo on myös joidenkin yhden tai useamman kortin geometrinen keskiarvo.

Mille luvuille n tästä seuraa, että luvut kaikissa korteissa ovat samoja?

Tehtävä 6. Osoita, että on olemassa positiivinen vakio c siten, että seuraava väite pitää paikkansa: Tarkastellaan kokonaislukua $n > 1$ ja sellaista tasolla olevaa n pisteen joukkoa S, että minkä tahansa kahden joukossa S olevan pisteen välinen etäisyys on vähintään 1. Tällöin on olemassa suora ℓ, joka jakaa joukon S siten, että etäisyys mistä tahansa pisteestä joukossa S suoraan ℓ on vähintään $cn^{-1/3}$.

(Suora ℓ jakaa pistejoukon S, jos jokin jana, joka yhdistää kaksi joukon S pistettä, leikkaa suoran ℓ.)

Huomautus. Heikommasta tuloksesta, jossa $cn^{-1/3}$ korvataan termillä $cn^{-\alpha}$, voidaan antaa pisteitä riippuen vakion $\alpha > 1/3$ arvosta.